А. В. Волошинов

МАТЕМАТИКА И ИСКУССТВО

·Просвещение·

А. В. Волошинов

МАТЕМАТИКА И ИСКУССТВО

**Книга для тех,
кто не только любит
математику
или искусство,
но и желает задуматься
о природе прекрасного
и красоте науки**

*2-е издание,
доработанное и дополненное*

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2000

УДК 087.5:[51+7]
ББК 51
В68

Рецензенты:
доктор философских наук ***В. С. Тюхтин***;
доктор физико-математических наук ***С. С. Демидов***;
кандидат педагогических наук ***Б. А. Викол***

Волошинов А. В.
В68 Математика и искусство: Кн. для тех, кто не только любит математику или искусство, но и желает задуматься о природе прекрасного и красоте науки.— 2-е изд., дораб. и доп. — М.: Просвещение, 2000. — 399 с.: ил. —ISBN 5-09-008033-X.

В книге на обширном материале от античных времен до наших дней прослеживаются пути взаимодействия и взаимообогащения двух великих сфер культуры —науки и искусства, развивается стержневая идея книги — идея единства науки и искусства, единства истины и красоты.

Рассматривая «математические начала» формообразования в музыке, архитектуре, живописи и литературе, автор раскрывает внутреннее единство их структурной организации, показывает, что глубинные, фундаментальные закономерности, присущие этим видам искусства, находят адекватное выражение на языке математики.

Книга написана ярко, увлекательно и доступно и рассчитана на самые широкие круги читателей.

УДК 087.5:[51+7]
ББК 51+85

ISBN 5-09-008033-X

Светлой памяти родителей
Виктора и Людмилы Волошиновых
посвящаю

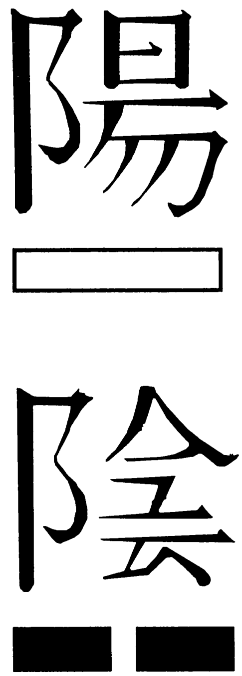
ВСТУПЛЕНИЕ

...Мы никогда не стали бы разумными, если бы исключили число из человеческой природы.
ПЛАТОН

На форзаце предлагаемой книги изображен древнекитайский символ гармонии Тайцзи-ту. Этим символом выражалась сущность бытия, существо всего живого, состоящее в неразрывном единстве и симметричном дополнении двух противоположных первоначал мироздания Инь и Янъ[1]. В соединении и взаимодействии этих двух мировых начал — источник жизни.

Янъ для древних китайцев обозначал одновременно Солнце, свет, добро, красоту, правду, действие, мужское начало; Инь — Землю, тьму, зло, безобразие, ложь, бездействие, женское начало. (Можно с удовлетворением отметить, что взгляды современного человечества в отношении «женского начала» претерпели существенные изменения.) Маленькие круги противоположного цвета в символе Тайцзи напоминали о том, что даже в самом центре одного начала имеется элемент начала противоположного: даже добро содержит крупицу зла, а во всяком зле есть частица добра; даже безобразное может быть в чем-то привлекательным, а всякая красота может иметь что-то отталкивающее; даже в истине содержится что-то от заблуждения, а во всяком заблуждении имеется элемент истины.

Мудрый и красивый символ Тайцзи, составленный из самых совершенных, как считали древние китайцы, линий — окружностей, может стать и символом нашей книги, в которой речь идет о науке и искусстве. Наука и искусство — два высших первоначала культуры, два наиболее ярких выражения двух основных ипостасей духа — Истины и Красоты. В истории мировой культуры были периоды, когда эти два начала мирно уживались, но известны времена, когда они и противоборствовали. Но, видимо, высшая их цель — быть дополняющими и обусловливающими друг друга элементами культуры, как принципы Инь — Янъ в древнекитайском знаке. Более того, как и в этом мудром знаке, даже в самой сердцевине науки есть элементы искусства, а всякое искусство несет в себе крупицы научной мудрости.



Иероглиф Янъ и его символическое изображение в виде неразрывной светлой линии *(вверху)* и иероглиф Инь и его геометрическое представление в виде разрывной темной линии *(внизу)*.

[1] Мы пишем Янъ с твердым знаком, дабы сохранить в русской литерации философию симметричной дополнительности первоначал Инь—Янъ, заложенную в их иероглифической записи. Мягкий знак у Инь указывает на его мягкость, женственность, твердый знак у Янъ будет напоминать о его твердости, мужественности.

Но почему из всей науки выбрана именно математика? Потому что исконное значение слова «математика» (от греч. μαϑημα — знание, наука) не утрачено и сегодня. Математика была и остается стержнем любой науки, царицей всех наук, символом мудрости. Красота математики среди наук недосягаема, а красота является одним из связующих звеньев науки и искусства.

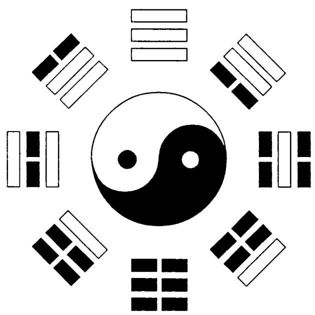
За долгую историю мировой культуры накоплена необъятная литература об искусстве и огромная — о математике. Достаточно вспомнить знаменитые книги «Что такое искусство?» Льва Толстого и «Что такое математика?» Р. Куранта и Г. Роббинса. Однако, в то время как библиотечные полки прогибаются под мудрой тяжестью подробнейших сочинений о науке и об искусстве, отдельно — о науке и отдельно — об искусстве, о механизме и об истории их теснейшего взаимодействия не написано почти ничего. Эта мысль писателя Даниила Данина послужила автору в свое время толчком к написанию данной книги.

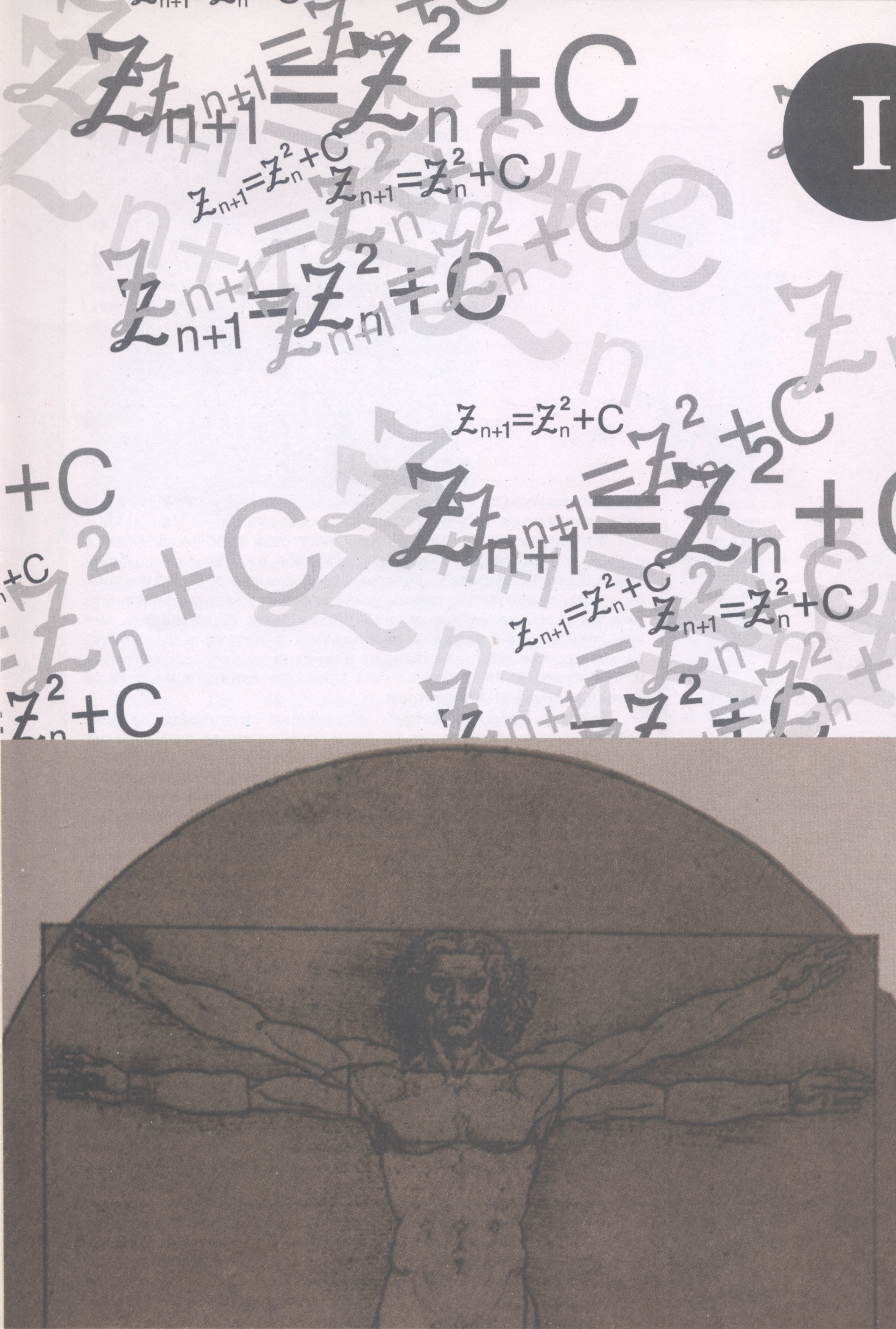
Из многих искусств, допускающих математическое описание, в книге отобраны четыре: два пространственных (архитектура и живопись) и два темпоральных (музыка и литература). Эти важнейшие и наиболее «чистые» искусства составляют основу для многих других прикладных искусств. Но и при таком ограничении автор понимал, что тема книги настолько сложна и многообразна, что сил и возможностей одного человека хватит только на объяснение сути союза «и» в заголовке книги. Собственно, такое объяснение и рассматривалось как главная задача книги: показать, что между словами *математика* и *искусство* действительно должен стоять соединительный союз «и», а не разделительный «или». Если автору удалось это сделать, то цель книги можно считать достигнутой.

В первом издании книги я благодарил свою жену как первого читателя и сурового рецензента. С тех пор мною написано несколько книг, и внимание жены к моим писаниям ослабло. Тем не менее мне бы хотелось вновь поблагодарить мою прекрасную Елену просто за то, что все это время она была рядом со мной.

Автор с благодарностью примет отзывы и замечания, которые можно направлять по адресу: 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

Соединение двух элементов Инь и Янъ в группы по три элемента дает $2^3=8$ комбинаций — *триграмм*, а соединение двух триграмм дает $2^6=64$ *гексаграммы*, комбинаций по шесть элементов. Триграммы и гексаграммы, как полагали древние китайцы, определяют весь набор устойчивых понятий мироздания и характеристик человека. Ниже приведено одно из наиболее распространенных расположений триграмм в круге, символизирующее стороны света (юг китайцы помещали вверху).





I

ИСКУССТВО, НАУКА, КРАСОТА

Потребность красоты и творчества, воплощающего ее,— неразлучна с человеком, и без нее человек, быть может, не захотел бы жить на свете.

Ф. ДОСТОЕВСКИЙ

Едва ли кто-нибудь из нематематиков в состоянии освоиться с мыслью, что цифры могут представлять собой культурную или эстетическую ценность или иметь какое-нибудь отношение к таким понятиям, как красота, сила, вдохновение. Я решительно протестую против этого косного представления о математике.

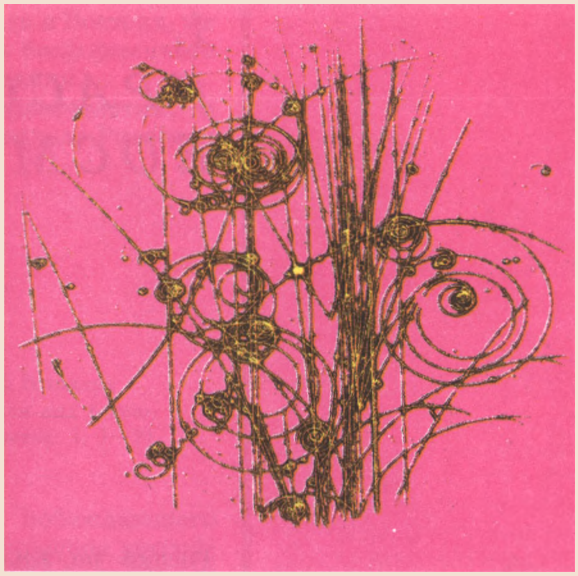
Н. ВИНЕР

Искусство, наука, красота... Как часто мы произносим и слышим эти слова и как редко утруждаем себя задуматься над их смыслом и содержанием! Как любим мы поговорить о произведениях искусства или достижениях науки и как редко замечаем, что обе эти великие сферы деятельности человека, внешне столь разные и далекие друг от друга, тесно переплетены между собой незримыми узами. Как мало мы знаем о том, насколько давно образовались эти узы, сколь они крепки и необходимы и науке, и искусству, так что разорвать их нельзя, не навредив ни тому ни другому, и что красота является самым крепким связующим звеном между наукой и искусством.

Истина, Красота, Добро... Со времен античности человечество выработало учение об этих трех великих смыслообразах, трех ликах культуры. Эти три архетипа человеческого сознания на протяжении столетий образовывали неразрывное триединство и обусловливали друг друга. В средневековых философских трактатах, которые по большей части представляли собой переложение на латынь забытой греческой мудрости, Истина, Красота, Добро изображались в виде прекрасного трехликого ангела, царственно парящего над сонмом муз. Такой смотрит на нас знаменитая триада с титульного листа трактата «Маргарита философика» немецкого ученого и теолога Грегора Райха, изданного во Фрайбурге в 1503 г. (см. с. 124).

Так продолжалось два тысячелетия: от античности вплоть до Ренессанса. Но минуло два века, на смену возвышенной эпохе Возрождения пришел ироничный век Просвещения и триединство Истины, Красоты и Добра распалось. Истина отошла к науке, Красота — к искусству, Добро нашло приют под сводами религии.

Тем временем минуло еще два столетия, и сегодня, на рубеже веков, когда человечество замерло на пороге ядерной и экологической катастроф, стала пронзительно очевидной необходимость скорейшего возрождения утраченного триединства Истины, Красоты и Добра, ибо Истина, не освященная гуманистическими идеалами Добра, ведет мир к самоуничтожению,



П. ФИЛОНОВ.
Беспредметная композиция.
1920-е гг. (слева).
Следы субатомных частиц в пузырьковой камере.
Фото Европейского центра ядерных исследований (CERN) в Женеве (справа).
Сходство художественного произведения Филонова и научной фотографии CERN, основанное на геометрии спирали, очевидно. Но как Филонов, любивший свои беспредметные композиции называть «формулами Вселенной», за полвека предугадал картины динамики субатомных частиц, ставшие основным инструментом физиков в поисках формулы мироздания?!

а Истина, не освещенная животворным светом Красоты, вырождается в схоластику. Красота, потерявшая путеводный луч Истины, погружается в сумерки декаданса, а Красота, лишенная ореола Добра, из доброго ангела превращается в злого демона. Добро без Истины и Красоты общечеловеческих ценностей есть лишь эфемерный призрак, мертворожденное дитя непонятого моралиста.

Красота... Сколько волнений, раздумий и радости доставляла она каждому! Но знаем ли мы, что это такое? И может ли хоть кто-нибудь ответить на простой вопрос: «Что есть красота?»

Искусство... Мы много спорим об искусстве, хотя и говорим, что о вкусах не спорят. Но раз мы все-таки спорим, значит, возможны какие-то общепринятые точки зрения во вкусах, в оценках произведений искусства, во взглядах на прекрасное. Но есть ли объективные законы красоты и каковы они?

Наука... Мы преклоняемся перед ее мудростью, ее успехи окружают нас со всех сторон и кружат нам голову. Но многие ли ощущают, что наука прекрасна, как и искусство? И если так, то в чем красота науки?

В книге вы не найдете ответов на эти вопросы. Не найдете потому, что их до сих пор нет. Это вечные философские проблемы, существующие ровно столько, сколько существуют и сами понятия. Но ведь и высшая цель философии — не отвечать на вопросы, а ставить их! Поэтому, прежде чем начать разговор о «математических началах» искусства, разумно по крайней мере поставить эти вопросы, заострить на них внимание, а по возможности и кое-что разъяснить. Впрочем, и цель настоящей книги прежде всего в том, чтобы читатель задумался над вопросами, которые, возможно, казались ему слишком очевидными.

1. КРАСОТА: КОСМОС ИЛИ ХАОС?

Итак, пожелавши, чтобы все было хорошо и ничто по возможности не было дурно, Бог позаботился обо всех видимых вещах, которые пребывали не в покое, но в нестройном и беспорядочном движении; он привел их из беспорядка в порядок, полагая, что второе, безусловно, лучше первого.

ПЛАТОН

Лет десять назад, участвуя в чемпионате России по альпинизму, я с товарищами по команде шел нескончаемыми лабиринтами ледника Иныльчек к подножию вершины Хан-Тенгри — одной из высочайших и красивейших вершин Тянь-Шаня. То были четыре дня изнурительного блуждания среди фантастического нагромождения камня и льда, поднятого Природой на четырехкилометровую высоту: вздыбленные ледяные глыбы, готовые рухнуть от твоего дыхания, черные пасти дышащих сырым холодом бездонных трещин, бесконечные завалы морен — гигантских каменных насыпей — лед и камни, перемешанные в безудержном неистовстве. Сквозь струи пота Иныльчек казался воплощением первородного Хаоса и, если угодно, Дантова ада.

Но каково было наше изумление, когда через две недели мы смотрели на тот же Иныльчек с вершины Властелина Духов. Морены ледника приняли плавные дугообразные формы, изящно повторяя все изгибы долины. Ледовые трещины стали им строго перпендикулярны, а густота трещин указывала на крутизну падения ледника. Число морен оказалось равным числу впадающих в Иныльчек боковых ледяных притоков и т. д. Изменился масштаб, и Иныльчек предстал воплощением Порядка. Хаос обратился в Порядок.

Здесь, в царстве кристально чистой первозданной природы, ближе к Богу на 7000 метров, вспомнились слова из платоновского «Федра»: только сверху видна упорядоченность Божественного.

Идея Порядка, рожденного Хаосом, проходит через всю историю мировой культуры: Хепри-Ра-Атум (Утреннее-Дневное-Вечернее Солнце) творит себя и мировой порядок из Хаоса первородного океана Нуна в древнеегипетских «Текстах пирамид»; Брахман — из «неразличимой пучины» в ведийской мифологии; первоначала Инь—Янъ структурируют мир из Хаоса Хунь-дунь в книгах даосских мудрецов; Свет побеждает Тьму в Библии; Хаос рождает «широкогрудую Гею — вечно незыблемое основание для всех бессмертных» в «Теогонии» Гесиода. Несмотря на множество вариантов и оттенков в этих

Ледник Иныльчек снизу и сверху: Хаос и Космос в одном лице.
Фото автора.

двух величайших смыслообразах культур Запада и Востока, их объединяла единая идея — идея рождения из бесформенного мрака первобытия прекрасного порядка мироздания.

Эту древнейшую идею не разрушили тысячелетия, и сегодня она очевидна — будь то в последней мандале Ригведы:

Мрак был сокрыт мраком вначале.
Неразличимая пучина — все это.
То жизнедеятельное, что было заключено в пустоту,
Оно одно было порождено силой жара.
(Ригведа. X, 129)

или в первых строках Библии:

Вначале сотворил Бог небо и землю. Земля же была безвидна и пустота, и тьма над бездною, и Дух Божий носился над водою.
(Бытие. I, 1—2)

Воистину идея хороша, когда она вечна.

Идея Космоса, противостоящего Хаосу и побеждающего Хаос, Космоса, определяющего порядок и прекрасное устройство мироздания, является ключевой идеей всей античной философии, откуда она перешла в средневековую, а затем и в ренессансную философию. Именно античная философия возвысила слово «космос» (греч. κοσμος — порядок, украшение) до его современного значения — мировой порядок, Вселенная. Напротив, философско-космогоническое значение слова «хаос» (греч. χαος — зев, зияющая пропасть) как первородной бесформенности сегодня принижено до банального беспорядка. И особенно важно, что уже античная философия говорила об эстетическом превосходстве Космоса над Хаосом, порядка над беспорядком.

Но истинная древность всегда современна. И, удивившись единожды почтенному возрасту древней идеи, сохраненной, словно засушенный цветок, в хрупких фолиантах мировых религий, мы удивляемся дважды, встречая ее расцветшей в самых современных научных теориях.

Согласно современной космогонической теории Большого взрыва, Хаос во Вселенной царил только первые 10^{-43} с — интервал времени, настолько меньший секунды, насколько 1 г вещества меньше массы всей Галактики. «Современный» Хаос, чей облик прорисовывается из уравнений общей теории относительности Эйнштейна, страшнее и библейской «тьмы над бездною», и ригведовой «неразличимой пучины». В его чудовищной сингулярности вещество сжато до бесконечной плотности и температуры, в нем исчезают не только свойства вещества, но и пространство и время!

Однако уже через 10^{-43} с от начала Большого взрыва Порядок во Вселенной побеждает Хаос: за 10^{-4} с промелькнет эпоха адронов, за 20 с — эпоха лептонов, 10^{6} лет длится эпоха излучения и, наконец, Вселенная вступает в нынешнюю эпоху галактик. Хаос обращается в Космос. Остается только поражаться мудрости древних, чьи космогонические мифы кажутся следствиями математических уравнений современной космогонии.

Хепри — Восходящее Солнце в виде жука-скарабея. Ладью Хепри поддерживает Нун.
Рисунок из «Книги мертвых». Анхаи. Ок. 1100 г. до н. э.

Другой супертеорией XX в., предопределяющей неизбежность победы Космоса над Хаосом, является теория неравновесных процессов в физических, химических и биологических системах, развиваемая нашим соотечественником, Нобелевским лауреатом Ильей Пригожиным и его Брюссельской школой, а в России — школой члена-корреспондента Российской Академии наук С. П. Курдюмова, директора Института прикладной математики им. М. В. Келдыша. На наших глазах теория неравновесных процессов перерастает в новую всеобъемлющую науку — *синергетику*[1] и новую *философию нестабильности,* имеющую самые широкие мировоззренческие последствия.

Принцип синергизма, выдвинутый в V в. учеником Иоанна Златоуста преподобным Иоанном Кассианом и состоящий в признании совместного действия на человека Божьего промысла и собственных усилий, по существу, является и основным принципом современной синергетики. Суть синергизма в естествознании в сильно упрощенном виде состоит в том, что в *открытых системах*, т. е. системах, обменивающихся с окружающей средой энергией или веществом, совместное действие малых флуктуаций (случайных возмущений на микроуровне) может привести к процессу *самоорганизации* на макроуровне, т. е. процессу, в ходе которого *из физического хаоса рождаются новые упрядоченные структуры.* Понятно, что, для того чтобы микрофлуктуации были в состоянии вызвать макропоследствия, сама система должна находиться в *неустойчивом состоянии*, подобно мячику на вершине горы.

Важнейшим свойством процессов самоорганизации в открытых системах является их *нелинейность.* Если для линейных дифференциальных уравнений характерны единственные, устойчивые и обратимые во времени решения, когда поведение системы, описываемой этими уравнениями, строго определено, малым причинам соответствуют малые следствия и всегда открыт путь назад, то для нелинейных дифференциальных уравнений свойственны неединственность, неустойчивость и необратимость. Сегодня благодаря достижениям синергетики в естественных и гуманитарных науках математическое свойство нелинейности обретает универсальный мировоззренческий смысл, состоящий в признании многовариантности, хрупкой нестабильности и необратимости путей эволюции системы.

Еще одним ключевым выводом синергетики является *спонтанность* и *принципиальная непредсказуемость* процессов самоорганизации. Открытые системы постоянно флуктуируют, беспорядочно пульсируют, и в некоторый критический момент времени — в так называемой точке *бифуркации* или *точке ветвления* — комбинация флуктуаций может оказаться настолько сильной, что хаотическое состояние перейдет в организованное. В точке бифуркации принципиально невозможно предсказать, в каком направлении пойдет дальнейшее развитие системы.

Итак, спонтанность, непредсказуемость, альтернативность, возможность малыми усилиями достичь больших результатов,

[1] Говорят, основоположник синергетики немецкий физик Герман Хакен долго размышлял, как назвать свое детище, каким словом обозначить *совместное действие* многих параметров сложной системы, приводящее к явлению самоорганизации. В конце концов из двух греческих слов «синагогика» (δυν — вместе и αγωγη — поведение) и «синергетика» (δυν — вместе и εργον — действие) Хакен выбрал второе.

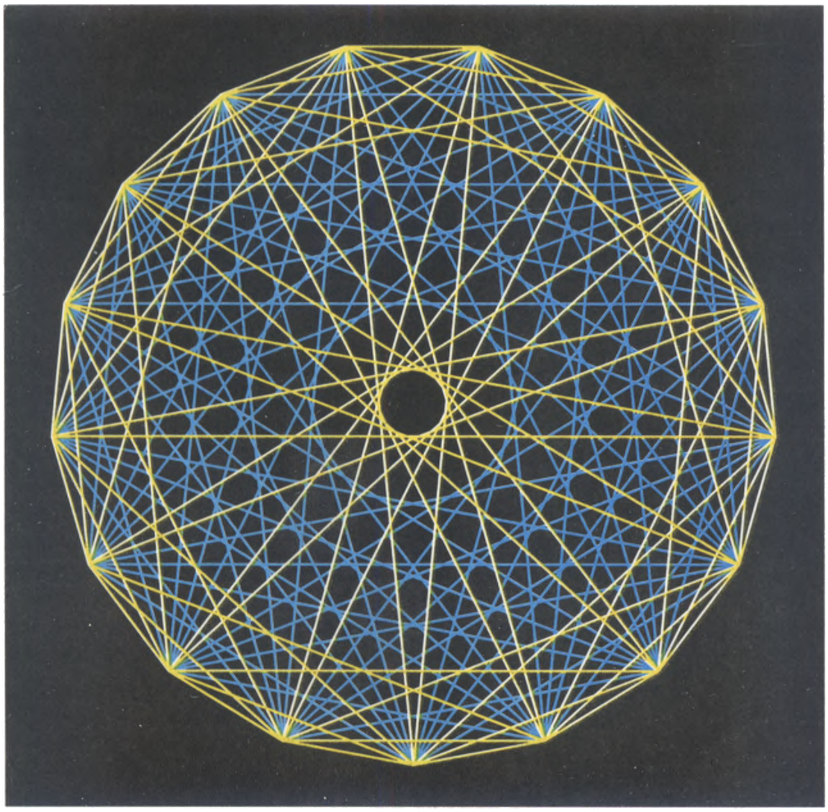
У. БЛЕЙК.
Дни творения. *1794 г.*
Для Блейка, очевидно, не было сомнения в том, что Бог сотворил мир по законам математического порядка.

возможность неожиданных решений в тупиковых ситуациях, необратимость и неповторимость в поведении системы, конструктивная роль Хаоса и случая в мироздании — вот принципиально новые положения *нелинейного мышления*, которые синергетика привносит сегодня в естествознание. Но не эти ли признаки исконно считались неотъемлемыми чертами искусства и творчества, необходимыми элементами поэтического вдохновения? Таким образом, в синергетике на наших глазах происходит стирание застарелой границы между наукой и искусством, между естественными и гуманитарными науками, между поведением природы и человека.

Так, в конце XX в. оживают древние мифы о рождении Космоса из Хаоса. В строгих естественнонаучных теориях возрождаются древние ведические истины, отчетливо прозвучавшие в начале XX в. в авторизованных переводах Константина Бальмонта:

> Там не было ни Смерти, ни Бессмертья,
> Меж Днем и Ночью не было черты,
> Единое одно, само собою,
> Дышало без дыхания везде.
> Все было Тьмой, все покрывал сначала
> Глубокий мрак, был Океан без света.
> Единая пустынность без границ.
> Зародыш, сокровенностью объятый,
> Из внутреннего пламени возник.

Организация частичек песка в барханы под действием дующего с постоянной скоростью ветра — пример самоорганизации в природе. *Барханы в пустыне Сахара. Фото автора.*



Задача о вечеринке — типичный пример приложения теории Рамсея. Какое минимальное количество людей N достаточно собрать на вечеринке, чтобы среди них всегда было либо четверо знакомых, либо четверо незнакомых?
На рисунке 17 гостей рассажены за круглым столом; желтые линии соединяют людей знакомых, а голубые — незнакомых. При $N=17$ невозможно найти четыре точки, для которых сеть соединяющих их линий была бы целиком желтой или голубой. Это становится возможным при $N=18$.

Начало этого ведического гимна будто задумано как иллюстрация к теории Большого взрыва, а конец — к теории самоорганизации.

Наконец, отметим еще одну чисто математическую теорию, проливающую свет на соотношение Космоса и Хаоса. В 1928 г. английский математик Фрэнк Рамсей доказал, что каждое достаточно большое множество элементов произвольной природы — будь то квадратики у кубистов или звезды на небосклоне — обязательно содержит высокоупорядоченную структуру. Таким образом, из теории Рамсея следует, что полная неупорядоченность вообще невозможна. Всякий Хаос обязательно содержит элементы Космоса, как Инь содержит хотя бы частицу Янъ.

Иллюстрацией к теории Рамсея является описанная мною метаморфоза с ледником Иныльчек: с резким увеличением числа объектов, попадающих в поле зрения альпиниста, выявляется структурированность множества (ледника), первоначально (при меньшем числе объектов в поле зрения) казавшегося хаотичным. Разумеется, вовсе не обязательно взбираться на семикилометровую высоту, чтобы убедиться в справедливости теории Рамсея. Достаточно в музейной тиши посмотреть вблизи на любое полотно, а затем отойти от картины — и Хаос цветных пятен обратится в Порядок живописной композиции. Легко представить и обратное превращение: обычная снежинка — воплощение симметрии и порядка в природе — превратится в ледяной Хаос, если вообразить человека микроскопическим существом, ступившим в ее холодные лабиринты.

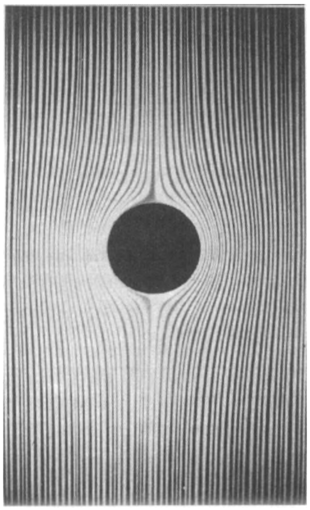
Но не пора ли от древних мифов и современных теорий о противоборстве Космоса и Хаоса перейти к основной теме главы — красоте? Что же считать красивым: порядок или беспорядок, Космос или Хаос? Поскольку Космос и Хаос, как и символы Янъ — Инь, неразрывно дополняют и оттеняют друг друга в природе и «второй природе» — культуре, то ясно, что они должны играть одинаковую роль в формировании и понимании красоты.

Не зная беспорядка, мы не поймем и не оценим порядка, как, не зная порядка, мы не заметим хаоса.

Космогенные и хаосогенные начала в равной мере выстраивают наши представления о красоте. Эту необходимую дополнительность противоположных начал прекрасно осознавали древние китайцы. О ней еще в VI в. до н. э. в трактате «Дао дэ цзин» писал основоположник даосизма древнекитайский философ Лао-цзы: «Когда в Поднебесной все узнают, что красота — это красота, появится уродство. Когда все узнают, что добро — это добро, появится и зло. Ибо бытие и небытие порождают друг друга, трудное и легкое создают друг друга, короткое и длинное измеряют друг друга, высокое и низкое тянутся друг к другу, звуки и голоса вторят друг другу, *до* и *после* следуют друг за другом. Вот почему мудрец действует недеянием».

Даже беглого взгляда на историю наиболее близкого нам европейского искусства достаточно, чтобы убедиться в том, что космогенные и хаосогенные начала, гармония и дисгар-

Три стадии перехода от порядка к хаосу при обтекании кругового цилиндра жидкостью.



Ламинарный (от лат. lamina— пластинка) слоистый режим обтекания при малых скоростях жидкости. *Линейный порядок.*

Переходный, неустойчивый режим: образование вихревой дорожки Кармана при средних скоростях обтекания. *Нелинейный порядок.*

мония пребывают в этой истории в состоянии непрерывной текучести и смены друг друга. Рожденный из глубин древнегреческой архаики сдержанно-благородный порядок искусства классической Греции сменяется вычурным мистическим беспорядком искусства эпохи эллинизма. Взятый за образец республиканским Римом порядок классического древнегреческого канона (греч. κανων — правило, образец) вновь распадается в безудержном хаосе эпохи Римской империи. И снова простота геометрического порядка романских храмов утопает в каменном кружеве готики, здоровая гармония искусства эпохи Возрождения сменяется болезненными извивами постренессансного барокко и рококо, ритмический строй классицизма разрушается мятущимся вихрем романтизма. И уже в XIX в. природный космос критического реализма сменяется искусственным хаосом импрессионизма и модернизма, прямолинейную геометрию конструктивизма взрывает неевклидова геометрия экспрессионизма, фотографический порядок прагматического реализма деформируется иллюзорным хаосом постмодернизма.

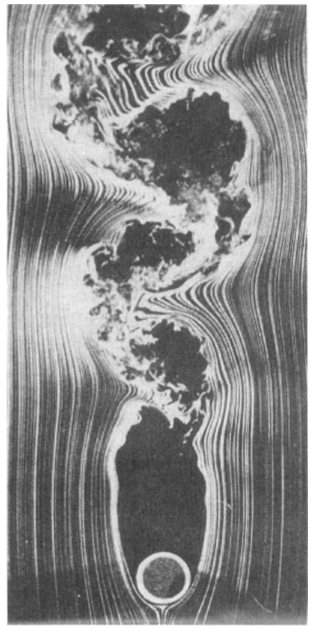
Если изобразить эту пеструю смену различных стилей в европейской истории искусств схематически (см. рис. на с. 14), то в ней легко усматривается строгая закономерность взаимных переходов Космоса и Хаоса.

Именно философия «левых» стилей искусств определяется древнегреческим первопринципом Космос или древнекитайским первоначалом Янъ, тогда как философия «правых» стилей основывается на первоначалах Хаос или Инь. (В главе 4 станет ясно, что мы не случайно назвали эти стили левыми и правыми.) Левые стили тяготеют к упорядоченности, классицистическим нормам, гармонии, Космосу, а правым стилям более присущи беспорядок, барочные нормы, дисгармония, Хаос. Космогенные, или гармонические, стили более просты, уравновешенны, ясны и цельны, тогда как хаосогенные, или дисгармонические, стили более вычурны, неравновесны, туманны и двойственны.

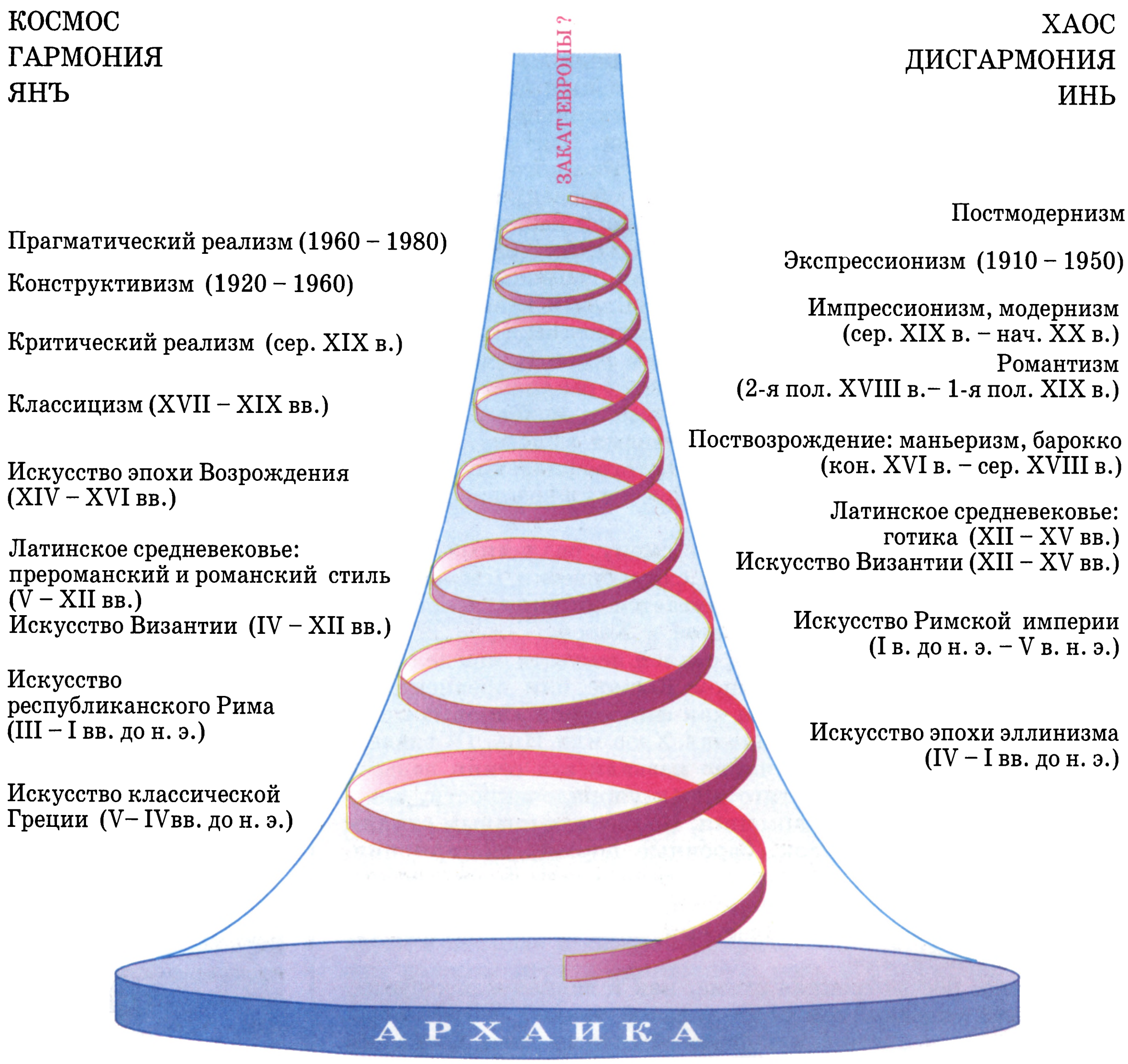
Конечно, рассмотренная схема, как и всякая классификация, весьма условна, тем более в такой тонкой и противоречивой области культуры, как философия искусства. В каждом из выделенных периодов, периодов противоречивых и долгих, порою до нескольких столетий, можно, в свою очередь, обнаружить периодическую смену гармонических и дисгармонических тенденций. И так далее — вплоть до творчества отдельного художника, вплоть до его одного произведения и даже до одного дня творения. История искусств и жизнеописаний творцов предстанет перед нами в виде сплетения больших и малых, очень больших и совсем малых спиралей, кружащих от гармонии к дисгармонии и от дисгармонии снова к гармонии.

Такие самоподобные структуры называются *фракталами*. Их необычайно важная роль в «первой» и «второй» природе раскрывается буквально на наших глазах, и к ним мы еще вернемся в главе 5.

Итак, фундаментальный закон мироздания — *закон отрицательной обратной связи*, закон, задающий любые периоди-



Турбулентный (от лат turbulentus — беспорядочный) режим обтекания при больших скоростях набегающего потока. *Хаос.*



Смена космогенных и хаосогенных (гармонических и дисгармонических) стилей в европейской истории искусств.

ческие процессы, внутренне присущ и бытию искусства. Этот закон определяет ритмическое чередование космогенных и хаосогенных тенденций в искусстве, смену гармонических и дисгармонических стилей. Подобно тому как Природа представляет собой единство созидающих (негэнтропийных) и разрушающих (энтропийных) сил, единство самоорганизации и саморазрушения, так и Красота не есть ни Космос, ни Хаос, а есть диалектическое единство этих первоначал. Красота живет на границе Космоса и Хаоса, а вся история искусств есть только смещение этой границы в область Космоса или Хаоса.

Однако, как легко заметить на схеме, периоды смены стилей европейского искусства неуклонно сокращаются. Тот же процесс наблюдается и в истории человечества: циклы существования различных цивилизаций или империй монотонно убывают. Если древнеегипетская цивилизация просуществовала несколько тысячелетий, а древнеримская империя — несколько столетий, то для распада СССР понадобилось менее века. Сокращение периода колебаний в нелинейной системе — грозный симптом, свидетельствующий о ее неустойчивости, о приближении к точке бифуркации. Какой путь выберет система в точке бифуркации (анализ методами синергетики роста населения Земли указывает ее точное значение — 2025 год!): полный распад, Апокалипсис[1], закат Европы[2] или выход на новый центр притяжения, новый аттрактор[3]? Какие случайные флуктуации и в какой точке Земли окажутся решающими в выборе нового пути? Сама же синергетика, просчитывающая эти мрачные прогнозы, говорит о принципиальной непредсказуемости возможного пути. Нам остается только уповать на мудрость и гуманизм Природы или Создателя в выборе нового пути для человечества.

Но вернемся от апокалиптических прогнозов синергетики в мир вечной красоты. Вернемся к эпиграфу к данной главе, где Платон, сравнивая беспорядок и порядок, от имени Бога утверждает, что «второе, безусловно, лучше первого». Откуда такая уверенность? Поистине удивительно, что через 2500 лет слова Платона находят подтверждение в экспериментах нейрофизиологов. Психофизиологические исследования последних лет убедительно свидетельствуют о том, что человек во внешнем мире ищет упорядоченность и воспринимает порядок как красоту. Более того, как считают многие психологи, чувственное восприятие человека предрасположено к порядку и создает кажущийся порядок даже там, где его нет, благо теоремы Рамсея позволяют отыскать порядок практически всюду. Наконец, поразительны результаты опытов немецкого психолога Б. Ренша: не только обезьяны, но даже еноты и птицы предпочитают симметрию и порядок асимметрии и хаосу.

Поэтому неудивительно, что и сегодня слова Платона о превосходстве Космоса над Хаосом повторяют и художники, и ученые. Два таких высказывания выдающегося архитектора XX в. Ле Корбюзье и великого физика XX в. Альберта Эйнштейна вынесены на поля следующей страницы.

Эстетическое предпочтение порядка хаосу, по-видимому, связано с процессом обработки информации мозгом человека. Пропускная способность кратковременной памяти человека около 16 бит/с. Если информация поступает с меньшей скоростью, то человек испытывает скуку от недостатка информации, если с большей — перегрузку от ее избытка. При восприятии сложных упорядоченных объектов человек выделяет в них макроструктуры, тем самым уменьшает объем получаемой информации, облегчает процесс ее запоминания и, как следствие, испытывает удовлетворение от проделанной мозгом работы. Восприятие же хаоса приводит к раздражению от непонятной информации.

Так же происходит и при восприятии искусства. Когда привычный гармонический стиль перестает нести зрителю но-

[1] «Откровение ап. Иоанна Богослова (Апокалипсис)» — последняя книга Нового Завета, написанная в конце I в. любимым учеником Христа Иоанном и рисующая в форме видений Иоанна судьбу христианского мира и грядущий конец света.

[2] «Закат Европы» — вышедшее в 1920 гг. двухтомное сочинение немецкого учителя математики Освальда Шпенглера (1880—1936). Философско-художественное произведение Шпенглера, рисующее апокалиптическую картину гибели западной культуры, имело сенсационный успех и поныне остается культурологическим бестселлером.

[3] *Аттрактор* (от англ. *attraction* — притяжение) — одно из центральных понятий синергетики. Аттрактор — это точка притяжения системы, которая притягивает к себе все множество возможных траекторий системы, определяемых различными начальными условиями. Аттрактором, например, является отверстие в ванной при сливе воды, куда сходятся траектории всех частиц выпускаемой воды.

Без веры во внутреннюю гармонию нашего мира не могло бы быть никакой науки. Эта вера есть и всегда останется основным мотивом всякого научного творчества.

Альберт Эйнштейн

Человек, наделенный свободной волей, тяготеет к чистой геометрии. В этом случае он создает порядок. Порядок ему необходим, без него все его действия теряют согласованность, логическую взаимосвязь.

Ле Корбюзье

А. ДЮРЕР.
Битва архангела Михаила.
Гравюра на дереве.
Иллюстрация к «Апокалипсису». 1498 г.

вые порции информационного и эмоционального заряда, «не волнует» его, искусство обращается к непонятному и будоражащему дисгармоническому стилю, который, в свою очередь, будет привлекать внимание до тех пор, пока его беспорядок не станет хорошо узнаваем, «не наскучит» и не подтолкнет искусство вновь к гармоническому стилю. Спираль искусства совершит очередной виток между Космосом и Хаосом и вновь возвратится на круги своя. «Что было, то и будет, и что делалось, то и будет делаться, и нет ничего нового под солнцем» (Еккл. 1,10).

Итак, Космос и Хаос есть неразрывные, дополняющие друг друга и переходящие друг в друга сущностные и эстетические начала природы и искусства. Эстетика Космоса — это созидание нового порядка, созидание красоты. Эстетика Хаоса — это предчувствие зарождения нового порядка, ожидание красоты. Космос — это красота актуальная, тогда как Хаос есть красота потенциальная. Однако дополняемость Космоса и Хаоса не носит симметричного характера. Как в мироздании, так и в созидании и восприятии красоты Космос доминирует над Хаосом.

Но какое отношение эстетика Космоса и Хаоса имеет к теме этой книги? Самое непосредственное. Там, где есть порядок, там есть и математика. Можно сказать и более категорично: *математика есть язык порядка*. Так что *математика искусства*, о которой пойдет речь в книге, — это прежде всего *математика порядка* в искусстве. Поэтому, говоря о математических началах искусства, будем иметь в виду ту часть искусства, которая лучше всего характеризуется античным словом τεχνη, означавшим одновременно *искусство, науку* и *ремесло*. Каждое искусство, без сомнения, имеет свое «техне», свою «технику ремесла», свои правила и законы построения формы. Эти законы описываются той математикой искусства, о которой пойдет речь в книге.

Разумеется, математика порядка есть только первый шаг в постижении феномена искусства математическими методами. Также и в естествознании полная упорядоченность была только предварительным условием для успешного применения математики. 400 лет назад великий Галилей сетовал: мы хорошо знаем законы движения далеких светил, но мы не знаем законов движения журчащего под ногами ручейка. Это и понятно: движение светил неизмеримо более упорядочено, чем движение ручейка.

Сегодня законы движения ручейка, где важная роль принадлежит Хаосу, открывает *математика хаоса* синергетики, которая все успешнее вторгается и в область анализа искусства. Однако эта математика слишком сложна для нашей книги.

Но и объединившись, математика порядка и математика хаоса никогда не раскроют всех тайн искусства. В искусстве всегда будет оставаться некая terra incognita, запретная для логического анализа. Да и не следует всуе топтать эту землю! Однако, для того чтобы понять это, необходимо глубже осмыслить, что есть искусство, что есть красота и что есть математика. Этому и будут посвящены следующие главы книги.

2.
ЭСТЕТИКА: НАУКА О ПРЕКРАСНОМ

Скажи, откуда ты приходишь, Красота?
Твой взор — лазурь небес иль порожденье ада?
Ты, как вино, пьянишь прильнувшие уста,
Равно ты радости и козни сеять рада.
Ш. БОДЛЕР

А если это так, то что есть красота
И почему ее обожествляют люди?
Сосуд она, в котором пустота,
Или огонь, мерцающий в сосуде?
Н. ЗАБОЛОЦКИЙ

Что такое искусство? Как объяснить пронзительное воздействие искусства на человека? Какая потребность побуждает людей создавать произведения искусства? Сколь долго существует искусство?.. Непростые это вопросы, и однозначно ответить можно, пожалуй, лишь на последний из них: искусство существует столько, сколько существует человек! Доказательством тому служит не только искусство Шумера и Древнего Египта, зародившееся в IV—III тысячелетии до н. э., но и первобытное искусство верхнего палеолита, уходящее корнями в XL тысячелетие (400 веков!) до н. э.

«Что такое искусство?» — этим вопросом Лев Толстой озаглавил свою крупнейшую работу об искусстве, которая стоила ему пятнадцати лет напряженного труда. Величайший мыслитель пытался разобраться в удивительном феномене искусства, изучая все доступные ему работы предшественников, разбирая около семидесяти определений искусства, но... вопросы, вопросы росли как снежный ком, а истина все ускользала.

Почему? «В каждом большом городе строятся огромные здания для музеев, академий, консерваторий, драматических школ, для представлений и концертов. Сотни тысяч рабочих — плотники, каменщики, красильщики, столяры, обойщики, портные, парикмахеры, ювелиры, бронзовщики, наборщики — целые жизни проводят в тяжелом труде для удовлетворения требований искусства, так что едва ли есть какая-нибудь другая деятельность человеческая, кроме военной, которая поглощала бы столько сил, сколько эта» (Лев Толстой).

Почему? «Во все времена молодые люди шли в искусство, обрекая себя на нищету, непризнание, неимоверно тяжелый труд, который в девяноста девяти случаях из ста не приносил ни славы, ни благополучия, ни даже внутреннего сознания успеха. Образ нищего художника — один из самых привычных

ИЗОБРАЖЕНИЕ БИЗОНА.
Фрагмент наскальной живописи из «Большого зала», или «Зала быков», пещеры Ласко, Франция.
Верхний палеолит, мадленский период, XII тыс. до н. э. — период расцвета пещерного искусства. Высокое качество живописи и ее прекрасная сохранность позволяют отнести пещерный комплекс Ласко к разряду первоклассных образцов пещерного искусства.

ВЕНЕРА ТАВРИЧЕСКАЯ.
III в. до н. э.
Одно из первых в России произведений античного искусства.

ШАРДЕН. Прачка. *Ок. 1737 г.*

в литературе всех времен. Но снова и снова люди несли свои жизни в жертву тому же искусству. Они шли непреклонно, как идет рыба — через пороги, через препятствия в извечные места нереста, погибая в пути, лишь бы выполнить заложенную природой высокую обязанность».

А это уже наш современник, физик-теоретик, член-корреспондент РАН Е. Л. Фейнберг в книге «Две культуры» через сто лет после Льва Толстого пытается распутать все тот же клубок вопросов. Возможно, многих удивит, что представитель точных наук занялся проблемами искусства. Ничего удивительного! Учитель математики Освальд Шпенглер, физик-ядерщик Евгений Фейнберг, делавший атомную бомбу вместе с великим А. Д. Сахаровым, математик и механик Борис Раушенбах, создававший космические ракеты рука об руку с «полководцем» российской космонавтики С. П. Королевым, — в этой книге мы встретим немало примеров тому, как сверхзагруженные основной работой ученые отдавали много времени и сил искусству. И в этом также великая тайна искусства!

Так что же такое искусство? Каких только ответов на этот вопрос не было! Искусство называли второй природой и учебником жизни, воспроизведением действительности и свободным формотворчеством, недостижимым идеалом и высшей молитвой, игрой формами и игрой в бисер. Философы, критики, активные созидатели и пассивные созерцатели искусства наперебой утверждали, что искусство должно развлекать и что оно призвано воспитывать, что цель искусства — услаждать чувства и пробуждать мысль, что оно служит познанию жизни и что оно должно уводить от мирской суеты, что оно обязано «служить народу» и что оно не обязано потакать вкусам «толпы»...

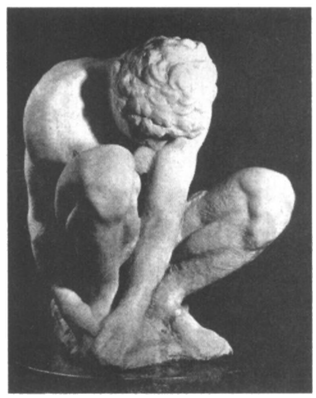
Никакая другая область культуры — ни религия, ни наука, ни политика, ни право — не толковалась столь разноречиво и противоречиво, как искусство. Но это и понятно: ведь чтобы объяснить, что такое искусство, в нем надо найти такие свойства, которые одинаково подходили бы к музыке и литературе, архитектуре и живописи, скульптуре и танцу. Но как найти внутреннюю связь между торжественным великолепием здания Зимнего дворца и собранными в нем сокровищами Эрмитажа? Какая незримая нить связывает между собой Венеру Таврическую и прачку Шардена, грозного Юпитера и скорчившегося мальчика Микеланджело, миниатюрную античную камею и огромную колыванскую вазу? Споры об определении и назначении искусства велись на протяжении всей его истории и не затихли по сей день. И в том, что человечество, давно и точно определившее назначение других форм своей духовной и практической деятельности, никак не может «договориться» в определении искусства, возможно, и кроется разгадка самого феномена искусства.

Искусство *многофункционально*: оно способно решать самые разнообразные духовные и социальные задачи, которые сплетены в единый неразрывный узел. Среди других строго разграниченных форм человеческой деятельности искусство сохраняет поразительное свойство быть *всем и ничем особенным одновременно*. Подобно науке, искусство служит познанию окружающей действительности; подобно языку, оно является средством общения людей, разрабатывая для этого специальные *художественные языки* музыки, живописи, поэзии и т. д.; вместе с религией оно облагораживает и возвышает душу человека; вместе с педагогикой воспитывает его.

В то время как мир шел по пути разделения и отчуждения различных сфер деятельности человека, искусство — и в этом, возможно, его высшая мудрость — объединяло и примиряло эти сферы. В результате искусство не только стало *второй реальностью*, отражая в своем волшебном зеркале все грани реального бытия, но, как и всякое здоровое дитя, переросло родителей, создавая собственную *виртуальную реальность*[1] — сказочное зазеркалье мира абстрактного и компьютерного искусства.

Человеку свойственно в многообразных по форме явлениях искать общую первопричину. Замечательных результатов на этом пути достигла наука физика. Вспомним закон всемирного тяготения Ньютона, связавший воедино падение яблока и движение планет. Поэтому символично, что именно физик Фейнберг в названной работе пытается найти *некоторую общую подоснову*, которая могла бы объединить множество столь несходных функций искусства. Перечислим кратко лишь основные из них.

ИМПЕРАТОР ОКТАВИАН АВГУСТ в образе Юпитера. *I в.* Волшебство искусства превратило тщедушного Октавиана в величавого Юпитера.



МИКЕЛАНДЖЕЛО. Скорчившийся мальчик. *Между 1520—1534 гг.*

[1] *Виртуальный* (лат. *virtualis*) — возможный. Этот чисто научный термин сегодня стремительно ворвался в современную жизнь, обозначая фантастическую *возможную реальность*, создаваемую современными компьютерными мультимедийными средствами.

ШАРДЕН.
Атрибуты искусств.
1760-е гг.

Прежде всего искусство служит духовному возвышению, облагораживанию человека, отчего эту его высочайшую функцию следует назвать *духовной*. Именно искусство подвигнуло первобытного человека сделать первый, самый трудный шаг, приподнявший его над животным состоянием. Именно искусство продолжает и сегодня вести человечество по нескончаемой лестнице духовного самосовершенствования, гася первородные инстинкты и культивируя благоприобретенные ценности. И что особенно важно, искусство не только ведет нас в сокровищницу накопленных духовных ценностей, но и пробуждает дремлющие в нас собственные достоинства. Тем самым искусство выступает не только как средство *духовного познания*, но и как инструмент *духовного самосознания*. Раскрывая перед нами духовный мир своих героев, художник дает нам возможность познать и самих себя, понять в себе то, что без помощи искусства мы никогда бы не заметили и не осмыслили. Недаром мудрые греки начертали на храме Аполлона в Дельфах: ΓΝΩΘΙ ΣΑΥΤΟΝ — ПОЗНАЙ САМОГО СЕБЯ.

Как проводник духовной энергии выступает *коммуникативная* (от лат. communicatio — сообщение) функция искусства. В самом деле, искусство не только накапливает, сохраняет, но и передает грядущим поколениям духовный опыт их предшественников. Благодаря искусству происходит тот животворный обмен мыслями, чувствами, устремлениями, без которого немыслимо существование человека. Искусство делает духовный мир художника, способного постигать действительность с особой чуткостью и проникновенностью, достоянием простых смертных. Таким образом, благодаря гению Гомера, Рафаэля, Стравинского мы становимся умнее, зорче, духовно богаче.

Огромную роль играет *просветительская* функция искусства. Любой из нас может признаться в том, что многие яркие

Кто осмелится сказать, что определил Искусство? Перечислил все его стороны? А может быть, уже и понимал, и называл нам в прошлые века, но мы недолго могли на том застояться: мы послушали, и пренебрегли, и откинули тут же, как всегда спеша сменить хоть и самое лучшее — а только бы на новое!

А. Солженицын
Нобелевская лекция

и незабываемые сведения он с легкостью извлек не из учебников истории или географии, а из художественных произведений Александра Дюма, Жюля Верна или Валентина Пикуля. Еще древние греки заметили удивительное свойство искусства: *поучать развлекая.* Эту особенность искусства имел в виду и Н. Г. Чернышевский, когда говорил, что искусство — такой учебник жизни, который с удовольствием читают даже те, кто не любит других учебников. Недаром Бальзак, ценивший просветительскую функцию своих романов не менее художественной, называл себя доктором социальных наук.

Каждый испытал на себе и *воспитательную* функцию искусства. Воспитывая, искусство обращается не столько к нашей мысли, сколько к нашему чувству; оно требует от нас не столько понимания, сколько сопереживания, и это последнее быстрее находит путь к глубинам нашего сознания. Искусство позволяет нам прочувствовать и пережить то, чего никогда не было с нами в действительной жизни, и тем самым воспитывает нас, заставляет сделать свой выбор.

И наконец, человек должен испытать радость, почувствовав наслаждение от красоты и совершенства произведения искусства. Так мы приходим к *эстетической* (от греч. αισθητικος — чувствующий) функции искусства, самой естественной и оттого самой важной функции. В самом деле, мы просто пренебрегаем теми произведениями искусства, которые не приносят нам удовольствия от общения с ними, не волнуют нас. Какая уж тут просветительская или воспитательная функция! Только там, где мы замираем с возгласом «красота-то какая!», и начинается для нас искусство. Не случайно поэтому искусство часто смешивают с красотой.

Итак, самое большее, чего мы достигли в поисках ответа на вопрос «Что есть искусство?», — это формулировка логически противоречивой аксиомы: *искусство есть все и ничего особенного одновременно.* Негусто. Но зато мы обнаружили, что только красота способна открыть нам двери в искусство. Значит, поняв, что есть красота, у нас появится надежда скорее понять, что есть искусство.

Что же такое красота? Обратимся вновь к Льву Толстому, гениальному мыслителю и мастеру слова: «Для среднего человека кажется ясным и понятным то, что искусство есть проявление красоты; и красотою объясняются для него все вопросы искусства.

Но что же такое красота, которая составляет, по его мнению, содержание искусства? Как она определяется и что это такое?

Как это бывает во всяком деле, чем неяснее, запутаннее понятие, которое передается словом, тем с большим апломбом и самоуверенностью употребляют люди это слово, делая вид, будто то, что подразумевается под этим словом, так просто и ясно, что не стоит и говорить о том, что собственно оно значит... Предполагается, что то, что разумеется под словом «красота», всем известно и понятно. А между тем это не только неизвестно, но... вопрос о том, что такое красота, до сих пор остается совершенно открытым и с каждым новым сочинением по эстетике решается новым способом».

АГЕСАНДР.
Афродита Милосская.
III—II вв. до н. э.
С тех пор как в 1820 г. статуя Венеры была извлечена из земли острова Милос, она олицетворяет вечный идеал красоты.

Для среднего человека кажется ясным и понятным то, что искусство есть проявление красоты; и красотою объясняются для него все вопросы искусства.

Л. Толстой

Что красота есть необходимое условие искусства, что без красоты нет и не может быть искусства — это аксиома.

В. Белинский

Сказано по-толстовски сильно и ясно! Нам остается лишь добавить, что и задолго до нашей эры, и через много лет после смерти Льва Толстого философы, искусствоведы, сами художники и даже математики и физики пытались и пытаются найти пути к решению вопроса о сущности прекрасного[1].

Еще на заре цивилизации, когда человечество постигало мир не в форме рассудочных теорий, а в виде образных картин, о красоте слагались проникновенные предания. Все мифологии (за исключением древнекитайской) рисовали красоту в образе прекрасной женщины. У древних греков это и рожденная из пены морской богиня любви и красоты Афродита, и девять красавиц-муз, покровительниц искусств и наук, и восхитительная Галатея, высеченная из мрамора Пигмалионом.

У древних индусов воплощением красоты была небесная дева Тилоттама — *прекрасная в каждой своей части*, что означало ее имя. Красота созданной из самоцветов Тилоттамы была столь совершенной, что не было в ней ни единой черточки, которая не останавливала бы взор смотрящего на нее. Когда представленная богам Тилоттама обходила со всех сторон собрание небожителей, все боги покорно поворачивали головы вслед за нею. Только царь богов Индра и верховный бог Шива решили воспротивиться чарам Тилоттамы и оставались неподвижными. Но и они оказались бессильными перед волшебством Красоты — с каждым движением Тилоттамы на теле Индры появлялся новый следивший за нею глаз, а у смотревшего на восток Шивы по мере кружения Тилоттамы вырастали лица с южной, западной и северной сторон. Так Индра стал тысячеглазым, а Шива — четырехликим.

Непостижимый по интеллектуальной мощи и силе предвидения прорыв в рассудочном осмыслении красоты сделал древнегреческий математик и философ Пифагор (ок. 570 — ок. 500 гг. до н. э.). *Все прекрасно благодаря числу,* гласил знаменитый пифагорейский тезис. И это было не просто некое философское откровение, каких без счета наговорят еще философы за 2500 лет после Пифагора. Это было первое философское обобщение, основанное на экспериментах со струной монохорда (см. гл. 8). Это было открытие столбовой дороги — *пифагорейской математической традиции* — во взглядах на природу прекрасного, объявлявшей законы красоты объективными, абсолютными, а значит, и математическими. Как Пифагор шагнул из мифологии в современность? Это загадка, которая до сих пор не разгадана.

Но уже младший современник Пифагора Гераклит (ок. 544/540 — ? гг. до н. э.) возразил ему, указав на относительность понятия прекрасного: «Самая прекрасная обезьяна безобразна по сравнению с родом людей». И далее: «Мудрейший из людей по сравнению с богом кажется обезьяной и по мудрости, и по красоте, и во всем прочем». Гераклита поддержал знаменитый Сократ (ок. 470—399 гг. до н. э.), считавший, что «красота вообще есть целесообразность». «Так, и навозная корзина — прекрасный предмет? — спросил ученик Сократа Аристипп. — Да, клянусь Зевсом, — отвечал Сократ. — И золотой щит — предмет безобразный, если для своего назначения первая сделана прекрасно, а второй — дурно».

[1] Слова «прекрасное» и «красота» мы будем употреблять в широком смысле как синонимы.

АПСАРА.
Фрагмент росписи скальной галереи в царской резиденции Сигирия («Львиная скала») на о. Цейлон. *V в.*
Апсарами в ведийской и индуистской мифологии назывались полубожественные небесные танцовщицы при дворе бога Индры. Возможно, это и есть апсара Тилоттама?

Зато ученик Сократа — величайший из философов Платон (427—347 гг. до н. э.) поддержал Пифагора, сказав в диалоге «Филеб», что «умеренность и соразмерность всюду становятся красотой и добродетелью». Хотя Платон жаловался на своего любимого ученика Аристотеля (384—322 гг. до н. э.), что «тот брыкает его, как сосунок-жеребенок мать», во взглядах на природу прекрасного двое величайших из великих не расходились. «А важнейшие виды прекрасного — это слаженность, соразмерность и определенность, математика больше всего и выявляет именно их», — писал Аристотель в своей «Метафизике».

Впрочем, Платон сам выступил против себя в диалоге «Ион», сказав «...поэт — существо легкое, крылатое и священное; и он может творить лишь тогда, когда сделается вдохновенным и исступленным и не будет в нем более рассудка; а пока у человека есть этот дар, он не способен творить и пророчествовать». Какая уж тут объективность прекрасного!

Хотя средневековье и в религии, и в искусстве явилось антиподом античности, оно продолжило в главном пифагорейскую традицию в онтологии[1] красоты. И хотя источник прекрасного просвещенные монахи видели в новом едином Боге, принципы воплощения красоты понимались ими теми же, что и при многоликом пантеоне античных богов. Поэтому неудивительно, что и на рассвете средневековья один из «отцов церкви» Блаженный Августин (354—430) во взглядах на красоту выступил последовательным преемником Пифагора: «Число лежит в основе всякого восприятия красоты». И через 1000 лет, на закате средневековья, «последний схоласт» св. Фома Аквиант (1226—1274) в «Сумме теологии» писал: «...красота заключается в должной пропорции».

И уж вовсе не удивительно, что эпоха Возрождения, провозгласившая себя духовным преемником античности, возродила пифагорейские взгляды на природу прекрасного. С наибольшей ясностью это сделал первый в череде универсальных гениев Возрождения Леон Баттиста Альберти: «Красота есть строгая соразмерная гармония всех частей, объединяемых тем, чему они принадлежат, — такая, что ни прибавить, ни убавить, ни изменить ничего нельзя, не сделав хуже».

Однако то же средневековье выдвинуло и знаменитый принцип *De gustibus non est disputandum — О вкусах не спорят.* И в ту же эпоху Возрождения автор знаменитой утопии «Город Солнца» Томмазо Кампанелла (1568—1639), большинство своих сочинений написавший во время 27-летнего заключения, указывал на относительность прекрасного: «Мелодия, прекрасная на пире, безобразна на похоронах. Желтизна прекрасна в золоте, ибо свидетельствует о его природном достоинстве и совершенстве, но безобразна в нашем глазу, ибо говорит о порче глаза и болезни». И уже в Новое время родоначальник европейского агностицизма (от греч. αγνωστος — недоступный пониманию) Дэвид Юм (1711—1776) неоднократно подчеркивал: «...прекрасное не есть качество, существующее в самих вещах; оно существует исключительно в духе, созерцающем их, и дух каждого человека усматривает иную красоту».

[1] *Онтология* (от греч. οντος — сущее, λογος — слово, учение) — учение о сущем.

МАРКГРАФИНЯ УТА.
Статуя западного хора собора в Наумбурге. *Ок. 1250 г.*
Статуи Наумбургского собора уникальны по силе выразительности и пластики, а трепетный и гордый образ Уты стал воплощением средневекового канона красоты.

ЦАРИЦА НЕФЕРТИТИ.
XIV в. до н. э.

А. МОДИЛЬЯНИ.
Люния Чековска. *1919 г.*
Глядя на эти два портрета, разделенные тремя тысячелетиями, трудно усомниться в объективности и незыблемости законов красоты.

К исходу XX в. череда мнений о природе прекрасного достигла такого объема и такой амплитуды, что собрать их вместе нет никакой возможности. Далеко не все из выдвигаемых формул прекрасного отличались логической стройностью. Укажем, к примеру, на широко известный афоризм Н. Г. Чернышевского (1828—1889) «*Прекрасное есть жизнь*», который, строго говоря, является *тавтологией* (от греч. ταυτο — то же самое и λογος — слово) — определением одного запутанного понятия через другое, не менее запутанное.

Пожалуй, наибольшую мудрость в определении формулы прекрасного проявил человек, всю свою жизнь посвятивший служению красоте, — выдающийся немецкий художник и ученый эпохи Возрождения Альбрехт Дюрер (1471—1528): «Что такое красота — этого я не знаю. Но для себя здесь понимаю красоту таким образом: что в разные человеческие времена большинством почиталось прекрасным, то мы и должны усердно стремиться создавать».

Нам же лучше всего закончить этот беглый обзор онтологии красоты словами Сократа, которыми заканчивается диалог Платона «Гиппий больший»: «...кажется мне, я узнал, что значит пословица «прекрасное — трудно». Вопросы о том, что такое искусство и что такое красота, отнюдь не элементарны. Они порождают лавину вопросов-следствий, распутать которые может только особая наука о прекрасном. Такая наука есть, и название ей — эстетика.

1735 год, год, когда двадцатилетний магистр философии университета в немецком городке Галле Александр Готлиб Баумгартен (1714—1762) опубликовал свой труд «Философские размышления о некоторых вопросах, касающихся поэтических произведений», написанный по-латыни, считается официальным годом рождения эстетики. В своей магистерской диссертации Баумгартен впервые выдвинул идею создания *особой философской науки о законах чувственного познания*, названной им *эстетикой*, что значило *теория чувствования* (напомним греч. αισϑητικος — чувствующий). Разумеется, Баумгартена можно назвать только крестным отцом эстетики, тогда как самое дитя родилось по крайней мере за 3000 лет до своих крестин: многочисленные эстетические фрагменты дошли до нас и из Древнего Египта, и из Шумера и Вавилона, и из Древней Индии, и из Древнего Китая, не говоря уже о Древней Греции, которую с полным правом можно назвать матерью эстетики как философской науки.

Что же подвигло Баумгартена заявить о необходимости создания новой науки? Прежде всего это труды его соотечественника, универсального гения Готфрида Вильгельма Лейбница (1646—1716), точнее, учение Лейбница *о трех основных духовных началах человека: разуме, воле и чувстве*. Соответственно этим трем сферам духа, рассуждал Баумгартен, должны быть и три области философии, изучающие их. Наука о законах движения разума — *логика* (от греч. λογικος — построенный на рассуждении) и наука о нравственных установках воли — *этика* (от греч. ηϑικος — относящийся к нраву) родились еще в Древней Греции, и их отцом по праву назывался Аристотель. А вот науки о духовных построениях чувств до середины XVIII в. не было. И ее отцом назвался Александр Баумгартен.

Но если эстетика есть теория чувствования, то какое отношение она имеет к прекрасному? Каждому знакомо чувство боли, обиды или раздражения — какая уж тут красота? Все просто, эстетику интересует духовная сфера чувствования, эстетика есть не психология, а философия чувствования. И здесь на первый план выступает *чувство прекрасного* — чувствование *особого ценностного качества* «первой» и «второй» природы, именуемого красотой.

Уже древними было замечено, что человек познает мир с помощью органов чувств и осмысливает познанное разумом. Вспомним слова Гектора из гомеровской «Илиады»:

> Твердо ведаю сам, убеждаясь и мыслью и сердцем,
> Будет некогда день, и погибнет священная Троя...

Как видим, уже Гектор осознавал две возможности предвидеть падение Трои, два пути познания мира — *путь мысли* (разум) и *путь сердца* (чувства). И те же древние обратили внимание на то, что самые глубокие духовные чувствования связаны у человека с красотой, с искусством, которое несет людям красоту. Это особого рода чувства, лишенные корыстных побуждений, очищенные от жизненных забот и неурядиц, переносящие человека в иной, сказочный мир — мир прекрасного. В попытках осмыслить эти чувства, понять их первопричину, проникнуть в тайну красоты и найти ее законы и родилась наука эстетика.

Вот почему эстетику часто называют *философией красоты* или *философией искусства*. Так понимал эстетику Георг Гегель, отметив в своих «Лекциях по эстетике», что «ее предметом является обширное царство прекрасного». По существу, так определяет эстетику сегодня и «Британская энциклопедия», подчеркивая, что эстетика есть «ветвь философии, исследующая красоту и ее проявления в искусстве и природе».

Последовавшую за Баумгартеном вторую половину XVIII в. и первую половину XIX в. можно назвать золотым веком эстетики. Величайшие философы Иммануил Кант (1724—1804) и Георг Вильгельм Фридрих Гегель (1770—1831), великие поэты и мыслители Фридрих Шиллер (1759—1805) и Иоганн Вольфганг Гете (1740—1832), философы-романтики Фридрих Шеллинг (1775—1854) и Фридрих Шлегель (1772—1829), наши воинствующие демократы Виссарион Белинский (1811—1848) и Николай Чернышевский — эти и многие другие мыслители внесли свой вклад в новую науку эстетику.

Но золотой век потому и называется веком, что он рано или поздно кончается. В середине XIX в. эстетику потрясает глубокий кризис. В двух словах суть этого кризиса можно сформулировать как *поворот от объекта к субъекту*. Новое поколение философов призвало отказаться от поисков неуловимых объективных законов эстетики и обратиться к субъективным мироощущениям человека. В эстетике восторжествовал дух субъективизма, иррационализма, мистики.

Бурный рост естествознания и техники во второй половине XIX в. углубил кризис эстетики. Необычайный авторитет

А. Муха.
Самаритянка. *1897 г.*
Афиша к спектаклю парижского театра «Ренессанс» с участием Сары Бернар.
В замысловатых извивах локонов Самаритянки — новая геометрия и философия нового искусства «Art nouveau», или стиля модерн.

О. КИСЛЮК. Медуза. *1996 г.* Сотрудник Института математических проблем биологии РАН Олег Кислюк создал формальную систему геометрических грамматик (G-грамматик), способную генерировать пейзажные композиции на компьютере. G-грамматика — это совокупность правил построения и композиции фрактальных структур, таких, как деревья, облака, горы, каменистые равнины. G-грамматики являются стохастическими, т. е. порождаемые ими структуры заранее предсказать невозможно. Компьютерные картины О. Кислюка имеют сходство с классическими китайскими пейзажами, что объясняется свойством фрактальности изображаемых на обоих типах картин объектов. Так что картины за Олега Кислюка рисует компьютер. Но попробуйте научить компьютер рисовать картины!

точных наук; конкретного, *позитивного* знания вызвал недоверие и прямое пренебрежение к умозрительному философствованию. Эстетика стала искать опору не в философии, а в естествознании. Так, трудами немецкого физика и философа Густава Теодора Фехнера (1801—1887) родилась *экспериментальная эстетика*, или *эстетика снизу*, избравшая путь восхождения от конкретных психологических и психофизических опытов к эстетическим обобщениям.

Неудивительно, что в XX в. — веке математизации научного знания — это «точное» направление в эстетике получило дальнейшее развитие. Американский математик Джордж Биркгоф выступил родоначальником *математической эстетики*, немецкий математик Макс Бензе и французский психолог Абраам Моль положили начало *информационной эстетике*, российский биолог Юрий Линник сформулировал основные принципы *космологической эстетики*. В конце XX в. на стыке нейрофизиологии и эстетики рождается новая наука *нейроэстетика*, учитывающая законы функционирования головного мозга человека в формировании наших представлений о красоте. Такое обилие новых «синтетических» эстетик отражает общую тенденцию интеграции научного знания XX в.

Но вернемся еще раз к кризису эстетики Разумеется, истинные причины кризиса заключались не в научно-техническом прогрессе, а в самой эстетике. Истоки этого кризиса можно заметить уже в различии суждений о красоте Пифагора и Гераклита, ибо уже в эмбриональном состоянии эстетику начинает разрывать противоречие между объективным и субъективным. Это противоречие — проблема всей философии, но в эстетике оно проявляется с особой остротой.

В самом деле, если эстетика претендует называться наукой, то она должна искать *объективные законы* духовного чувствования — чувства прекрасного. Но всякое чувство, в том числе и чувство прекрасного, субъективно, и, значит, эстетика должна описывать *субъективные феномены*. Таким образом, можно сказать, что *эстетика есть наука об объективных законах субъективного* — иначе она либо не будет наукой, ибо мысль объективна, либо не будет эстетикой, ибо чувство субъективно.

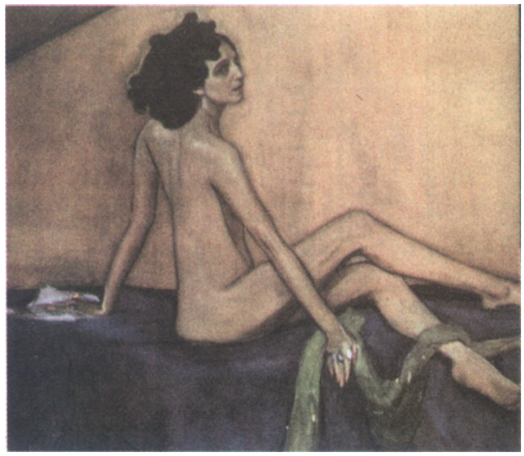
Но *объективные законы субъективного* — достаточно шаткая конструкция. Она легко качается то в одну, то в другую сторону. И это видно даже из нашего беглого обзора взглядов на природу прекрасного. Кризис эстетики в первую очередь был связан с поворотом и философии, и искусства от классицизма к романтизму, от порядка гармонии к беспорядку дисгармонии, от объективного Космоса к субъективному Хаосу. Соотношение Космоса и Хаоса — важнейшая скрытая пружина механизма культуры, и мы недаром начали обсуждение проблемы прекрасного именно с этих понятий.

Итак, и красота, и изучающая ее эстетика имеют *двуединую объективно-субъективную природу*. Каковы объективные законы красоты — этого никто не знает, иначе не было бы и «тайны прекрасного». Однако, начиная с Пифагора, человечество не покидает уверенность в том, что такие законы есть. Более того, кажется ясным, что *истоки законов красоты* *следует искать в форме прекрасного.* Вот мнение по этому поводу двух современных ученых. Наш соотечественник нейрофизиолог и философ академик РАН П. В. Симонов считает: «...тот факт, что великие произведения искусства признаются прекрасными множеством людей на протяжении многих веков (прекрасно то, что нравится всем, как утверждал Кант), побуждает предположить существование каких-то универсальных общезначимых критериев красоты. Одним из таких критериев служит определенное соотношение Хаоса и Порядка». Профессор Осакского университета в Японии Грегори Пауль высказывается еще более определенно: «Точно так же, как существует, по-видимому, всеобщая языковая грамматика, должна существовать и столь же всеобщая *грамматика эстетическая* — в основе обеих должна лежать нейронная организация человеческого мозга».

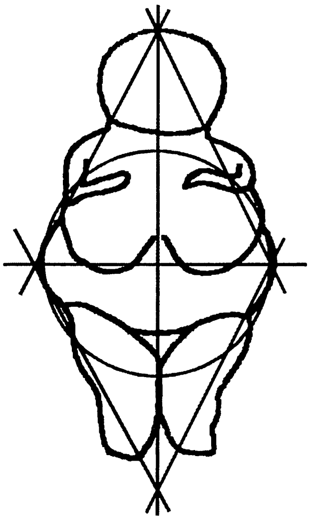
Что касается субъективной стороны красоты, то здесь дело обстоит значительно проще: это та оценка объективной части прекрасного, которая дается субъектом и обществом в целом. Субъективной оценкой и объясняется относительность взглядов на прекрасное как отдельных людей, так и отдельных слоев общества, народов и эпох. Яркий пример субъективизма в оценке красоты дал Н. Г. Чернышевский, заметив, что «полувоздушная» светская красавица не нравится крестьянину, который считает ее просто заморышем, а пышущая здоровьем «русская Венера» не угождает вкусам света. Хотя, конечно, обе они таят в себе некий объективный закон красоты — недаром же мудрые древние изображали красоту непременно в образе женщины.

Так же и в эстетике. Когда она стремится найти объективные законы прекрасного, она заключает союз с математикой, психологией, нейрофизиологией, стремится быть наукой в высоком смысле этого слова. В эти периоды на авансцену выходят такие мыслители, как Пифагор, Платон, Боэций, Леонардо да Винчи, Дюрер, Кант, Гегель, Раушенбах. Но это объективное направление в эстетике отнюдь не в состоянии исчерпать всех сокровищ «обширного царства прекрасного». И тогда вперед выдвигается субъективная сфера эстетики, несущая философские откровения, исповедальные повествования и просто художественные произведения. В этих залах эстетики мы снова видим Платона и Канта, но здесь появляются Протагор и Плотин, Шопенгауэр и Кьеркегор, Гете и Вольтер, Пушкин и Достоевский. И снова за дополнительностью объективного и субъективного начал в эстетике видится дополнительность первоначал Инь-Янъ в мудром древнекитайском символе Тайцзи.

И все-таки — что есть красота? Этого мы не знаем. Но, говоря словами Дюрера, «для себя здесь» мы будем понимать красоту как *восхождение от чувственно воспринимаемой ценностно-значимой формы к мысленно воображаемому идеалу.* Не всякая, а только ценностно-значимая — красивая — форма задает нам первый импульс, положительную эмоцию (красота, утверждает П. В. Симонов, — это прежде всего переживание, эмоция, причем эмоция положительная), «притягивает» нас к себе, вызывает у нас, говоря словами Канта, «бескорыстное



В. СЕРОВ.
Портрет Иды Рубинштейн.
1910 г. (вверху).
Б. КУСТОДИЕВ.
Красавица.
1915 г. (внизу).
Предоставляем читателю возможность выбора: последовать Чернышевскому или пойти своим путем в субъективной оценке объективного феномена женской красоты.



ВИЛЛЕНДОРФСКАЯ ВЕНЕРА. Виллендорф. Австрия. *Верхний палеолит. Граветский период. Ок. XXVI тыс. до н. э.*
Виллендорфская Венера не так уж проста. Ее туловище вписано в окружность, а верхняя и нижняя половины тела — в равные равнобедренные треугольники, образующие ромб с острым углом 58°. От Моны Лизы Леонардо да Винчи, композиция которой также основана на ромбе с острым углом 36°, Виллендорфскую Венеру отличает только величина угла. Но как важна эта величина для пропорций женского тела!

наслаждение». Без этого первого импульса красота и искусство невозможны. Ценностно-значимые природные формы (пейзажи, лица, цветы, кристаллы, снежинки), равно как и вторящие им ценностно-значимые формы искусства, по-видимому, и таят в себе объективные законы прекрасного. Одним из доказательств тому служит частое структурное тождество форм «первой» и «второй» природы.

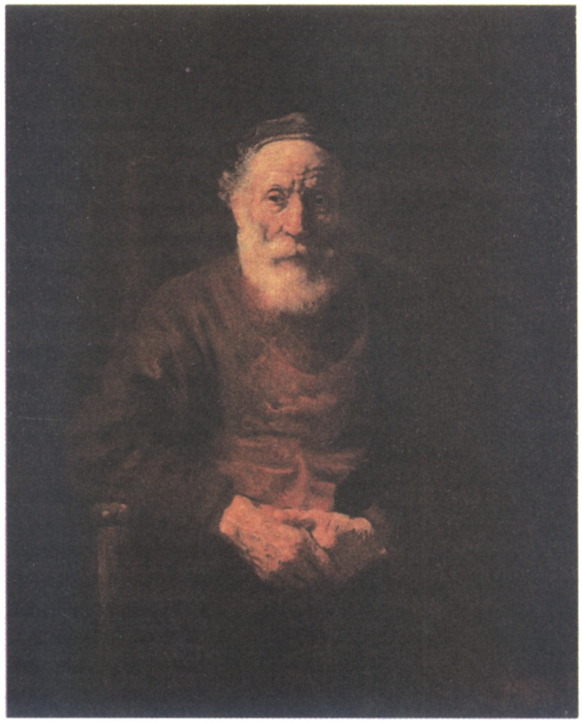
Затем первый чувственный, эмоциональный импульс осмысляется, оценивается нами, сравнивается с тем идеалом — совершенной конструкцией, которую мы можем вообразить себе на этом месте. Происходит наполнение формы содержанием. Этот второй этап, очевидно, и отличает процессы восприятия красоты человеком и животными (то, что животные не лишены «чувства прекрасного», заметил еще Чарлз Дарвин и подтверждают современные опыты). На втором этапе постижения красоты на передний план выступает та совокупность субъективных представлений, тот идеал, который сформировался у каждого индивида в меру его собственных духовных сил и под влиянием той социальной группы, культуры, эпохи, к которой он принадлежит.

Идеал — наиболее содержательное понятие эстетики. Это первообраз красоты в нашем сознании, всеполнота прекрасного. Знаменитое триединство *истины, добра* и *красоты* — это три ипостаси идеала. Красота является связующим звеном между истиной и добром. Во все времена красота являлась путеводной звездой в поисках истины, мощным стимулом к научному творчеству и научным озарениям. С другой стороны, во все времена красота обращала человека к добру. Именно это свойство красоты нашло отражение в знаменитой формуле Достоевского «Красота спасет мир».

Свое воплощение эстетический идеал находит в искусстве. Ни природа, ни общество часто не дают человеку его эстетического идеала. Великий Рафаэль признавался: «Я скажу вам, что для того, чтобы написать красавицу, мне надо видеть много красавиц... Но ввиду недостатка как в хороших судьях, так и в красивых женщинах я пользуюсь некоторой идеей, которая приходит мне на ум». Ясно, что идея, о которой говорит Рафаэль, и есть эстетический идеал художника. Так *ценностно-значимая форма через эстетический идеал приводит нас к искусству.* Именно это и имел в виду Лев Толстой, когда говорил, что для среднего человека искусство есть проявление красоты.

Да, вне красоты нет искусства. Но искусство — особая область прекрасного. В жизни прекрасное нередко уживается с безобразным, и истинное искусство — «учебник жизни» — не может ограничить себя одною лишь красотой. Художник не имеет права ни брезгливо отворачиваться, ни трусливо сдаваться перед безобразным. Победа над безобразным — одно из средств утверждения красоты. Мастерство и эстетическое осуждение безобразного ведут художника к красоте. Вот почему образы искусства прекрасны всегда, даже если они рисуют истерзанные жизненными невзгодами, изможденные лица стариков на полотнах Рембрандта. Хорошо сказал об этом французский скульптор Огюст Роден (1840—1917): «Но стоит

РАФАЭЛЬ. Мадонна со щегленком. *1507 г. Деталь.*



РЕМБРАНДТ.
Портрет старика в красном. *1652—1654 гг.*
В изможденном лице и натруженных руках старца — красота и мудрость прожитой им жизни.

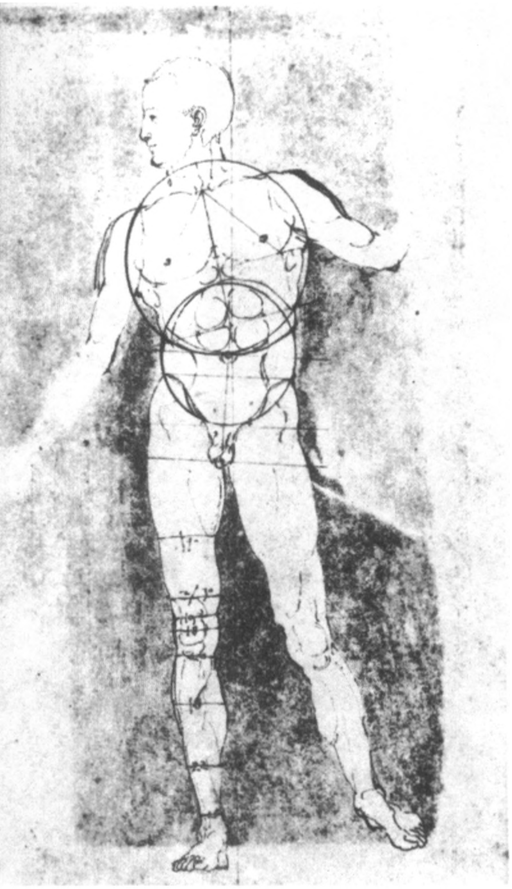
великому артисту или великому писателю прикоснуться к какому-нибудь безобразию, чтобы оно мгновенно преобразилось. Ударом волшебного жезла безобразное превращается в красоту: это алхимия, это колдовство!»

Итак, *восхождение от ценностно-значимой формы к стоящему за ней идеалу* — вот путь постижения красоты. По существу, таково мнение большинства наших ведущих эстетиков. Такую концепцию красоты излагает А. В. Гулыга в книге «Принципы прекрасного». Фактически тот же принцип прекрасного исповедует и М. С. Каган, который в своей работе «Эстетика как философская наука» утверждает: «Общий закон прекрасного — *соответствие реального идеальному*». Наконец, само название итоговой книги Е. Г. Яковлева «Эстетическое как совершенное» говорит о том же пути автора к эстетическому (красоте) через совершенное (идеал).

Однако эстетика не была бы эстетикой, если бы в ней все было гладко. Скажем, тот же Каган страницей ранее пишет: «Неудивительно, что тщетными были попытки великого скульптора Поликлета, воспитанного на пифагорейской эстетике, или замечательного немецкого художника А. Дюрера, воплощавшего эстетические представления эпохи Возрождения, или крупнейшего архитектора XX в. французского зодчего Ле Корбюзье, или ученого и писателя-фантаста И. Ефремова найти такие пропорции, структуры, формы человеческого тела, которые были бы *абсолютным законом* кра-

Кеплер говорит: "Geometria est archetypus pulchritudinis mundi", — то есть, если перевести его слова более обобщенными терминами: «Математика есть прообраз красоты мира».
В. Гейнзберг

Феномен красоты содержит в себе некоторую тайну, постигаемую лишь интуитивно и недоступную дискурсивному мышлению.
А. Гулыга



А. ДЮРЕР. Геометрическое построение фигуры Адама. *Эскиз к гравюре на меди «Адам и Ева». 1504 г.*
Художник и ученый Альбрехт Дюрер, безусловно, был самым большим знатоком пропорций мужского и женского тела во всей истории искусств.

соты». С этим мы категорически не согласны: абсолютные законы вообще существуют на небе, а объективные — на земле. И творчество этих великих — лучшее тому доказательство. Заметим кстати, что философия красоты наших эстетиков, вынужденных совсем недавно называть себя марксистско-ленинскими, сильно перекликается с философией Платона о соответствии реального, земного объекта его ирреальной, небесной идее. Так что учение Платона живо, потому что оно верно[1].

И последнее — ради чего и писалась эта глава книги. Как только мы признаем, что у красоты есть ценностно-значимая форма, живущая по объективным законам, так следующим шагом мы приходим к тому, что эта форма может быть изучена методами математики. Будет ли это математика Порядка или математика Хаоса — это уже второй вопрос, но это будет математика формы. Здесь уместно вспомнить высказывание выдающегося французского математика Анри Пуанкаре (1854—1912): «Математиков занимают не предметы, а отношения между ними... Содержание их не волнует, они интересуются только *формой*». Действительно, в следующих четырех частях книги мы увидим, например, что закон золотого сечения имеет место и в музыке, и в архитектуре, и в живописи, и в литературе. Это структурно-математическая характеристика, которая определяет форму прекрасного независимо от того содержания, которое несет эта форма.

Да, нелегко раскрыть сущность прекрасного. И в природе, и в искусстве проявления красоты необычайно разнообразны. Недаром еще Платон говорил о том, как легко отыскать примеры прекрасного и как трудно объяснить, почему они прекрасны. Еще труднее найти математические закономерности в прекрасном — законы красоты. Попытки отыскать таковые предпринимались с древности. Пифагор, Поликлет, Боэций, Леонардо да Винчи, Дюрер, Кеплер — какие имена! И несмотря на весьма скромные результаты, энтузиазм исследователей не ослабевает и сегодня: ведь слишком волнующа тема их интереса — красота. И сегодня вместе с лауреатом Нобелевской премии, немецким физиком Вернером Гейзенбергом (1901—1976) большинство ученых верят: «Математика есть прообраз красоты мира».

В сентябре 1997 г. в очаровательном старинном русском городе Суздале, когда золото осени смешивается с золотом куполов, впервые в России была проведена Международная междисциплинарная конференция «Математика и искусство». Конференция собрала многих ученых самых разных научных ориентаций из самых разных регионов — от Америки, Австралии и Японии до самых далеких городов России. Нам приятно верить в то, что название конференции было навеяно первым изданием нашей книги. Скорее всего, это и не так, но в любом случае ясно: *XXI век будет веком союза математики и искусства.*

Но отводить математике роль только служанки искусства и красоты — значит сильно обеднять и обижать математику. Математика является неиссякаемым источником прекрасного в науке. Но об этом — в следующей главе.

[1] Юному читателю, конечно, уже незнакома ключевая фраза Ленина: «Учение Маркса всесильно, так как оно верно», определявшая 70-летний период развития советской философии. Вот так, «и никаких гвоздей», как говорил другой советский классик, другой Владимир — Маяковский.

3.
МАТЕМАТИКА: ПРЕКРАСНОЕ В НАУКЕ

Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой — красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства.

Б. РАССЕЛ

Французский энциклопедический словарь Ларусс определяет прекрасное как то, что *радует глаз или разум.* Просто и ясно — недаром у французов есть пословица: что не ясно, то не по-французски. Не будем обсуждать достоинства и недостатки еще одного определения красоты, а обратим внимание на вторую часть определения, на то, что *красота радует разум.* Да, кроме красоты, постигаемой чувствами, есть и другая красота, познаваемая разумом. Это особый вид красоты — красота истины, красота науки.

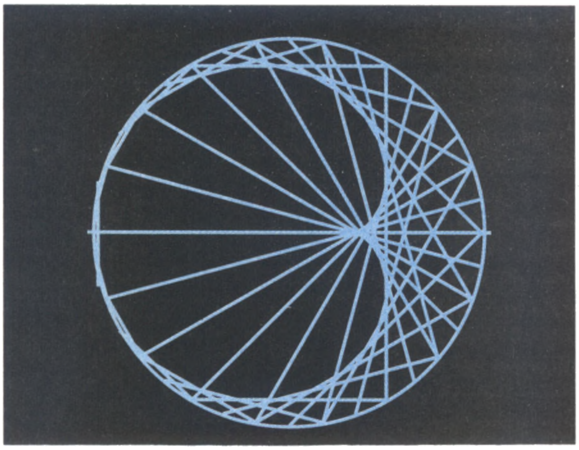
Поистине удивительно, что и это тонкое отличие чувственной и рациональной красоты заметили мудрые древние. Уже в Библии проводится различие между двумя типами красоты — красоты чувства и красоты разума. Для каждой красоты Библия находит свое слово: слово «hen» обозначало красоту видимого осязаемого мира, красоту чувства, а слово «hadar» — красоту невидимого божественного духа, красоту разума. И снова «hen» и «hadar» в древнееврейской Библии дополняют друг друга, как Инь и Янъ невозможны друг без друга в древнекитайском трактате «Дао дэ цзин».

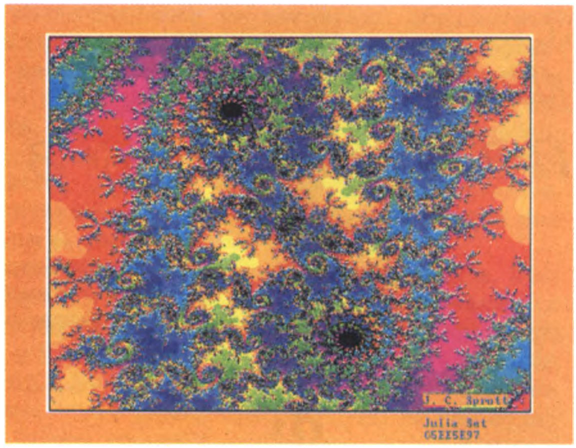
После Библии встреча с той же идеей восхождения от красоты чувства к красоте разума в диалогах Платона кажется уже вполне естественной. В диалоге Платона «Пир» мы читаем о том, как «беременный духовно» (т. е. человек, отягощенный бременем идеи, духовной ношей) «ищет везде прекрасное, в котором он мог бы разрешиться от бремени». Платон взволнованно говорит о том, как происходит восхождение от красоты тела к красоте души и далее к высшей красоте, когда человек в состоянии «повернуть к открытому морю красоты и, созерцая его в неуклонном стремлении к мудрости, обильно рождать великолепные речи и мысли».

«...Начав с отдельных проявлений прекрасного, надо все время, словно бы по ступенькам, подниматься ради самого прекрасного вверх — от одного прекрасного тела к двум, от двух — ко всем, а затем от прекрасных тел к прекрасным нравам, а от прекрасных нравов к прекрасным учениям, пока не поднимешься от этих учений к тому, которое и есть учение о самом прекрасном, и не познаешь наконец, что же это — прекрасное. И в созерцании прекрасного самого по себе... только и может жить человек...»

Кто, наставляемый на пути любви, будет в правильном порядке созерцать прекрасное, тот, достигнув конца этого пути, вдруг увидит нечто удивительно прекрасное по природе... Он увидит прежде всего, что прекрасное существует вечно, что оно не возникает, не уничтожается, не увеличивается, не убывает...

Платон





Кардиоида как огибающая семейства прямых линий. Строгая красота Космоса евклидовой геометрии *(слева)*.
К. СПРОТТ.
Вариации на тему множеств Жюлиа *(справа)*.
Американский физик Жюльен Клинтон Спротт создал «Галерею фракталов», одним из «залов» которой является компьютерная программа, непрерывно рисующая бесконечное многообразие множеств Жюлиа (см. гл. 5). Математика построения множеств Жюлиа проста, как теорема Пифагора, и на первый план выступают художественные задачи, связанные с подбором цветовой гаммы компьютерных картин. С этими задачами Спротт справился блестяще.

Слова Платона — вдохновенный гимн торжеству разума, стремлению к прекрасному, которое неотделимо от научного творчества. Раздумья о величии духа и красоте истины никогда не оставляли человека. И через два с половиной тысячелетия, как бы открывая «век науки», в унисон Платону звучат слова М. Горького: «Наука — высший разум человечества, это солнце, которое человек создал из плоти и крови своей, создал и зажег перед собою для того, чтобы осветить тьму своей тяжелой жизни, чтобы найти из нее выход к свободе, справедливости и красоте».

В чем же заключается красота науки? И если таковая существует, есть ли *эстетика науки*, изучающая законы этой красоты? Как самостоятельной дисциплины эстетики науки нет — мысли о красоте науки, как говорят, только витают в воздухе. Иногда они оседают на бумаге в виде небольших философских заметок, но систематическому анализу практически не подвергались. Почему? Да просто потому, что великим ученым, которым и «дано» по-настоящему ощутить красоту науки, просто некогда любоваться ею и петь ей серенады. Ведь научный поиск — это беспрерывное восхождение к истине, постоянная работа разума на пределе сил и возможностей, работа, не терпящая расслабления и отдыха. Так альпинисты на восхождении к вершине лишь на мгновение останавливаются, пораженные красотой и величием гор. Останавливаются, молча вытирают со лба струи соленого пота и вновь устремляются к вершине, не имея возможности на безмятежное наслаждение красотой.

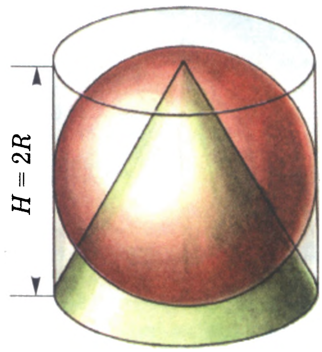
И тем не менее в богатой истории мировой культуры находились люди, бравшие на себя смелость заняться анализом красоты науки. В их числе следует назвать Фрэнсиса Хатчесона (1694—1747), шотландского философа эпохи Просвещения, автора «Исследования о происхождении наших идей красоты и добродетели в двух трактатах». Для нас наибольший интерес представляет раздел «О красоте теорем» первого трактата Хатчесона «О красоте, порядке, гармонии, целесообразности», начинающийся словами: «Красота *теорем*, или доказательств правильности всеобщих истин, заслуживает отдельного рассмотрения, поскольку по природе своей она значительно отличается от ранее рассмотренных видов *красоты*; и, однако, нет такой другой, в которой мы могли бы увидеть такое поразительное *разнообразие* при *единообразии...*»

Читая раздел «О красоте теорем», можно выделить *три признака красоты науки*, установленные Хатчесоном: 1) красота есть единство в многообразии; 2) красота заключена во всеобщности научных истин; 3) научная красота — это обретение неочевидной истины.

Принцип единства в многообразии Хатчесон считает универсальным эстетическим принципом, равно применимым и к неживой, и к живой природе, и к эстетической оценке науки. Действительно, любая математическая теорема содержит в себе бесчисленное множество истин, справедливых для каждого конкретного объекта, но в то же время все эти конкретные истины собраны в единой общей для всех истине — теореме. Например, теорема Пифагора справедлива для бесконечного множества конкретных прямоугольных треугольников, но все это многообразие треугольников обладает единым общим свойством, описываемым теоремой. Каждый школьник конечно же испытал чувство радости, чувство научной красоты, когда впервые обнаружил, что переместительное свойство сложения, замеченное им на множестве конкретных арифметических примеров, есть не что иное, как единый универсальный закон алгебры: $a + b = b + a$, справедливый для любых чисел.

Перейдем ко второму признаку красоты — всеобщности научных истин. «У теорем, — читаем мы у Хатчесона, — есть еще одна красота, которую нельзя обойти и которая состоит в том, что одна теорема может содержать огромное множество следствий, которые легко из нее выводятся... Когда исследуют природу, подобной красотой обладает познание определенных великих принципов или всеобщих сил, из которых вытекают бесчисленные следствия. Таково тяготение в схеме сэра Исаака Ньютона... И мы наслаждаемся этим удовольствием, даже если у нас нет никаких перспектив на получение какой-либо иной выгоды от такого способа дедукции, кроме непосредственного удовольствия от созерцания красоты». Как точно сказано! И как чутко предвидит Хатчесон в 1725 г. могущество закона тяготения Ньютона, который пока еще называется «схемой Ньютона»: ведь прошло только 38 лет со дня его опубликования в 1687 г. в гениальном сочинении Ньютона «Математические начала натуральной философии» — срок не столь уж большой для осознания столь грандиозного открытия.

Каждый может проиллюстрировать мысль Хатчесона о всеобщности научных истин своими примерами: в математике — это любая из теорем, например теорема Виета, в физике — законы механики Ньютона или законы электромагнетизма, в химии — периодический закон Менделеева, в биологии — законы генетики. Возвращаясь к теореме Пифагора, заметим, что существование около 500 различных доказательств теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т. д.) свидетельствует об огромном многообразии следствий из этой единой теоремы.



$V_ц = 2\pi R^3$

$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$

$V_к = \frac{2}{3}\pi R^3$

$V_ц : V_ш : V_к = 3 : 2 : 1$

Вселенная своей неизмеримой громадностью, безграничным разнообразием и красотой, которые сияют в ней со всех сторон, повергает дух в немое удивление.

И. Кант

Две вещи наполняют душу всегда новым и все более сильным удивлением и благоговением... — это звездное небо надо мной и моральный закон во мне.

И. Кант

Наконец, третий признак — обретение неочевидной истины. Согласимся, что постижение очевидной истины (ее символом стало: дважды два — четыре) не доставляет эстетического наслаждения. Поэтому немного красоты мы находим в очевидных аксиомах и несложных теоремах, истинность которых видна «невооруженным глазом». Только открытие истин, спрятанных от нас наукой или природой, открытие, требующее поиска и усилий, доставляет нам в конце пути истинное наслаждение — познание неведомой истины. В этом и состоит радость и красота познания.

Свои рассуждения Хатчесон подтверждает интересным примером. Ясно, что объем цилиндра больше объема вписанного в него шара, объем которого больше объема конуса, вписанного в цилиндр. Это очевидная истина, не приносящая нам никакого удовлетворения. Но когда мы установим, что объемы этих тел относятся как $3:2:1$, т. е. когда мы обретем неочевидную истину, мы почувствуем, как прекрасна эта теорема, какова радость ее первого открытия. Напомним, что первая часть этой теоремы, связывающая объемы цилиндра и вписанного в него шара, была доказана Архимедом и почиталась им как лучшее из всех своих замечательных открытий.

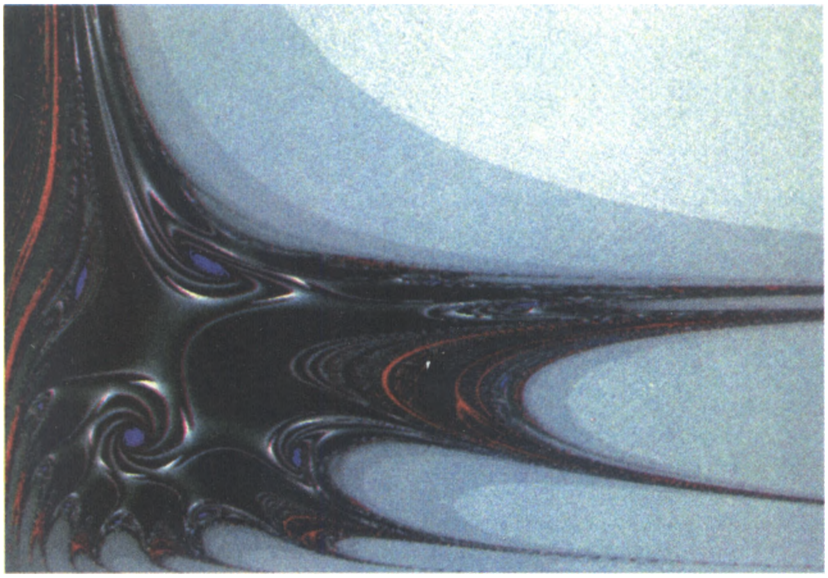
В заключение Хатчесон делает важный вывод: *красота науки неравнозначна научному знанию.* Красота науки заключается не в собрании застывших законов, а в обретении новых знаний, в открытии новых истин, в обнаружении стройности и порядка там, где еще недавно царил хаос. Так что мы можем вновь заключить, что *переход от Хаоса к Космосу* есть также и формула прекрасного в науке.

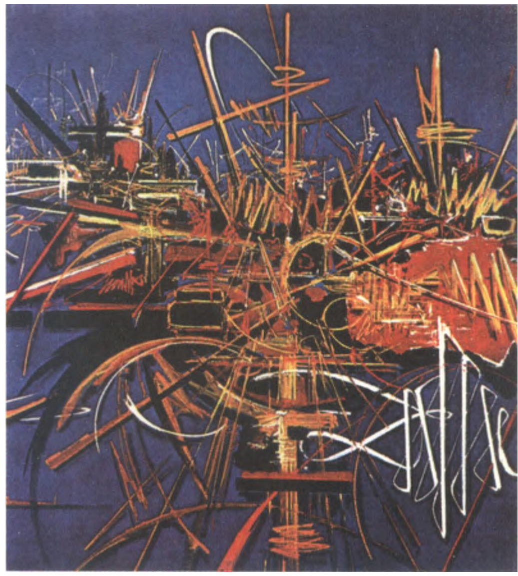
Отметим еще одно существенное обстоятельство. Ясно, что все три выведенных Хатчесоном эстетических принципа справедливы для любой науки, но получены им для математики. И дело здесь не в том, что остальные науки во времена Хатчесона были еще недостаточно развиты по сравнению с математикой. Дело в том, что в науке математика во все времена была и остается «первой красавицей», а значит, эстетические принципы науки наиболее ярко проявляются в математике. Чуть позже мы попытаемся обосновать эту мысль.

Хатчесон оказал заметное влияние на формирование эстетических взглядов последующих философов — Дэвида Юма и Адама Смита. Мысль Хатчесона о красоте единства в многообразии мы находим и в трудах родоначальника немецкой классической философии, «кенигсбергского затворника»[1] Иммануила Канта (1724—1804). В книге «Естественная история и теория неба» Кант признается в том, что космогонические проблемы для него являются не только предметом научных исследований, но и источником светлой радости. Многие строки этой книги представляют собой непревзойденные образцы вдохновенных научных стихотворений в прозе, вечный, немеркнущий сплав логики науки и поэзии искусства. Подобной силы союз науки и искусства достигал только в философской поэме «О природе вещей» римлянина Лукреция (I в. до н. э.).

Но перенесемся из XVIII века в век XX. В 1931 г. в Москве вышла в свет небольшая книга драматурга и искусствоведа

[1] Кант безвыездно прожил 80 лет в родном Кенигсберге (ныне Калининград), учился в Кенигсбергском университете, затем стал его профессором, читал в нем не только курсы философии, эстетики, истории, филологии, но и математики, физики, астрономии, космогонии и даже фортификации. Всю свою жизнь этот «всеобъемлющий гений» посвятил науке, отказавшись от личной жизни и даже от поездок в другие города.





Сложная картина взаимоотношений хищника и жертвы, раскрывающаяся при решении задачи «хищник — жертва» *(слева).*
Ж. МАТЬЕ.
Париж — столица искусств. *1965 г. (справа).*
Кажущийся хаос картин французского художника Жоржа Матье (1921—1973) на самом деле глубоко структурирован. Вариации «детерминированного хаоса» Матье повторяются в разных полотнах с удивительным постоянством и напоминают решение задачи «хищник — жертва».

В. М. Волькенштейна «Опыт современной эстетики». Авторское введение живо рисует дух того времени: «...автор ищет прежде всего определение той новой красоты, которая характеризует нашу бурную эпоху... Эта новая красота перед нами в еще невиданных произведениях искусства, в удивительных изобретениях техники, в новых методах мышления...»

Только в то романтическое время, которое уже через пять лет обернулось невиданным кровавым террором, можно было позволить себе отождествлять новую власть с новыми методами мышления. Слава Богу, перед сознанием индивида любая власть бессильна, хотя с успехом может манипулировать сознанием толпы. Но не будем об этом, тем более что по существу автора интересовали более глубокие и непреходящие вопросы: можно ли распространить понятия эстетики на область мышления? Почему ученые беспрестанно говорят о красивых доказательствах и изящных решениях? Что общего между красотою науки и красотою искусства?

Стремясь дать новое определение прекрасного, Волькенштейн формулирует три признака красоты науки: 1) эстетическое впечатление возникает только в связи с целесообразным, трудным преодолением; 2) красиво сведение сложности к простоте; 3) всякое математическое оформление научных достижений, если оно наглядно и гармонично, вызывает эстетическое впечатление.

Легко видеть, что формула *красота есть целесообразное, трудное преодоление* по существу повторяет формулу Хатчесона *красота есть обретение неочевидной истины.* Да, красивая истина требует трудного восхождения к ней. И как вознаграждение в конце пути ожидает ученого красота открывающейся истины. Альберт Эйнштейн (1879—1955) любил повторять, что *Бог изощрен, но не злонамерен* — эта надпись была сделана у Эйнштейна на камине. Как истинный естествоиспытатель, под Богом Эйнштейн понимал Природу. Изощренность Природы состоит в том, что она столь ловко скрывает от человека свои законы, что их внешнее проявление выглядит поначалу как полный хаос. Незлонамеренность же Природы означает существование у Нее объективных законов и принципиальную возможность их обнаружения в конце целесообразного и трудного преодоления. Познание гармонии Природы, когда лишнее и кажущееся отпадает, когда истина обретает ясность и простоту, и есть высшая мудрость научного поиска.

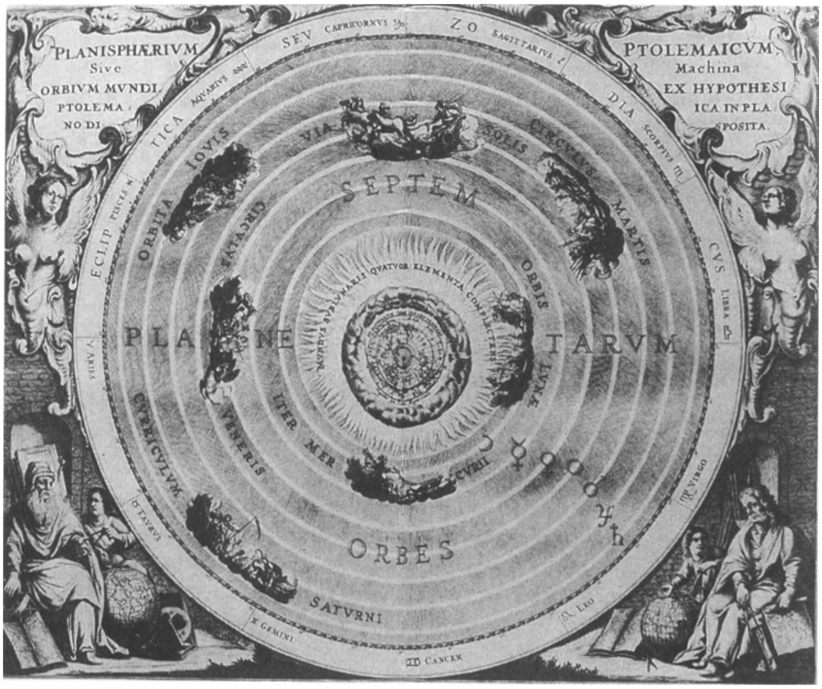
Красиво сведение сложности к простоте. Этот тезис также перекликается с формулой Хатчесона *красота есть единство в многообразии*, ибо нахождение единства в многообразии и есть сведение сложности к простоте. Однако этот принцип столь важен для понимания красоты науки, что он заслуживает самостоятельной формулировки. Внутренняя простота законов, стоящая за внешней сложностью явлений, по-видимому, является только внешним отражением внутреннего устройства самого Мироздания. По крайней мере в это верят все великие естествоиспытатели. «Бог ни за что не упустил бы возможности сделать Природу такой простой»,— любил повторять Альберт Эйнштейн. Другой выдающийся соотечественник Эйнштейна Вернер Гейзенберг в одной из своих работ писал: «Все еще может считаться лучшим критерием корректности новых концепций старая латинская пословица *Simplex sigillum veri (Простота — признак истинности)*, которая была выведена большими буквами в физической аудитории Геттингенского университета».

В родстве со всем, что есть, уверясь
И знаясь с будущим в быту,
Нельзя не впасть к концу, как в ересь,
В неслыханную простоту...

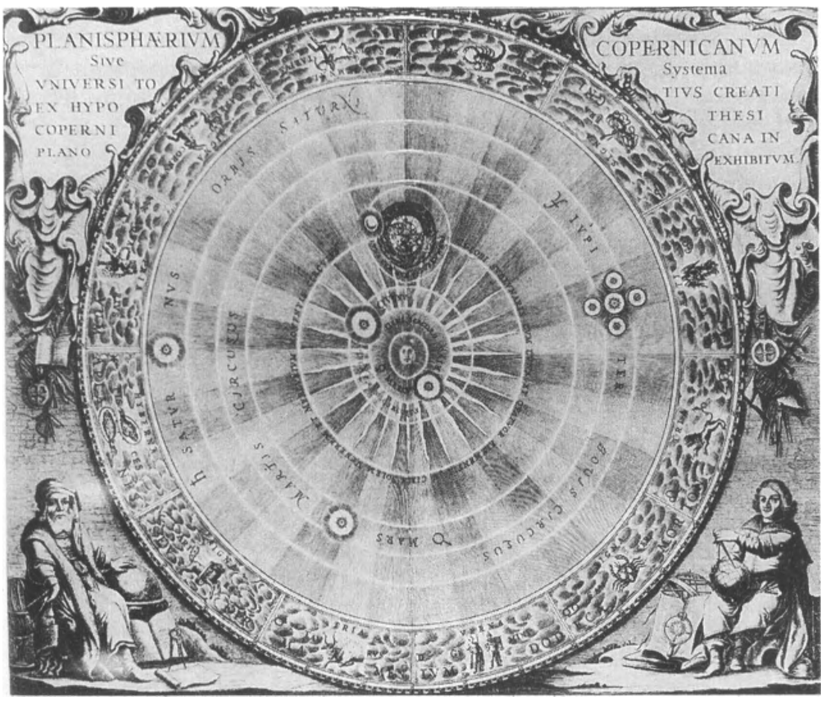
(Б. Пастернак)

Блестящим примером торжества простоты в науке является развитие взглядов человечества на устройство Мироздания. Первой научной моделью Вселенной была геоцентрическая система великого александрийского ученого Клавдия Птолемея (II в.). Для своего времени это была красивая теория, так как она объясняла сложное и непонятное блуждание планет на небосводе (греч. πλανητης — блуждающий) достаточно простым образом — вращением планет вокруг Земли по основным кругам (деферентам) и вспомогательным кругам (эпициклам). Кроме того, теория Птолемея могла предсказывать положение планет на небосводе и ею с успехом пользовались мореплаватели более 1000 лет. Однако гелиоцентрическая система Николая Коперника (1473—1543) позволяла гораздо проще объяснять суть истинного движения планет относительно неподвижных звезд, она не нуждалась в эпициклах и как более простая научная теория была более красивой[1]. Законы Иоганна Кеплера (1571—1630) уточнили систему Коперника и придали ей математическую строгость, а Исаак Ньютон (1643—1727), в свою очередь, показал, что законы

[1] За многие века система Птолемея была настолько хорошо разработана, что ею продолжали пользоваться и после Коперника. Ведь система Коперника, до тех пор пока она не подверглась математической обработке и ряду уточнений, имела только мировоззренческое значение.

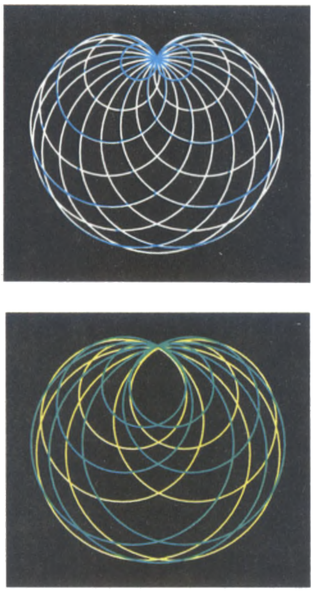


СИСТЕМА МИРА ПО ПТОЛЕМЕЮ. *Иллюстрация из «Небесного атласа» Целлариуса. Амстердам. 1708 г.*



СИСТЕМА МИРА ПО КОПЕРНИКУ. *Иллюстрация из «Небесного атласа» Целлариуса.*

По сравнению с гелиоцентрической моделью Птолемея это была более простая и более красивая научная теория.



Два вида улитки Паскаля как огибающей семейства окружностей. Рождение из семейства окружностей новой формы.

Кеплера являются логическим следствием законов механики и закона тяготения. Законы Ньютона являются вершиной красоты и простоты в научном описании Солнечной системы. А на очереди стоят тайны устройства Вселенной... Таким образом, эстетическая ценность науки непрерывно возрастает. Каждая новая, более простая теория воспринимается как более красивая.

Всякое математическое описание красиво. Строго говоря, это положение является следствием предыдущего — *красиво сведение сложности к простоте*, ибо математика и есть тот инструмент науки, который сложное и многообразное делает простым и единообразным. Отсюда особая роль математики в науке и ее особый эстетический статус. Математика дает необычайно компактный, бесконечно емкий способ выражения научных истин. Десятки страниц научного текста вмещает в себя простенькая с виду математическая формула. И в этом ее утонченная красота и изящество.

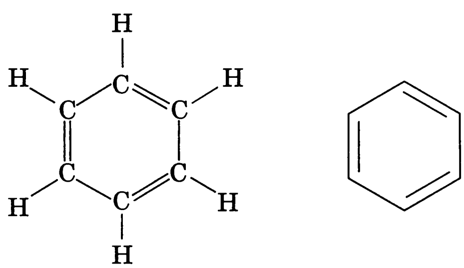
Известно, какой эстетический восторг испытывал выдающийся немецкий физик Людвиг Больцман (1844—1906) при виде уравнений Максвелла: «Не Бог ли начертал эти письмена?!» Мы позволим себе привести здесь эти уравнения без всяких пояснений, просто как *письмена* — красивые, но непонятные иероглифы:

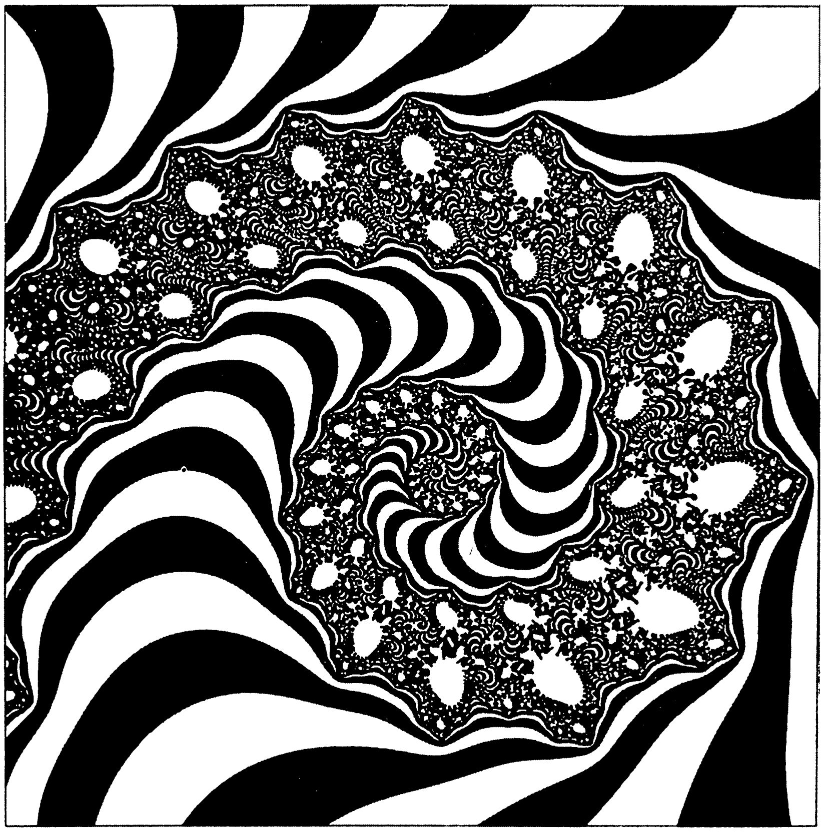
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\,\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},\qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},$$

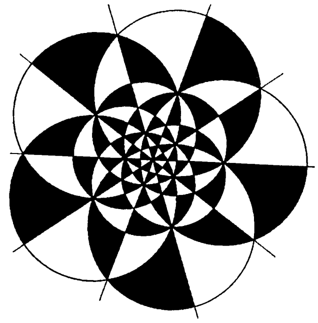
$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho.$$

Что же восхищало Больцмана в этих уравнениях? Конечно, и красота формы, которую можно оценить, не понимая сути содержания. В самом деле, уравнения просты, но непонятны; они попарно похожи, но неодинаковы; пары $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ в уравнениях почти равноправны, но не взаимозаменяемы. Но главное, конечно, в красоте содержания уравнений, которая открывается далеко не каждому. Надо было быть Джеймсом Клерком Максвеллом (1831—1879), чтобы разглядеть в этой красоте идею электромагнитных волн, связавшую воедино электричество, магнетизм и свет.

Более доступным примером красоты формы и содержания в науке, а также красоты математического оформления являются структурные формулы в химии, в особенности структурная формула бензола C_6H_6 как основа многих формул органической химии:







Черно-белые фракталы также красивы — и очень простые (*справа*), и очень сложные (*слева*).

Своей внешней красотой формула бензола обязана правильному шестиугольнику — геометрической фигуре, обладающей многими видами симметрии. Но за внешней красотой скрывается и красота внутренняя. В чем она? В том, что структурная формула отражает взаимное расположение атомов в молекуле и порядок связи между ними. Таким образом, структурная формула определяет свойства вещества, объясняет внутреннее строение вещества, и в этом ее внутренняя красота, красота содержания.

Подведем некоторые итоги. Легко заметить, что за 200 лет Волькенштейн недалеко ушел от Хатчесона в формулировке основных принципов эстетики науки. Но и Хатчесон за 2000 лет немногим превзошел Аристотеля, который первым сформулировал принцип единства в многообразии. Философия вообще сильна не новыми идеями, а новым осмыслением старых — «вечных» — истин. Одной из таких истин, безусловно, является принцип единства в многообразии.

Но если посмотреть на принцип единства в многообразии сквозь призму первой главы, то и он покажется только частным случаем другого, более общего принципа — *обретения Космоса из Хаоса*. Именно этот принцип исповедовали все Боги при сотворении мира. Недаром каждый день творения, каждый свой новый шаг в созидании Космоса из Хаоса библейский Бог заканчивал словами: *это хорошо*. Эти слова — первая в истории мировой культуры эстетическая оценка принципа обретения Космоса из Хаоса, который в равной мере определяет и бытие мироздания, и бытие культуры, и эстетику науки.

Итак, рассмотрение «вечных» философских истин в свете новых научных открытий, по-видимому, есть более скорый путь к пониманию эстетики науки, нежели попытки формулировать новые философские принципы. Особых успехов в обретении Космоса из Хаоса достигла в XX в. физика, поэтому неудивительно, что именно физики в наше время чаще других размышляют о красоте науки.

Пожалуй, пальму первенства здесь следует отдать академику А. Б. Мигдалу — физику-теоретику, основоположнику многих научных направлений в ядерной физике. Будучи необычайно разносторонним человеком (увы, не так давно Аркадий Бейнусович скончался), Мигдал находил время и на интенсивную научную и организаторскую деятельность, и на занятия альпинизмом и горными лыжами. В статье Мигдала «О красоте науки» мы читаем: «Что можно сказать о красоте науки, красоте мысленных построений, которых не нарисовать на бумаге, не высечь на камне, не переложить на музыку? Красота науки, как и красота искусства, определяется ощущением соразмерности и взаимосвязанности частей, образующих целое, и отражает гармонию окружающего мира».

И снова мы наблюдаем знакомую картину. Там, где Мигдал пытается дать философское определение красоты науки, он вторит древним философам. В самом деле, данное Мигдалом определение красоты науки по существу повторяет определение гармонии Гераклита. Поэтому наиболее интересные мысли о красоте науки лежат там, где выдающийся физик рассматривает «вечные» истины в свете идей современной науки. А таких сверхидей у современной физики две: идея симметрии и идея единой суперсилы.

Хотя красота и полезность симметрии замечены человеком с древнейших времен, истинная роль симметрии как универсального принципа, организующего мироздание, стала проясняться только в XX в. В 1918 г. немецкий математик Эмми Нетер (1882—1935) доказала замечательную теорему, согласно которой каждому виду симметрии соответствует свой закон сохранения. Например, знаменитый закон сохранения энергии является следствием однородности времени, т. е. симметрии относительно сдвигов по времени. В 1963 г. американский физик-теоретик Юджин Пол Вигнер получил Нобелевскую премию по физике за исследования принципов симметрии, лежащих в основе взаимодействия элементарных частиц. Таким образом, к концу XX в. стало окончательно ясно, что законы симметрии пронизывают все мироздание от микромира (атомных ядер, двойной спирали молекулы ДНК, кристаллических решеток) до макрокосмоса (центрально-симметричной Солнечной системы и симметрии подобия спиральных галактик). Не это ли высшее выражение принципа единства в многообразии?

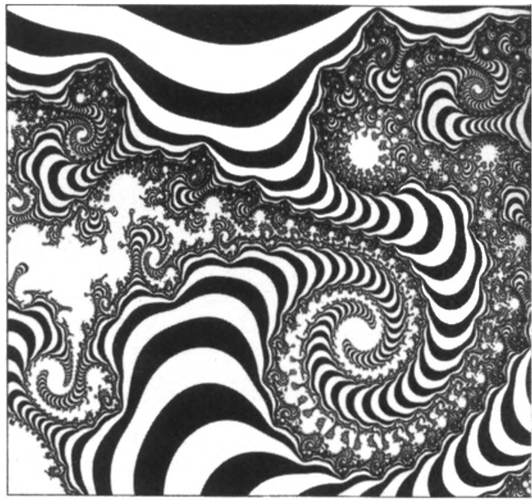
Другим не менее впечатляющим выражением принципа единства в многообразии в физике является идея *суперобъе-*

динения, идея объединения четырех основных сил природы, четырех фундаментальных взаимодействий — сильного (ядерного), слабого (отвечающего за радиоактивный распад), электромагнитного и гравитационного — в единую суперсилу. Первые шаги на пути к суперобъединению сделал Джеймс Максвелл, связавший электричество и магнетизм. Альберт Эйнштейн посвятил идее суперобъединения всю свою жизнь, хотя этой его мечте так и не удалось сбыться. В 1974 г. Г. Джорджи и Ш. Глэшоу создали теорию, объединяющую первые три взаимодействия, названную *теорией Великого объединения.* Наконец, интенсивно разрабатываемая сегодня теория суперсимметрии и суперструн позволяет надеяться, что скоро проблема суперобъединения будет решена. Таким образом будет показано, что миром, который столь разнообразен и в котором ежесекундно сталкивается столько различных сил, правит одна единая сила! Ну разве подобное единство в многообразии не может не вызывать эстетический восторг?!

Итак, наука прекрасна, ибо она отражает в себе и преломляет в нашем сознании красоту, гармонию и единство мироздания. Но очарованные красотой науки физики пошли дальше: *не только истина прекрасна, но и прекрасное истинно,* утверждают они. К этой мысли часто возвращался в беседах Альберт Эйнштейн, но в наиболее категоричной форме ее высказал английский физик Нобелевский лауреат Поль Дирак в своем знаменитом афоризме: *красота является критерием истинности физической теории*. Конечно, Дирак понимал, что столь сильное утверждение скорее всего является неверным, т. е. красота является необходимым, но не достаточным условием истинности. Но его восхищение красотой науки было столь велико, что он позволил себе эту, скорее поэтическую, гиперболу.

Но вернемся от физики к математике, тем более что ни один физик не сомневается: своими успехами физика обязана исключительно математике. Почему же именно математика претендует на роль «первой дамы» и «первой красавицы» среди остальных наук?

Конечно, проще всего было бы ответить на этот вопрос афоризмом «короля математиков» Карла Гаусса (1777—1855): «Математика — царица всех наук... Она часто снисходит до оказания услуг астрономии и другим естественным наукам, но при всех обстоятельствах первое место, несомненно, останется за ней». Однако ясно, что это не объяснение, а скорее декларация, и, чтобы разобраться в существе дела, мы должны вновь спросить себя: что такое математика? Гораздо легче ответить на аналогичный вопрос биологу или геологу. Первый скажет, что биология — это наука о живой природе, а второй — что геология — это наука о недрах Земли. А вот у математики нет своего материального предмета исследования, его нельзя потрогать руками, увидеть глазами. Хотя значительная часть математических понятий и родилась при изучении реальных явлений — вспомним историю возникновения арифметики или геометрии. В процессе своего развития математика лишилась материального предмета изучения, и именно это сделало ее самой могущественной наукой. Сегодня даже далекий от мате-



МНОЖЕСТВО МАНДЕЛЬБРОТА. Черно-белое компьютерное «фото». *Фрагмент.*

Чувство глубочайшего уважения к мощи законов симметрии никогда не ослабевает у того, кто обдумает изящество и красоту безупречных математических доказательств и сопоставляет это со сложными и далеко идущими физическими и философскими следствиями.

Чжень-нин Янг
Нобелевская лекция

матики человек знает, что это могучая сила, открытая только небольшой касте посвященных.

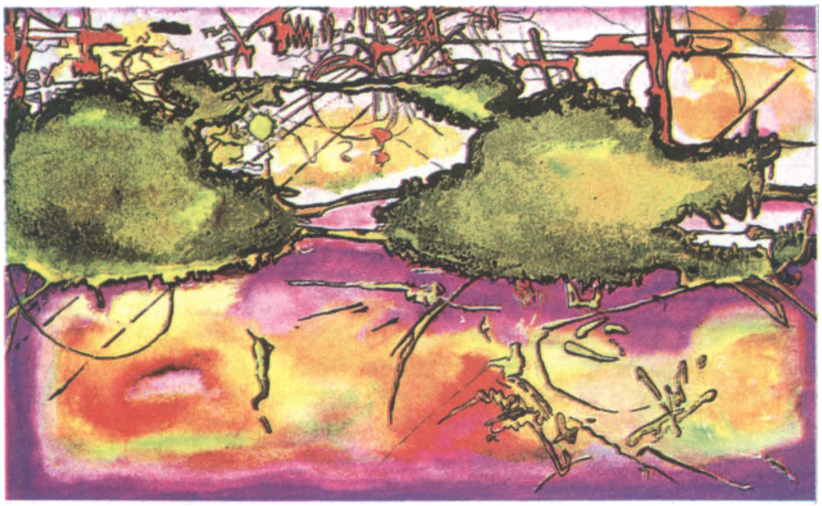
«Что такое математика?» — так называется книга американских математиков Р. Куранта и Г. Роббинса, которую мы рекомендуем всем, кто захочет увидеть математику во всем блеске ее красоты, ибо, как сказано в авторском введении, «и для специалистов, и для любителей не философия, а именно активные занятия математикой смогут дать ответ на вопрос: что такое математика?».

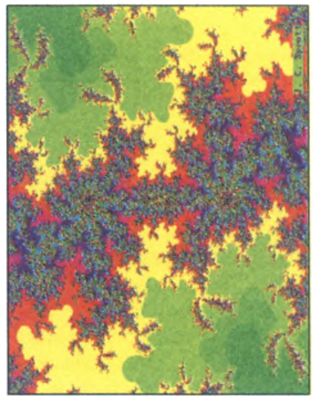
Тем не менее такое *конструктивное* определение математики не может удовлетворить философов. До недавнего времени у нас непререкаемым считалось определение математики Ф. Энгельса: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира». Это определение указывало не только на предмет математики, но и на его происхождение — реальный мир. Неудивительно, что воинствующий материалист Энгельс подчеркивал именно это свойство математики: «Но совершенно неверно, будто в чистой математике разум имеет дело только с продуктами своего собственного творчества и воображения. Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира». Земным происхождением объяснялась и эффективность математики в естествознании.

К достоинствам определения математики Энгельса, так же как и определения эстетики Гегеля, следует отнести их простоту: *математика — наука о числах и фигурах; эстетика — наука о прекрасном*. Однако по мере развития каждая наука перерастает свой первоначальный предмет исследования. Давно стало ясно, что математика есть нечто большее, чем наука о числах и фигурах. Ее новое определение предложила группа французских математиков, объединившаяся под псевдонимом Никола Бурбаки: *математика есть наука о математических структурах*. Заметим, что и современные философские словари наперебой утверждают: *эстетика есть наука об эстетическом освоении действительности*. Тавтологичность обоих определений очевидна: в попытках «объять необъятное» — определить свой предмет — обе науки оказываются в равном затруднительном положении.

О тщетности подобных попыток предостерегал выдающийся американский математик Рихард Курант (1888—1972) в статье «Математика в современном мире»: «На вопрос «Что такое математика?» невозможно дать обстоятельный ответ на основе одних лишь философских обобщений семантических предложений или с помощью обтекаемого газетно-журнального многословия. Так же как нельзя дать общее определение музыке или живописи: никто не может оценить эти виды искусства, не понимая, что такое ритм, гармония и строй в музыке или форма, цвет и композиция в живописи. Для понимания же сути математики еще в большей степени необходимо подлинное проникновение в составляющие ее элементы».

И опять-таки напомним: еще Аристотель указывал на то, что в геометрии некоторые понятия — точка, прямая, плоскость — должны оставаться *неопределимыми*, ибо в противном случае у нас не будет точки отсчета в понятиях. *Точка,*





К. СПРОТТ. Жюлиа-вариации. Сказочная сложность форм, скрывающаяся в сказочной простоте алгоритма $z \to z^2 + c$ *(справа)*.
Ж. МАТЬЕ. Сатурн. *1969 г.* (*вверху*).
Ж. МАТЬЕ. Нептун. *1969 г. (внизу)*.
Где больше Хаоса и где больше Космоса: в компьютерных портретах математических множеств или в художественных произведениях Матье?

прямая, плоскость в геометрии Евклида, *множество* в теории множеств Кантора, *математические структуры* у Бурбаки, *бытие* в логике Гегеля, *прекрасное* в эстетике, *культура* в культурологии являются теми *изначальными неопределимыми понятиями*, с которых начинается восхождение от абстрактного к конкретному в каждой из этих наук, начинается «проникновение в составляющие элементы», о котором говорит Р. Курант.

Однако гораздо больше, нежели определение математики, и математиков, и физиков, и философов волнует другая животрепещущая философская проблема математики — *проблема отношения математики и реальности*. Математику изобретают или открывают? Действительность создает математику или математика творит реальность? Откуда у математики чудесный дар описывать и даже предсказывать законы природы?

Первый вариант ответа на эти вопросы нам уже дал Энгельс. Разумеется, он не был оригинален в своем ответе. За сто лет до него французский философ-просветитель Дени Дидро (1713—1784) в работе «Мысли об интерпретации природы» высказал мысль о том, что математики выбирают аксиомы так, чтобы их следствия — теоремы — согласовывались с опытом. Потому-то и выпало столько желчного неприятия и насмешек на долю создателя «воображаемой» геометрии Н. И. Лобачевского (1792—1856), что теоремы его геометрии не согласовывались с чувственным опытом.

Второй вариант ответа восходит к Пифагору, считавшему, что *числа правят миром*. Эту мысль развил Платон в философско-художественной теории *анамнезиса* (греч. αναμνησις — воспоминание). Платон считал абсолютные математические идеи объективно существующими на небе. Душа человека первоначально также обреталась на небе и впитывала эти идеи. Затем, когда начинается земной цикл жизни души, она «припоминает» эти божественные идеи и воплощает их в математических аксиомах и философских учениях. Понятно, что все эти «воспоминания» человека только жалкая тень того божественного великолепия идей, что царит на небе. Несмотря на сказочную форму, идеи Платона несут в себе глубочайшее философское содержание и их разделяют самые крупные ученые. В подтверждение на полях приведены слова современного американского историка математики Мориса Клайна, «припоминающие» Платона не только по существу, но и по силе выразительности.

Бог вложил в мир строгую математическую необходимость, которую люди постигают лишь с большим трудом, хотя их разум устроен по образу и подобию божественного разума. Следовательно, математическое знание не только представляет собой абсолютную истину, но и священно, как любая строка Священного Писания. Исследование природы — занятие столь же благочестивое, как и изучение Библии.

М. Клайн

Между этими двумя полюсами есть много других философских воззрений на соотношение математики и действительности. Среди них и знаменитое учение Канта о том, что мы не знаем и не можем знать природу, ибо наши чувства искажают ее и формируют наши представления о природе в соответствии с врожденными интуитивными представлениями о пространстве и времени. Мы не будем углубляться в тонкости проблемы соотношения математики и действительности и закончим эту тему словами Юджина Вигнера, который проявляет здесь мудрость, равную мудрости Альбрехта Дюрера в определении красоты.

В статье «Непостижимая эффективность математики в естественных науках» — так с легкой руки автора теперь называют это свойство математики — Вигнер пишет: «Чудесная загадка соответствия математического языка законам физики является удивительным даром, который мы не в состоянии понять и которого мы, возможно, недостойны.»

И все-таки — что же такое математика? «Математика — это больше, чем наука, это язык» — так определил место математики в системе наук знаменитый датский физик Нильс Бор (1885—1962). Математика может быть языком любой науки, умеющей на нем разговаривать. В этом универсальность и могущество математики, но в этом и ее особая красота.

Как только любая из наук переведет свои проблемы на язык математики, так тут же к ее услугам откроется весь богатейший арсенал математики, способный решать практически любые конкретные задачи. Например, сформулировав задачу на языке дифференциальных уравнений, представитель любой науки получает в руки полный набор математических методов от качественных методов исследования дифференциальных уравнений до современных численных методов решения этих уравнений на компьютере.

Более того, математика помогает найти общий язык служителям разных наук. Например, волны на воде, звуковые волны и радиоволны описываются на языке математики одним и тем же дифференциальным уравнением, называемым *волновым уравнением*. Радиофизикам уже нет нужды решать волновое уравнение, которое за них решили акустики. Более того, математика выявляет здесь родство в столь разнородных с виду физических явлениях, как распространение радиоволн и волн на воде и в воздухе. Мы снова приходим к основному критерию научной красоты — единству в многообразии, который в наивысшей степени воплощается в математике.

Язык математики — это особый язык науки. В отличие от естественного языка (русского или английского), который в основном классифицирует предметы и потому является языком качественным, язык математики прежде всего количественный. Количественный язык представляет собой дальнейшее развитие и уточнение обычного качественного языка, но он не исключает, а скорее дополняет последний.

Важнейшим преимуществом количественного языка математики является краткость и точность. Тем самым в языке математики воплощается еще один важный признак красоты науки — сведение сложности к простоте. Хорошо известно, что с помощью математического языка — функций, уравнений, формул — точно и кратко описываются самые разнообразные свойства и явления, происходящие в природе и обществе. Древнегреческому математику Аполлонию из Перги (ок. 260 — ок. 170 гг. до н. э.) потребовалось восемь книг, чтобы описать свойства конических сечений. Между тем на языке аналитической геометрии, т. е. с помощью алгебраических формул, эти свойства доказываются на нескольких страницах. Эталоном простоты и красоты, символом современной физики стала знаменитая формула Эйнштейна

$$E=mc^2.$$

И здесь уместно вспомнить о проницательности искусствоведа Волькенштейна, который признаком научной красоты называл всякое выражение истины на языке математики.

Итак, математика — это не только наука о *математических структурах*, но и язык других наук, язык единый, точный, простой и красивый. Хорошо сказал об этих качествах математики наш соотечественник и современник математик С. Л. Соболев, в 31 год ставший академиком: «Есть одна наука, без которой невозможна никакая другая. Это математика. Ее понятия, представления и символы служат языком, на котором говорят, пишут и думают другие науки. Она объясняет закономерности сложных явлений, сводя их к простым, элементарным явлениям природы. Она предсказывает и предвычисляет далеко вперед с огромной точностью ход вещей».

Последнее свойство математики, дающее возможность «выспрашивать» у природы ее тайны и позволяющее делать открытия «на кончике пера», ставит математику в исключи-

Когда Нильсу Бору, положившему в основу квантовой механики принцип дополнительности двух противоположных начал — дискретной частицы и непрерывной волны, за выдающиеся научные достижения было жаловано дворянское звание, он выбрал Символ Тайцзи в качестве своего герба. Девизом Бор поставил слова: Contraria sunt complementa — Противоположности дополнительны. Этот девиз сегодня можно трактовать как дополнительность древней восточной мудрости и современной западной науки.

Понимание всего богато окрашенного многообразия явлений достигается путем осознания присущего всем явлениям объединяющего принципа форм, выражаемого на языке математики. Таким же образом устанавливается тесная взаимосвязь между тем, что воспринимается как прекрасное, и тем, что доступно пониманию лишь с помощью интеллекта.

В. Гейзенберг

ДЮРЕР. Меланхолия.
Гравюра на меди. 1514 г.
Во времена Возрождения меланхолический темперамент отождествляли с творческим началом. На гравюре Дюрера Меланхолия окружена атрибутами зодчества и геометрии, отчего математики любят считать этот шедевр графического искусства олицетворением творческого духа математика, а саму Меланхолию — представительницей математики в мире прекрасного.

тельное положение среди наук. Классическим примером триумфа математики в естествознании стало открытие планеты Нептун. Его история такова. Еще в XVIII в. (вскоре после открытия планеты Уран) в ее движении астрономы обнаружили некоторые «неправильности». Тогда же было высказано предположение о том, что эти отклонения орбиты вызваны притяжением неизвестной еще планеты. Однако только к середине XIX в. параметры орбиты неизвестной планеты были вычислены независимо друг от друга англичанином Джоном Адамсом (1819—1892) и французом Урбеном Леверье (1811—1877). Результаты вычислений Адамс в сентябре 1845 г. передал в Гринвичскую обсерваторию (Великобритания), а Леверье 18 сентября 1846 г. послал в Берлинскую обсерваторию. Но если расчеты Адамса продолжали пылиться в архивах Гринвичской обсерватории, то по расчетам Леверье 23 сентября 1846 г., в первый же вечер после получения письма от Леверье, немецкий астроном Иоганн Галле (1812—1910) обнаружил неизвестную планету точно в указанном месте небосвода! Как видим, история научных открытий полна драматизма. Открытие Нептуна было величайшим триумфом математики: далекая неизвестная планета была найдена с помощью только карандаша и бумаги!

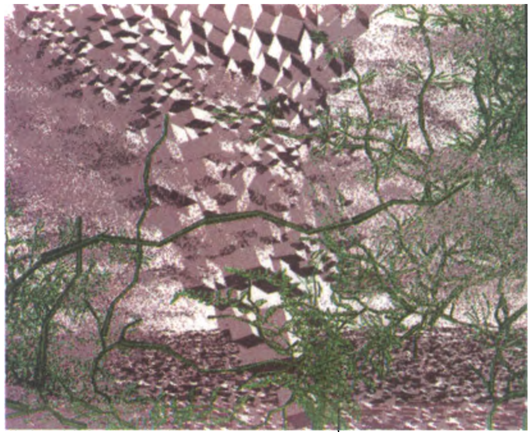
Последующие сто лет истории науки были цепью побед и предсказаний математики в других науках. И ядерная физика, и освоение космоса немыслимы без математики. Одним из последних открытий «на кончике пера» является открытие физического эффекта Т-слоя в плазме, сделанное в Институте прикладной математики РАН под руководством академиков А. Н. Тихонова и А. А. Самарского. Правда, вместо карандаша и бумаги современные математики используют мощные компьютеры, но суть остается той же: математические уравнения предсказывают физические явления.

В этом свойстве математики, называемом *эвристическим* (греч. ευρισκω — находить, изобретать; отсюда архимедова «эврика» ευρηκα — нашел!), заключено высшее выражение еще одного признака красоты в науке — обретение неочевидной истины. Роль математики в постижении неочевидных истин, а значит, и красота математики непревзойденны.

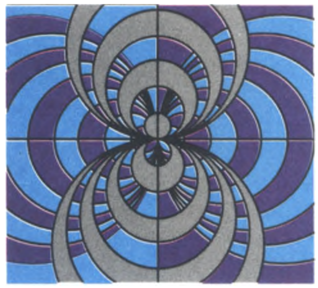
Итак, все рассмотренные нами признаки красоты науки выполняются в математике с наибольшей силой. Язык и структуры математики — то ли благодаря Божественному Промыслу, то ли за счет развития самой математики — оказались в высшей степени приспособленными для описания законов мышления и законов мироздания. В то же время все признаки красоты науки являются следствиями принципа единства в многообразии и даже более общего принципа обретения Космоса из Хаоса. Просто дословно об этом говорит «отец кибернетики» Норберт Винер (1894—1964): «Высшее назначение математики как раз и состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает». Так что сегодня правильнее говорить не просто о высочайшем эстетическом потенциале математики в науке, а о *метаэстетике математики в науке и мировоззрении.*

А закончить наш разговор о красоте математики нам хочется словами английского математика и философа Годфри Харди (1877—1947): «Творчество математика в такой же степени есть создание *прекрасного*, как творчество живописца или поэта, — совокупность идей, подобно совокупности красок и слов, должна обладать внутренней гармонией. Красота есть первый пробный камень для математической идеи; в мире нет места уродливой математике».

Лучше не скажешь! Однако возникает новый вопрос. Если наука и особенно математика так богаты собственной красотой, то почему крупнейшие ученые, как никто знающие толк в эстетике науки, едва только речь заходит о прекрасном, обращаются к искусству? Почему ученым мало красоты науки? Таким образом, мы подходим к интереснейшей проблеме — проблеме взаимоотношения науки и искусства.



О. Кислюк. *Z. 1997 г.* Космос или Хаос?



Два семейства, касающихся взаимно перпендикулярных окружностей. Снова красота Порядка.

Математические доказательства, как алмазы, тверды и прозрачны и поддаются лишь самой строгой логике.

Джон Локк

4.
НАУКА И ИСКУССТВО — ДВА КРЫЛА КУЛЬТУРЫ

Наука и искусство так же тесно связаны между собой, как сердце и легкие...

Л. ТОЛСТОЙ

...Я подумал, что чутье художника стоит иногда мозгов ученого, что то и другое имеют одни цели, одну природу и что, быть может, со временем при совершенстве методов им суждено слиться вместе в гигантскую, чудовищную силу, которую теперь трудно и представить себе...

А. ЧЕХОВ

«Поэзия — просто ерунда» — так ответил однажды Ньютон на вопрос, что он думает о поэзии. Ньютон вообще часто не затруднял себя подбором выражений, и некоторые из его высказываний Лондонское королевское общество до сих пор не решается воспроизводить в печати. Другой великий творец дифференциального и интегрального исчисления, философ, физик, изобретатель, юрист, историк, языковед, дипломат и тайный советник Петра I Готфрид Лейбниц (1646—1716) более сдержанно определял ценность поэзии по отношению к науке — примерно как 1 : 7. Тургеневский Базаров был более категоричен в количественных оценках: «Порядочный химик,—заявлял он,— в двадцать раз полезнее всякого поэта».

Впрочем, поэты также часто не стесняли себя в выражениях в адрес ученых. Так, английский поэт и художник Уильям Блейк (1757—1827) писал:

Живей, Вольтер! Смелей, Руссо![1]
Бушуй, бумажная гроза!
Вернется по ветру песок,
Что нам швыряете в глаза.
. . . .
Придумал атом Демокрит,
Ньютон разъял на части свет...
Песчаный смерч Науки спит,
Когда мы слушаем Завет.

Англичанину Блейку вторил русский поэт В. А. Жуковский (1783—1852), хотя тон его стихов спокоен и даже печален:

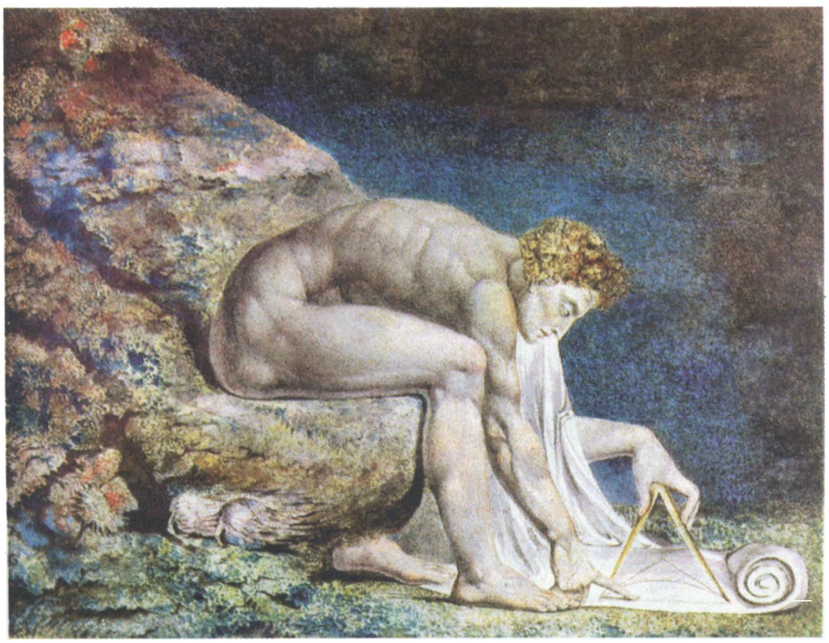
Не лучший ли нам друг воображенье?
И не оно ль волшебным фонарем
Являет нам на плате роковом
Блестящее блаженства привиденье?
О друг мой! Ум всех радостей палач!
Лишь горький сок дает сей грубый врач!

[1] Здесь Вольтер (1694—1778) и Жан-Жак Руссо (1712—1778) для Блейка прежде всего не писатели, а философы и ученые-энциклопедисты, просветители.

Конечно, не во все времена и не все служители науки и искусства разделяли столь резкие мнения. Были и другие мнения, свидетельством чему высказывания наших двух великих соотечественников, стоящие эпиграфом к этой главе. Были и другие времена, когда наука и искусство рука об руку шли к вершинам культуры.

И мы вновь возвращаемся в Древнюю Грецию... Из всех народов античности греки оказали самое сильное влияние на развитие европейской культуры. Вероятно, источник «греческого чуда» и в том, что, входя в контакты с великими и более древними восточными цивилизациями, греки не отвергали, а усваивали их уроки, дабы извлечь из них оригинальную культуру, ставшую основой и образцом для дальнейшего развития человечества. «Что бы эллины ни перенимали от варваров, они всегда доводили это до более высокого совершенства»,— писал Платон в диалоге «Послезаконие». Примечательно, что именно восточные греки заложили фундамент философии — Фалес из Милета, математики — Пифагор с острова Самос, лирической поэзии — Сапфо с острова Лесбос.

Своего апогея греческая культура достигает в V в. до н. э. В это время стратег Перикл возводит грандиозные монументы Акрополя, скульпторы Фидий и Поликлет высекают свои бессмертные шедевры, Эсхил, Софокл и Еврипид пишут трагедии, Геродот и Фукидид составляют бесценную хронику



У. БЛЕЙК. Ньютон. *1795 г.*
Несмотря на отсутствие пиетета к Ньютону в стихах поэта Блейка, художник Блейк воплотил в образе гениального естествоиспытателя величие человеческого разума.

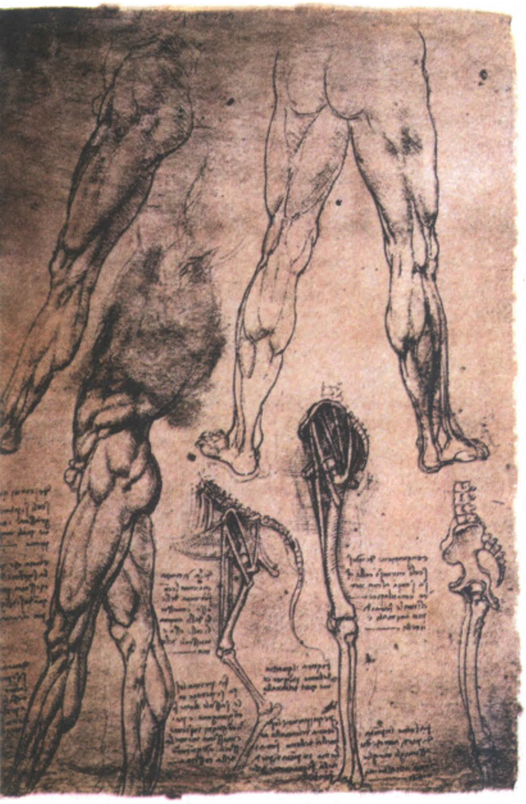
древней истории, философы и ученые Зенон, Демокрит, Сократ прославляют могущество человеческого разума. Затем Греция дарит миру великих мыслителей Платона и Аристотеля, чьи бессмертные идеи третье тысячелетие питают философов всего мира, основоположника аксиоматического метода в геометрии, автора знаменитых «Начал» Евклида, величайшего математика древнего мира Архимеда.

Наука, искусство и ремесло в то счастливое для мировой культуры время еще не отгородились друг от друга высокими стенами. Как мы уже говорили, все это называлось одним емким словом τεχνη. Ученый писал философские трактаты страстно и образно, а иногда и стихами, как Парменид, поэт непременно был философом, а ремесленник — истинным художником. Математика и астрономия преподавались в гимназиях наряду с музыкой и поэзией. И сам Аристотель считал, что наука и искусство должны объединяться во всеобщей мудрости.

> Ты на звезды глядишь, о звезда моя! Быть бы мне небом,
> Чтоб мириадами глаз мог я глядеть на тебя.

Чьи эти трепетные строки? Родоначальника лирической поэзии Архилоха? Нет, философа Платона.

Была и другая эпоха единого взлета науки и искусства — эпоха Возрождения. Человечество вновь, через тысячу лет, открывало для себя забытые сокровища античной культуры, утверждало идеалы гуманизма, возрождало великую любовь к красоте мира и непреклонную волю познать этот мир. То была великая эпоха раскрепощения человеческого духа и разума, «эпоха титанов», поставившая человека в центр Вселенной и подарившая человечеству яркие созвездия универсальных гениев вселенского масштаба.



ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ.
Анатомические рисунки.
Наука и искусство, слитые воедино.

А. ФОМЕНКО.
Геометрическая фантазия.
1980 г.
Академик РАН Анатолий Тимофееевич Фоменко известен не только как ученый-математик, специалист по геометрии и алгебраической топологии, но и как оригинальный художник. Начав с черно-белой графики, Фоменко-художник пришел к буйному многоцветью палитры. Возможно, именно знание топологии Фоменко-математиком помогает Фоменко-живописцу вмещать на двухмерной плоскости картины сказочные *N*-мерные миры.

Олицетворением многогранной гениальности эпохи Возрождения, символом слияния науки и искусства является титаническая фигура Леонардо да Винчи (1452—1519), итальянского живописца, скульптора, архитектора, теоретика искусств, математика, механика, гидротехника, инженера, изобретателя, анатома, биолога. Леонардо да Винчи — одна из загадок в истории человечества. Его разносторонний гений непревзойденного художника, великого ученого и неутомимого исследователя повергает разум в смятение: возможно ли все это в одном человеке? Да и человек ли это?! Для самого Леонардо наука и искусство были слиты воедино. Отдавая в «споре искусств» пальму первенства живописи, Леонардо считал ее универсальным языком, наукой, которая, подобно математике в формулах, отображает в пропорциях и перспективе все многообразие и разумное начало природы.

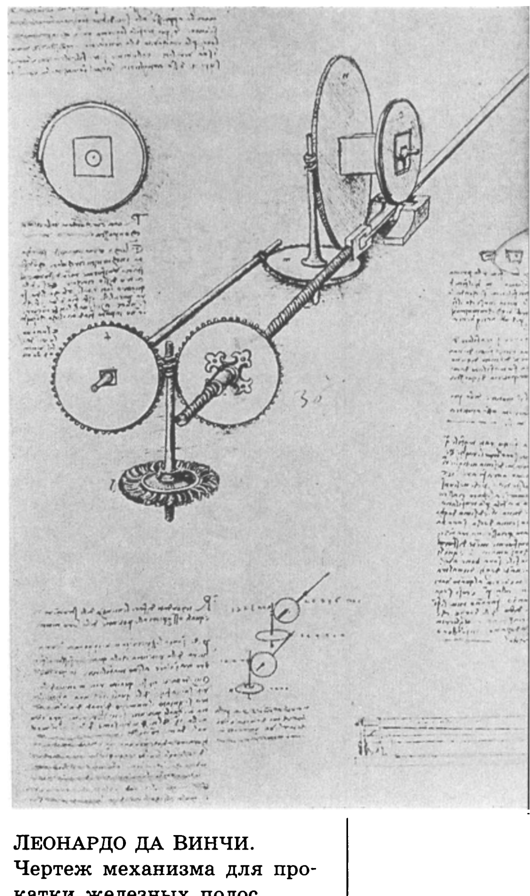
Оставленные Леонардо да Винчи около 7000 листов научных записок и поясняющих рисунков являются недосягаемым образцом синтеза науки и искусства. Листы эти долгое время кочевали из рук в руки, оставаясь неизданными и неизученными, а за право обладать хоть несколькими из них на протяжении веков велись ожесточенные споры. Вот почему рукописи Леонардо рассеяны по библиотекам и музеям всего мира. Вместе с Леонардо и другие титаны Возрождения, возможно, не столь универсальные, но не менее гениальные, воздвигали бессмертные памятники искусства и науки: Микеланджело, Рафаэль, Дюрер, Шекспир, Бэкон, Монтень, Коперник, Галилей...

И все-таки, несмотря на союз науки и искусства и стремление ко «всеобщей мудрости», часто сочетавшиеся в лице одного гения, искусство античности и Возрождения шло впереди науки. В первую эпоху наука только зарождалась, а во вторую — «возрождалась», сбрасывала с себя путы долгого религиозного плена. Наука значительно дольше и мучительнее, чем искусство, проходит путь от рождения к зрелости. Это и понятно, ибо *путь сердца* искусства всегда быстрее *пути мысли* науки. Потребовалось еще одно столетие — XVII в., принесший науке гениальные открытия Ньютона, Лейбница, Декарта, чтобы наука смогла заявить о себе в полный голос.

Следующий, XVIII в. был веком стремительного развития науки, «веком разума», эпохой Просвещения. Во многом просветители XVIII в.— Вольтер, Дидро, Руссо, Д'Аламбер, Шиллер, Лессинг, Кант, Локк, Свифт, Ломоносов, Новиков, Татищев — похожи на титанов Возрождения: универсальность таланта, кипучая энергия, сила жизни. Но что отличало просветителей — это вера во всемогущество разума, культ разума как лекарства от всех бед и разочарование в силе нравственных идеалов. Пути науки и искусства расходятся, а в XIX в. между ними вырастает стена непонимания и отчужденности.

Исчезнули при свете просвещенья
Поэзии ребяческие сны,
И не о ней хлопочут поколенья,
Промышленным заботам преданы.

(Е. Баратынский)



ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ. Чертеж механизма для прокатки железных полос. *Рисунок пером из «Атлантического кодекса». Около 1490—1495 гг.*

А. ФОМЕНКО.
Искушение святого Антония. *1979 г.*
Последние десять лет математик и художник Фоменко более всего известен как историк. Подвергнув статистическому анализу данные астрономических наблюдений и исторических текстов, Фоменко-историк приходит к выводу о необходимости пересмотра всей античной и средневековой хронологии. К сожалению, математическая теория Фоменко укорачивает мировую историю почти на 1000 лет, и именно эстетические соображения могут стать главным препятствием для этой теории. Но очевидно другое: разносторонность и масштабность творчества Анатолия Фоменко убедительно доказывают, что универсальные гении возможны в любую эпоху.

Конечно, находились люди, пытавшиеся пробить эту стену взаимного неприятия науки и искусства, но в основном среди художников царил испуг перед «рассудочной наукой» и страх, что господство научного знания окажется гибельным для искусства. Опасения художников разделяли и философы. Сам Гегель считал, что поскольку рост теоретического знания сопровождается утратой живого восприятия мира, то в конечном итоге развитие науки должно привести к смерти искусства.

Уходя, век Просвещения дарит миру своего последнего «универсального» гения — Иоганна Вольфганга Гете (1749—1832), поэта, философа, физика, биолога, минералога, метеоролога. Гений Гете, как и созданный им образ Фауста, олицетворяет безграничные возможности человека, вечное стремление человечества к истине, добру и красоте, неукротимую жажду познания и творчества. Гете был убежден, что наука и искусство являются равноправными слагаемыми культуры: и ученый, и художник изучают и воссоздают мир во имя главной цели — постижения истины, красоты и добра.

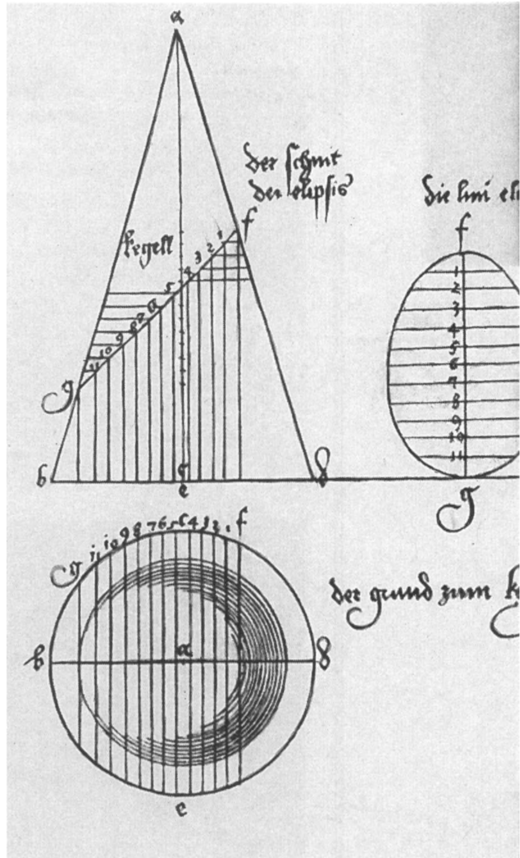
Гете гениально предвидел проблему, ставшую, как никогда, актуальной сегодня: для того, чтобы наука оставалась на позициях гуманизма, чтобы она приносила людям пользу и радость, а не вред и горе, она должна крепить свои связи с искусством, высшая цель которого — нести разуму добро и красоту. Сегодня, когда накоплены горы смертоносного ядерного оружия, когда человечество замерло на пороге глобальных экологических катастроф, когда о фантастически могучих силах, вызванных к жизни наукой, жестоко напомнила авария на Чернобыльской АЭС,— как никогда остро стоит проблема гуманизации науки, ибо безнравственная наука и техника ввергнут мир в последнюю катастрофу.

А стремительное развитие науки на пороге третьего тысячелетия ставит перед человечеством еще более тонкие этические проблемы. Робкая овечка Долли открыла путь к генокопированию — *клонированию* (от греч. κλων — ветвь, побег) человека. Но кого станут тиражировать в XXI в.— благородных принцев или злых гоблинов? Но даже если и двух Клаудий Шиффер — не будет ли и этого много для одной маленькой Земли?

Но вернемся из XXI в., куда нас увлекла провидческая мысль Гете, во вторую половину XX в., время, когда споры о науке и искусстве достигли наивысшего накала. Основная причина, вызвавшая вспышку таких споров, заключается в том, что в условиях современной научно-технической революции наука стала неотъемлемой составляющей жизни общества. Только в нашей стране армия научных работников превышает один миллион человек, что почти в два раза больше армии Наполеона в Отечественной войне 1812 г. Овладение энергией атома и освоение человеком новой стихии — космического пространства — обеспечили современной науке небывалый престиж. Сложилось убеждение, что основная сила человеческого разума должна концентрироваться именно в науке, и прежде всего в математике и физике — столпах всей научно-технической революции. Искусству же отводилась роль Золушки, и то, что эта Золушка вопреки прогнозам столетней давности все еще мешалась под ногами, только раззадоривало технократов.

Итак, атмосфера была накалена и оставалось только высечь искру, чтобы грянул взрыв. Это сделал английский писатель, физик по образованию Чарлз Сноу, выступив в мае 1959 г. в Кембридже (США) с лекцией «Две культуры и научная революция». Лекция Сноу взбудоражила научную и художественную общественность Запада: одни стали его убежденными сторонниками, другие — ярыми противниками, третьи, самые тихие, пытались найти золотую середину. Основной мотив лекции Сноу — взаимное обособление науки и искусства, которое ведет к образованию двух самостоятельных культур — «научной» и «художественной». Между этими полюсами интеллектуальной жизни общества, по мнению Сноу, разверзлась пропасть взаимного непонимания, а часто и враждебной неприязни. Традиционная культура, не способная воспринять новейшие достижения науки, якобы неизбежно скатывается на путь антинаучности. С другой стороны, научно-технической среде, которая игнорирует художественные ценности, грозит эмоциональный голод и антигуманность. Сноу полагал, что причина разобщенности двух культур кроется в чрезмерной специализации образования на Западе, указывая при этом на Советский Союз, где система образования была более универсальной, а значит, и не было проблемы взаимоотношения науки и искусства.

Здесь Сноу ошибся. Едва отшумело лето, и эпидемия спора о «двух культурах» с берегов Атлантики перенеслась в Россию. В сентябре 1959 г. на страницах наших газет вспыхнул знаменитый спор «физиков» и «лириков», как окрестили у нас представителей науки и искусства.



ДЮРЕР.
Построение эллипса
как конического сечения.
Рисунок из «Руководства к измерению». 1525 г.
Нетрудно заметить, что эллипс у Дюрера имеет яйцевидную форму. Эта ошибка великого художника обусловлена, видимо, тем интуитивным соображением, что эллипс должен расширяться по мере расширения конуса.

Наука и искусство — это два крыла, которые поднимают вас к Богу.
М. Х. А. Бехаулла

Дискуссия началась статьей писателя Ильи Эренбурга. Это был ответ на письмо некой студентки, рассказывавшей о своем конфликте с неким инженером, который, кроме физики, ничего другого в жизни не признает. Увидев в частном письме назревшую проблему, Эренбург поместил в «Комсомольской правде» обширный ответ. Писатель подчеркивал, что в условиях небывалого прогресса науки очень важно, чтобы искусство не отставало от нее, чтобы его место в обществе было местом пушкинского пророка, а не местом исправного писца или равнодушного декоратора. «Все понимают,— писал Эренбург,— что наука помогает понять мир; куда менее известно то познание, которое несет искусство. Ни социологи, ни психологи не могут дать того объяснения душевного мира человека, которое дает художник. Наука помогает узнать известные законы, но искусство заглядывает в душевные глубины, куда не проникают никакие рентгеновские лучи...»

Статья Эренбурга вызвала цепную реакцию мнений. У Эренбурга были союзники, но были и противники. Среди последних особенно «прославился» инженер-кибернетик Полетаев, который писал: «Мы живем творчеством разума, а не чувства, поэзией идей, теорией экспериментов, строительства. Это наша эпоха. Она требует всего человека без остатка, и некогда нам восклицать: ах, Бах! ах, Блок! Конечно же, они устарели и стали не в рост с нашей жизнью. Хотим мы этого или нет, они стали досугом, развлечением, а не жизнью... Хотим мы этого или нет, но поэты все меньше владеют нашими душами и все меньше учат нас. Самые увлекательные сказки преподносят сегодня наука и техника, смелый и беспощадный разум. Не признавать этого — значит не видеть, что делается вокруг. Искусство отходит на второй план — в отдых, в досуг, и я жалею об этом вместе с Эренбургом».

Возмущенные «лирики» и рассудительные «физики» на все лады склоняли Полетаева[1]. Появились и крикливые статьи «физиков» — «Я с тобой, инженер Полетаев!», появились и самобичующие стихи «лириков»:

Что-то физики в почете,
Что-то лирики в загоне,
Дело не в сухом расчете,
Дело в мировом законе.

Значит, что-то не раскрыли
Мы, что следовало нам бы!
Значит, слабенькие крылья —
Наши сладенькие ямбы...

(Б. Слуцкий)

Физики в то время действительно были в почете: и расщепление атома, и освоение космоса было делом рук (точнее, голов!) физиков и математиков.

Споры «физиков» и «лириков» на страницах газет бушевали несколько лет. Обе стороны явно утомились, но ни к какому решению так и не пришли. Впрочем, споры эти ведутся и сегодня. Правда, с газетных полос они перенеслись на страницы научных журналов, таких, как «Вопросы философии» и «Вопросы литературы». Проблема взаимоотношения науки и искусства давно уже признана философской проблемой, и решается она не на уровне газетных уколов, а за «круглыми столами» в атмосфере взаимоуважения и доброжелательства.

[1] Как стало известно впоследствии, «инженер Полетаев» оказался вымышленным персонажем. Его придумал поэт Михаил Светлов и для обострения полемики умышленно поставил на самые крайние позиции. Мистификация М. Светлова удалась.

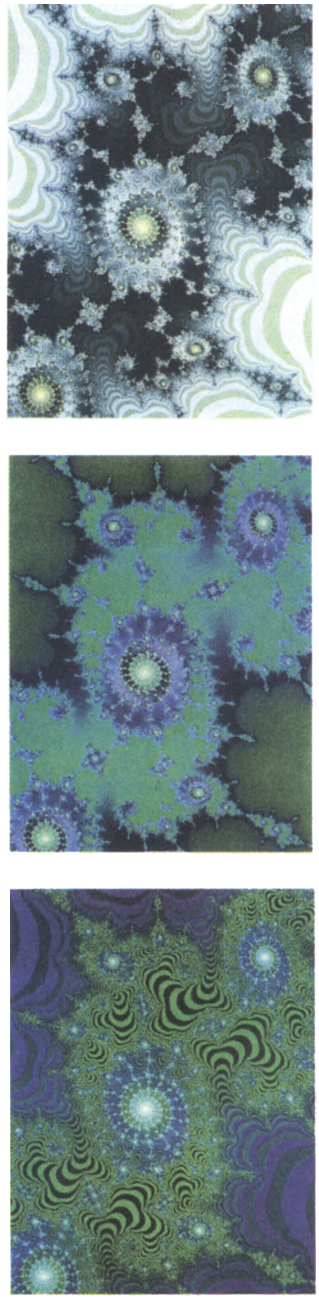
А пока «физики» и «лирики» спорили, кто из них важнее, на другом конце Земли профессор психологии Калифорнийского технологического института Роджер Сперри напряженно работал над изучением особенностей функционирования левого и правого полушарий головного мозга животных и человека. Смелые эксперименты Сперри по разделению левого и правого полушарий мозга привели к удивительному открытию, за которое он в 1981 г. был удостоен Нобелевской премии. Суть открытия Сперри состоит в обнаружении *функциональной асимметрии головного мозга человека.* Как выяснилось, левое полушарие головного мозга последовательно обрабатывает темпоральную (развивающуюся во времени) информацию и потому более «настроено» на процедуру поэтапного рационального мышления. Правое же полушарие одномоментно обрабатывает, «фотографирует» пространственную информацию и «настроено» на восприятие целостных образов. Таким образом, левое полушарие — это полушарие рассудка, логики, понятий, расщепляющего поэтапного аналитического мышления, а правое — полушарие эмоций, мистики, образов, объединяющего единовременного синтетического восприятия. В нашем контексте левое полушарие можно назвать полушарием науки, полушарием «физиков», а правое — полушарием искусства, полушарием «лириков».

Открытие Сперри позволяет по-новому взглянуть на проблему «физиков» и «лириков». Смотреть надо гораздо глубже, чем это казалось и тем и другим. Недаром еще Гомер указывал на два способа предвидения — *мыслью и сердцем,* т. е. разумом и чувствами (см. с. 25). Не зря и богиня Дике в поэме Парменида «О природе» указывала ему на те же два различных пути — *путь Истины и путь Мнения.* Как стало ясно через 2500 лет, такое раздвоение сознания человека продиктовано самой природой функционирования его мозга. *Человек воспринимает мир двумя противоположными способами — рациональным, рассудочным и образным, эмоциональным.*

В пространстве левом опыт умственный,
Прохладный, дышащий безликостью.
В пространстве правом вещный, чувственный,
С шероховатостью и выпуклостью.
Пространство левое, абстрактное,
Стремящееся в неизвестное;
Пространство правое, обратное,
Всегда заполненное, тесное.

(А. Кушнер)

Отсюда следуют два важнейших для всего содержания нашей книги — *математика и искусство* — вывода. Первое. Понятно, что у каждого человека «рациональное» левое и «образное» правое полушария неравнозначны. Следовательно, большинство людей самой природой ориентированы на асимметричное функционирование их мозга и выбирают либо путь мысли, либо путь сердца, становятся либо «физиками», либо «лириками». Сама природа заботится о том, чтобы обеспечить культуру как учеными, так и художниками. Так что наука и искусство есть два крыла культуры, и оба крыла должны



Один и тот же фрагмент множества Мандельброта в различной цветовой гамме. Космос и Хаос, наука и искусство, «физика» и «лирика».

РАФАЭЛЬ. Афинская школа. *Фреска Ватиканского дворца в Риме. 1510—1511 гг.* Это величайшее творение Рафаэля является торжественным гимном науке. В центре фрески изображены Платон и Аристотель, внизу слева — Пифагор, справа — Евклид (или Архимед).

быть одинаково сильными. На одном крыле культура далеко не улетит. Хорошо сказал об этом наш выдающийся филолог и философ Ю. М. Лотман: «Можно предположить, что в культуре, в которой имеется математика, должна быть и поэзия, и наоборот. Гипотетическое уничтожение одного из этих механизмов, вероятно, сделало бы невозможным существование другого».

Второе. Понятно, что у каждого человека оба полушария не изолированы, не разделены, как в опытах Сперри. Следовательно, «рациональное» левое полушарие питает «образное» правое и наоборот. Значит, «физики» нужны «лирикам», а «лирики» — «физикам». Значит, науке нужно искусство и наоборот. Как и любой механизм, в процессе интенсивной работы левое полушарие часто достигает некоего порога насыщения, превысить который оно не в состоянии. В эти моменты даже минимальные импульсы, идущие от правого полушария,— красивый пейзаж, хорошая музыка или просто эмоциональная встряска — могут оказаться необычайно благотворными. Именно по такой схеме и происходили великие открытия от архимедовой «эврики» и ньютонова яблока до теории правильного разбиения пространства, основные идеи которой, как утверждают бывалые альпинисты, пришли математику Б. Н. Делоне на кавказской вершине Белалакая.

Итак, *культуре в равной мере необходимы наука и искусство, а человеку в равной степени нужны истина и красота.* Открытие Сперри не просто примиряет «физиков» и «лириков», но и объясняет необходимость их союза. И снова наука и искусство выступают как дополняющие друг друга противоположности Инь—Янъ.

В последней четверти XX в. «физики» делают огромный шаг навстречу «лирикам». Дело в том, что синергетика и философия нестабильности (см. гл. 1) коренным образом изменяют наше мировидение. Если классическое естествознание рассматривало фундаментальные процессы природы как строго детерминированные (определенные) и обратимые, то синергетика рисует мир множественным и принципиально непредсказуемым. В свете идей философии нестабильности естествознание освобождается от господствовавшего в нем на протяжении трех столетий гипноза рациональной предопределенности. Наука становится столь же раскрепощенной, как и искусство.

Если развитие науки XVII—XVIII вв. проходило под знаком ньютоновой механики и лейбницева «Алфавита человеческого мышления», на котором великий философ надеялся записать все истинные высказывания во всех областях знания, если наука XIX в. была увлечена лапласовой идеей мировой машины, по состоянию которой на сегодня можно было бы предсказать весь ход событий во Вселенной завтра, включая поведение животных и человека, то в конце XX в. президент Международного союза чистой и прикладной математики Джеймс Лайтхилл подвел итог этим ожиданиям: «...в течение трех веков образованная публика вводилась в заблуждение апологией детерминизма, основанного на системе Ньютона, тогда как можно считать доказанным, по крайней мере с 1960 г., что этот детерминизм является ошибочной позицией».

Не менее категорично, хотя и более красочно, высказывается о мировоззренческих следствиях своей теории Пригожин: «Ученые поняли, что идеализированные ситуации не принесут им универсальной отмычки; точные науки вновь, наконец, должны стать естествознанием со всем богатством оттенков, о чем ныне прочно забыто... Как и общественные науки, науки о природе не должны более предавать забвению свои социально-исторические истоки, а это уже делает необходимым теоретическое моделирование конкретной ситуации... Таким образом, любая наука становится ныне наукой гуманитарной, созданной людьми для людей. Она находится сейчас в состоянии поэтического подслушивания природы».

Итак, точные науки в XXI в. обретут богатство красок и очарование непредсказуемости, свойственные искусству. В целом же XXI в. будет веком гуманитарного знания — так считают многие широко мыслящие ученые-естественники, такие, как академики РАН математик Б. В. Раушенбах и физик Е. П. Велихов. Собственно, процесс сближения «физиков» и «лириков» уже начался, свидетельством чему слова американского астронавта Эдвина Олдрина, первого человека Земли, ступившего вместе с Нейлом Армстронгом на поверхность

М. ЭШЕР. Лист Мебиуса II. *1963 г.*

Мауриц Эшер — великий художник и геометр XX века. Его творчество отличается необычайной фантазией, обостренным видением законов симметрии окружающего мира, органической связью художественного и научного мышления. Как в XV в. Леонардо делал рисунки тел Платона, так в XX в. Эшер сделал прекрасную иллюстрацию геометрических свойств односторонней поверхности листа Мебиуса.

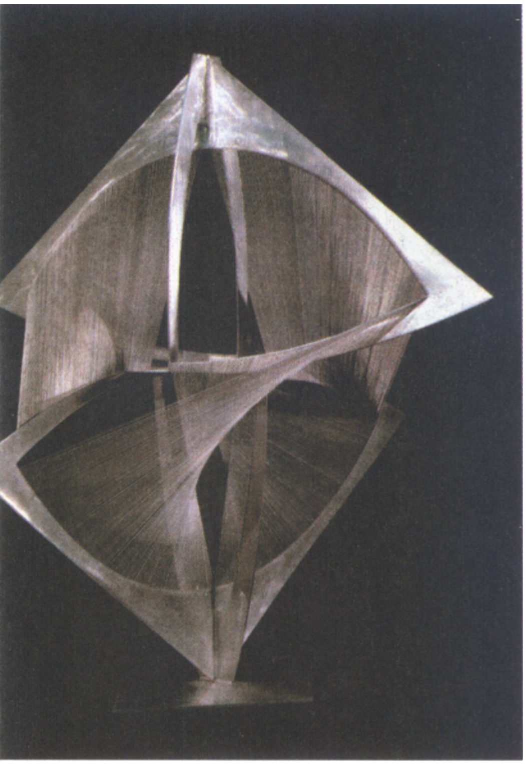
Луны: *«Я улетал технарем, а вернулся гуманитарием. Увидев Землю со стороны, я почувствовал, что являюсь частью Вселенной, а Вселенная является частью меня»*. Прекрасные слова, и как перекликаются они с другим афоризмом, стоящим на противоположном конце истории культуры, с древнейшей античной заповедью: *«Познай самого себя, и ты познаешь богов и Вселенную»!*

Итак, наука и искусство — два крыла культуры, две грани одного и того же процесса — творчества. Что же сближает и что разъединяет науку и искусство?

Задача научного творчества состоит в нахождении объективных законов природы, которые не зависят от индивидуальности ученого. Поэтому творец науки стремится не к самовыражению, а к установлению объективных истин, ученый обращается к разуму, а не к эмоциям. Более того, ученый понимает, что его произведения носят преходящий характер и через некоторое время будут вытеснены новыми теориями. Как сказал Эйнштейн, «лучший жребий физической теории — послужить основой для более общей теории, оставаясь в ней предельным случаем».

Никто, кроме людей, занимающихся историей науки, не читает труды ученых в подлинниках. Да и трудно сегодня разобраться, скажем, в «Математических началах натуральной философии» Ньютона, хотя законы Ньютона известны каждому. Язык науки стремительно меняется и для новых поколений становится непонятным. Таким образом, в науке остаются жить лишь объективные законы, открытые ученым, но не субъективные средства их выражения.

В искусстве все наоборот. Задача художественного творчества — это созидание новой реальности на основе субъективных мыслей и переживаний ее создателя. Произведение искусства всегда индивидуально, субъективно, оно обращено сначала к чувствам, а затем к разуму и потому более понятно, чем научный труд. Истинные шедевры искусства живут вечно — и Гомер, и Бетховен, и Пушкин будут звучать, пока существует человечество, они не устаревают и не вытесняются новыми художественными произведениями.



Н. ГАБО. Вариации.
1974—1975 гг.
Наум Габо родился в Брянске, учился в Мюнхене, работал в Париже, Лондоне, США. Автор концепции «конструктивной скульптуры», он утверждал· «Я строю образ из ничего. Образ рождается изнутри, и пространство также является важнейшей его частью». Созданные из мерцающих нитей пространственные конструкции Габо отличаются изысканным геометризмом. Это геометрия и искусство, слитые воедино.

Правда, ученые имеют свое преимущество. Ученый может проверить истинность своих теорий на практике, он спокоен и уверен в том, что его творения ложатся кирпичиками в огромное здание науки. Иное дело — художник, который не имеет объективных критериев для проверки истинности своих произведений, кроме внутреннего интуитивного убеждения. Даже когда художник уверен в своей правоте, его гложет червь сомнения относительно избранной формы и ее воплощения. Поэтому, даже когда произведение создано, художник вынужден бороться за свое признание, постоянно заявлять о себе. Не случайно и Гораций, и Державин, и Пушкин не скупятся на слова в оценке собственного творчества:

Создал памятник я, бронзы литой прочней...

Я памятник себе воздвиг чудесный, вечный...

Я памятник себе воздвиг нерукотворный...

Иное дело — самооценка Эйнштейна, которого значительно меньше волнует проблема будущего своего творчества — он в нем уверен: «Быть может, мне и пришли в голову однадве неплохих мысли». Как заметил Фейнберг, «трудно представить себе, что Бор, пусть даже застенчиво, сказал: «Все-таки своими работами я воздвиг себе нерукотворный памятник».

Общность науки и искусства определяется и тем, что оба этих творческих процесса ведут к познанию истины. Стремление же к познанию генетически заложено в человеке. Известны два способа познания: первый основан на выявлении общих признаков познаваемого объекта с признаками других объектов; второй — на определении индивидуальных отличий познаваемого объекта от других объектов. Первый способ познания свойствен науке, второй — искусству.

В главе 2 была отмечена познавательная функция искусства. Но важно подчеркнуть, что научное и художественное познания мира дополняют друг друга и не могут быть сведены одно к другому или выведены одно из другого. Видимо, этим и объясняется тот факт, что не сбылся мрачный прогноз Гегеля о судьбе искусства в эпоху торжества разума. В век научно-технической революции искусство не только сохраняет свои высокие позиции в культуре, но и в чем-то приобретает даже более высокий авторитет. Ведь наука со своими однозначными ответами не может заполнить душу человека до конца и оставляет место для свободных фантазий искусства. «Причина, почему искусство может нас обогатить,— писал Нильс Бор, — заключается в его способности напоминать нам о гармониях, недоступных для систематического анализа...»

«— Мне лично,— заявил Эйнштейн,— ощущение высшего счастья дают произведения искусства, в них я черпаю такое духовное блаженство, как ни в какой другой области.

— Профессор! — воскликнул я. — Ваши слова изумляют меня как настоящее откровение! Не то чтобы я когда-нибудь сомневался в Вашей восприимчивости к искусству: я слишком часто видел, как на Вас действуют звуки хорошей музыки и с каким увлечением Вы сами играете на скрипке. Но даже в эти минуты, когда Вы, словно отрешившись от мира, целиком отдавались художественному впечатлению, я говорил себе: в жизни Эйнштейна это лишь чудесная арабеска, и я никогда бы не подумал, что это украшение жизни является для Вас источником высшего счастья.

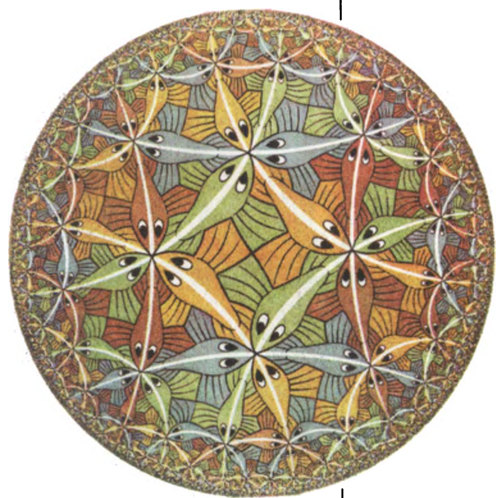
— В настоящий момент я думал главным образом о поэзии.

— О поэзии вообще? Или о каком-нибудь определенном поэте?

— Я имел в виду поэзию вообще. Но если Вы спросите, кто вызывает сейчас во мне наибольший интерес, то я отвечу: Достоевский!

Он повторил это имя несколько раз с особенным ударением, и, чтобы пресечь в корне всякие выражения, он добавил: — Достоевский дает мне больше, чем любой научный мыслитель, больше, чем Гаусс!»

Эти слова Эйнштейна, сказанные им в беседе с немецким публицистом А. Мошковским, вот уже более полувека будо-



М. ЭШЕР.
Предельный круг III. *1959 г.*
Эта гравюра Эшера — замечательное воплощение фрактального самоподобия в искусстве. Художник Эшер прочувствовал идею фрактальности значительно раньше, чем ее воплотил в компьютерные программы математик Мандельброт. Но, быть может, творчество Эшера и стимулировало развитие фрактальной геометрии?

Единственная вешь, которая доставляет мне удовольствие, кроме моей работы, моей скрипки и моей яхты,— это одобрение моих товарищей.

А. Эйнштейн

ражат умы и ученых, и художников. Тема «Эйнштейн и Достоевский» стала олицетворением проблемы взаимодействия науки и искусства. Сотни статей комментируют несколько слов великого физика, выдвигаются различные гипотезы и толкования, проводятся параллели между мечтой Достоевского о социальной и моральной гармонии и поисками универсальной гармонии мироздания, которой Эйнштейн посвятил свою жизнь. Но в одном сходятся все: наука не может развиваться без способности ученых к образному мышлению, без благотворного влияния правого полушария на левое. А мышление в образах развивает у ученого искусство.

Есть и еще одна причина, объясняющая обострение интереса ученых XX в. к искусству. Дело в том, что современная наука перешагнула рубеж собственной неприкосновенности. До Эйнштейна механика Ньютона казалась всесильной и незыблемой. Жозеф Лагранж (1736—1813) — «величественная пирамида математических наук», как сказал о нем Наполеон, — завидовал Ньютону: «Ньютон был счастливейшим из смертных, ибо существует только одна Вселенная и Ньютон открыл ее законы». Но вот пришел Эйнштейн и построил новую механику, в которой механика Ньютона оказалась только предельным случаем.

Последним бастионом непогрешимых и «вечных» истин в науке оставалась математика. «Среди всех наук, — писал Эйнштейн, — математика пользуется особенным уважением, основанием этому служит то единственное обстоятельство, что ее положения абсолютно верны и неоспоримы, в то время как положения других наук до известной степени спорны, и всегда существует опасность их опровержения новыми открытиями». Однако открытия XX в. вынудили математиков осознать, что и сама математика, и математические законы в других науках не есть абсолютные истины. В 1931 г. математику постиг удар ужасающей силы: 25-летним австрийским логиком Куртом Геделем была доказана знаменитая теорема, согласно которой в рамках любой системы аксиом существуют неразрешимые утверждения, ни доказать, ни опровергнуть которые невозможно. Теорема Геделя вызвала смятение. Вопрос об основаниях математики привел к таким трудностям, что ее крупнейший представитель Герман Вейль (1885—1955) безрадостно констатировал: «...мы не знаем, в каком направлении будет найдено его последнее решение, и даже не знаем, можно ли вообще ожидать объективного ответа на него». Это был первый шаг науки XX в. на пути к новому индетерминистическому мировидению синергетики.

Разумеется, с появлением теоремы Геделя катастрофы не произошло и наука не остановилась. Наоборот, ученые еще раз убедились в том, что наука находится в постоянном движении, что конечная цель познания — «абсолютная истина» — недостижима. А как хотелось бы ученому, чтобы его любимое детище жило вечно!

Г. ЭРНИ. Эйнштейн. *Фрагмент фрески Музея этнографии в Невшателе. Швейцария. 1954 г.*

И вот ученые обращаются к искусству как сокровищнице вечных и неподвластных времени ценностей. В искусстве не так, как в науке: истинное произведение искусства есть законченный и неприкосновенный продукт творчества художника. Научный закон существует вне теории и вне ученого, тогда как закон художественного произведения рождается вместе с самим произведением. Сначала художник свободно диктует произведению свою волю, но по мере завершения работы «детище» обретает власть над создателем, и он мучительно ищет тот единственный последний штрих, найти который дано лишь большому мастеру. С этим штрихом обрывается власть художника над своим созданием, он уже бессилен изменить в нем что-либо, и оно отправляется в самостоятельный путь во времени.

Вот этот несбыточный идеал вечного совершенства, недосягаемый для научного знания, и является тем магнитом, который постоянно притягивает ученого к искусству.

Но и наука притягивает искусство. Это выражается не только в том, что появляются новые «технические» виды искусств, такие, как кино, телевидение, а в последнее время и компьютерное искусство, не только в том, что ученый все чаще становится объектом внимания художника, но и в изменении самого мировоззрения художника. Замечательного русского поэта и ученого Валерия Брюсова (1873—1924) можно назвать родоначальником «научной поэзии». В предисловии к своему сборнику стихов «Дали» Брюсов писал: «...поэт должен по возможности стоять на уровне современного научного знания и вправе мечтать о читателе с таким же миросозерцанием. Было бы неправильно, если бы поэзия навеки должна была ограничиться, с одной стороны, мотивами о любви и природе, с другой — гражданскими темами. Все, что интересует и волнует современного человека, имеет право на отражение в поэзии».

Стихотворение Брюсова «Мир N измерений» нам хочется привести здесь полностью:

Высь, ширь, глубь. Лишь три координаты.
Мимо них где путь? Засов закрыт.
С Пифагором слушай сфер сонаты,
Атомам дли счет, как Демокрит.

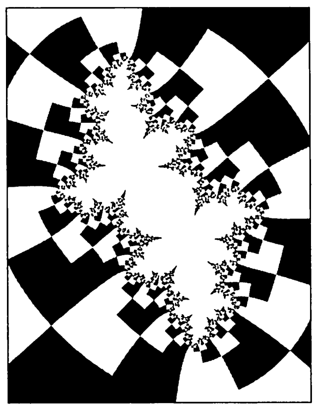
Путь по числам? — Приведет нас в Рим он
(Все пути ума ведут туда!).
То же в новом — Лобачевский, Риман,
Та же в зубы узкая узда!

Но живут, живут в N измереньях
Вихри воль, циклоны мыслей, те,
Кем смешны мы с нашим детским зреньем,
С нашим шагом по одной черте!

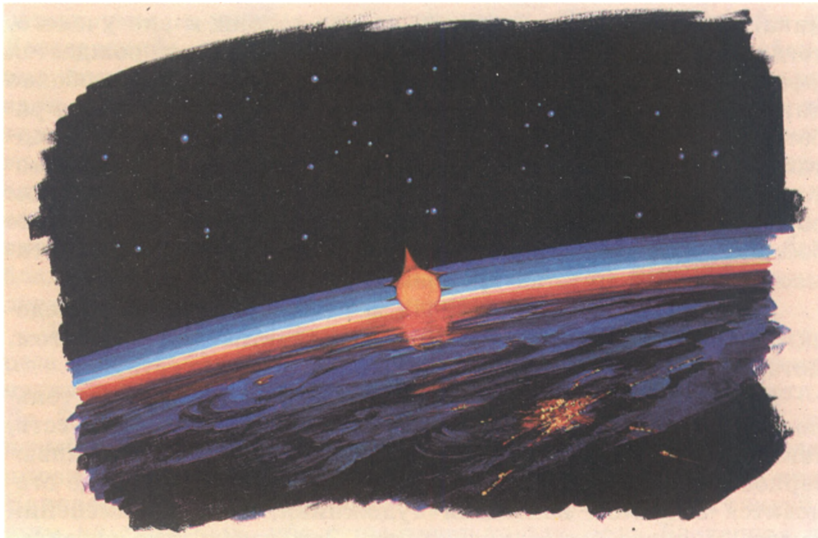
Наши солнца, звезды, все в пространстве,
Вся безгранность, где и свет бескрыл,—
Лишь фестон в том праздничном убранстве,
Чем их мир свой гордый облик скрыл.

Наше время — им чертеж на плане.
Вкось глядя, как мы скользим во тьме,
Боги те тщету земных желаний
Метят снисходительно в уме.

Н. ГАБО. Голова. *1966 г.*
Несмотря на то что эта геометрическая конструкция Наума Габо, часто именуемая «Мадонной XX века», лишена привычных признаков женской красоты, трудно оторваться от ее чарующего, рожденного пространством взгляда.



Внешние углы и двоичное разбиение множества Жюлиа при $c=-0{,}481762-0{,}531657i$.
От фрактальных орнаментов Эшера до фрактальной геометрии Мандельброта — таковы пути геометрии и искусства XX в.



А. ЛЕОНОВ. Солнечная корона. *1965 г.*
Картины летчика-космонавта СССР Алексея Леонова являются современным символом единения науки, техники и искусства.

Кажется, будто в научной поэзии Брюсова сбывается пророчество Гете: «Забыли, что наука развивалась из поэзии: не принимали во внимание соображение, что в ходе времен обе отлично могут к обоюдной пользе снова дружески встретиться на более высокой ступени».

Итак, взаимоотношение науки и искусства — сложный и трудный процесс. В науке, где требуется ум, нужна и фантазия, иначе наука становится сухой и вырождается в схоластику. В искусстве, где требуется фантазия, нужен и ум, ибо без систематического познания профессионального мастерства настоящее искусство невозможно. Наука и искусство проходят путь от нерасчлененного единства (античность и Возрождение) через противопоставление противоположностей (эпоха Просвещения) к высшему синтезу, контуры которого очерчиваются сегодня в синергетике. Синергетика не только привносит поэтическую недосказанность в современную науку, но само совместное действие науки и искусства становится неотъемлемым элементом современной культуры.

Сегодня сбываются слова писателя Максима Горького: «Наука, становясь все более чудесной и мощной силой, сама, во всем ее объеме, становится все более величественной и победоносной поэзией познания».

И хочется верить, что сбудутся слова ученого М. В. Волькенштейна: «Единство науки и искусства — важнейший залог последующего развития культуры. Нужно искать и культивировать то, что объединяет науку и искусство, а не разъединяет их. За научно-технической революцией должна последовать новая эпоха Возрождения».

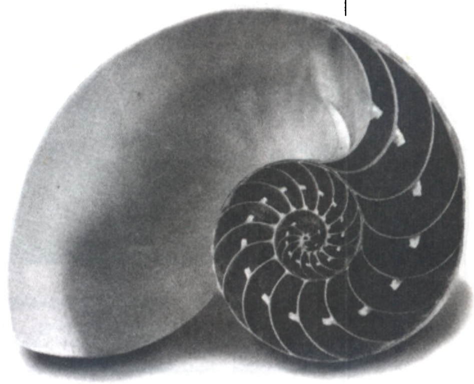
5. ФРАКТАЛЫ: НАУКА И ИСКУССТВО XXI ВЕКА

В 1953 году я понял, что прямая линия ведет человечество к упадку. Тирания прямой стала абсолютной. Прямая линия — это нечто трусливое, прочерченное по линейке, без эмоций и размышлений; это линия, не существующая в природе. И на этом насквозь прогнившем фундаменте построена наша обреченная цивилизация.

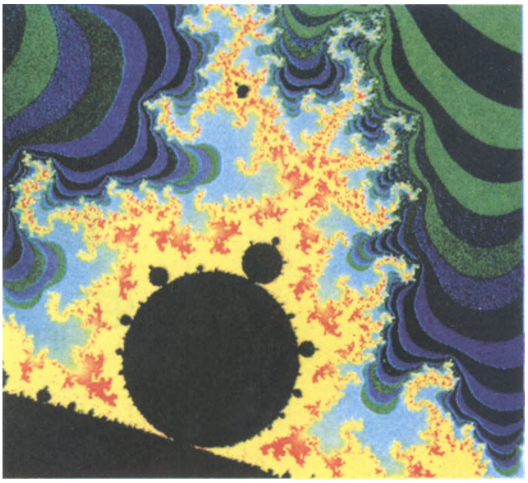
Ф. ХУНДЕРТВАССЕР

Не прошло и десятка лет, как слова Волькенштейна о новом союзе науки и искусства стали сбываться в новой невиданной геометрии и новых фантастических структурах, названных фрактальными. Фракталы поразили красотой и разнообразием форм не только математиков. В 1984 г. институтом Гете была устроена выставка «Границы хаоса», представлявшая собой «живописные портреты» фрактальных структур, выполненные математиками и физиками Бременского университета под руководством Петера Рихтера и Ханца-Отто Пайтгена. Выставка обошла весь мир и имела сенсационный успех. Каталог выставки, в котором, как признавались сами авторы, «отразилось наше шатание между наукой и искусством», был мгновенно распродан. Впервые в истории науки результаты математических расчетов демонстрировались широкой публике как произведения искусства. Излишне говорить, что все это стало возможным благодаря современным компьютерам, позволившим представить математические вычисления в палитре компьютерной графики.

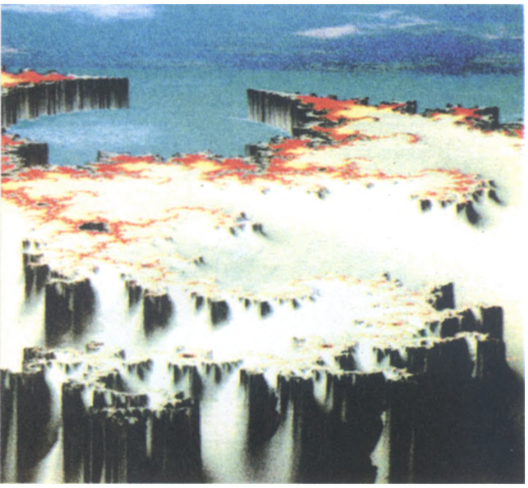
Термин *фрактал* (от лат. fractus — изломанный, дробный) ввел в употребление в 1975 г. американский математик Бенуа Мандельброт, сотрудник Исследовательского центра имени Томаса Дж. Уотсона корпорации IBM. Фракталами Мандельброт назвал структуры, обладающие двумя важнейшими признаками: изломанностью и самоподобием (любая часть структуры подобна всему целому). По-видимому, уже с первых шагов Мандельброт понимал, что стоит на пороге открытия новой геометрии, и, следуя мудрости Евклидовых «Начал», не дал новому основополагающему понятию строгого определения. «Я не стал приводить математическое определение,— вспоминал через десять лет Мандельброт,— чувствуя, что это понятие, как и хорошее вино, требует выдержки, прежде чем оно будет «разлито по бутылкам». Все фигуры, которые я исследовал и назвал фракталами, в моем представлении обладали свойством быть «нерегулярными, но *самоподобными*».



Раковина Nautilus — изумительно совершенный пример фрактальной структуры в природе. Логарифмическая спираль раковины самоподобна, ее пропорции определяются числами Фибоначчи, а значит, и коэффициентом золотого сечения. Возможно, динамической симметрией и объясняется завораживающая красота раковины.



Фрагмент множества Мандельброта в цвете.



Трехмерное представление множества Мандельброта.

Слово «подобный» не всегда имеет классический смысл «линейно увеличенный или уменьшенный», но всегда находится в согласии с удобным и широким толкованием слова «похожий».

Понятие фрактала во всей красоте его математических свойств и глубине физических следствий ворвалось в сознание математиков и физиков в 1983 г. с опубликованием основополагающей книги Мандельброта «Фрактальная геометрия природы». Еще в 1980 г. контуры ныне всемирно известного множества Мандельброта — важнейшей фрактальной структуры — едва проступали в первых черно-белых распечатках, а уже в 1984 г. оно предстало перед ошеломленной публикой на выставке «Границы хаоса» во всем своем многоцветном великолепии. В 1986 г. вышла на английском языке книга Х.-О. Пайтгена и П. Рихтера «Красота фракталов», а в 1993 г., несмотря на нашу постперестроечную разруху, книга вышла и в России. Фрактальный бум охватил всю планету и стал одной из ярких примет уходящего XX в.

Надо сказать, что триумфальному шествию фракталов в науке предшествовал долгий и мучительный инкубационный период. Как это часто бывает с великими идеями, идея фрактала была открыта, непонята и забыта. Напомним, что идее интеграла, которую Архимед фактически «держал в руках», пришлось ждать 2000 лет своего возвращения к жизни в трудах Ньютона и Лейбница. Идея фрактала также около 100 лет ожидала своего звездного часа.

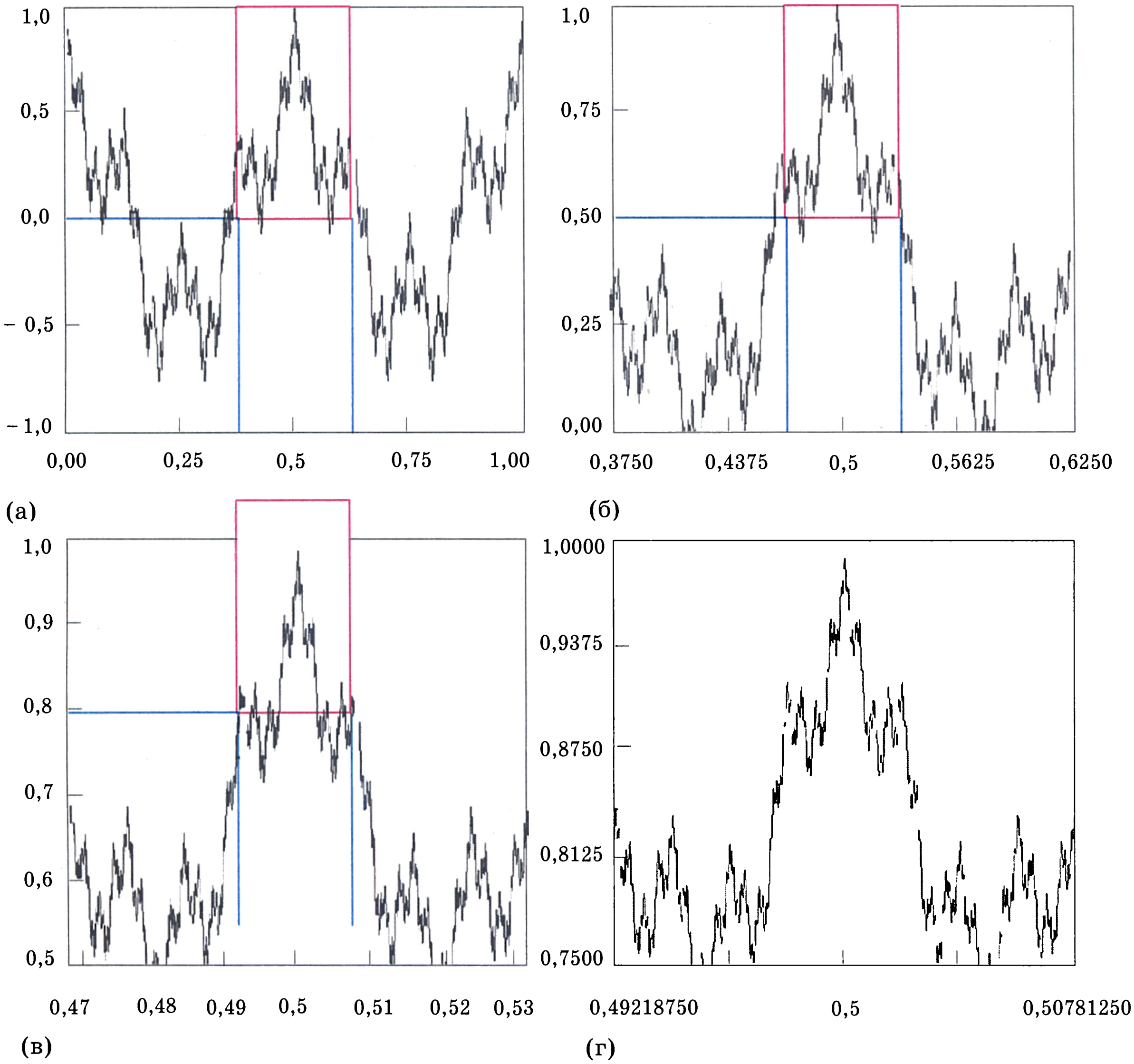
Изломанные фрактальные функции, не имеющие производной ни в одной своей точке (в точке излома, как известно, функция остается непрерывной, но теряет производную), были открыты в конце XIX в. Однако именно по эстетическим соображениям эти патологические «некрасивые» функции были решительно отвергнуты всеми математиками. Их не хотели не только изучать — о них не хотели разговаривать. «Я с ужасом и отвращением отворачиваюсь от этой разрастающейся язвы функций, не имеющих производной»,— писал французский математик Шарль Эрмит (1822—1901) своему другу голландскому математику Томасу Стилтьесу (1856—1894). Математику изломанных функций назвали *тератологией*[1] *функций* и изгнали с математического Олимпа.

Один из первых примеров непрерывной, всюду не дифференцируемой (а значит, и всюду изломанной) функции дал выдающийся немецкий математик Карл Вейерштрасс (1815—1897). Функция Вейерштрасса задается рядом Фурье — бесконечной суммой тригонометрических функций

$$W(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \qquad a<1,\ b>1,\ ab>1.$$

Она обладает сложной изломанной структурой и является *самоподобной*: форма функции остается неизменной при растяжении в b раз вдоль оси абсцисс и в $1/a$ раз вдоль оси ординат. На рисунке *а* показана функция Вейерштрасса при $a=0{,}5$ и $b=4$ и три последовательных увеличения ее центральной части (*б, в, г*). Рисунок *б* получен четырехкратным увеличением вдоль

[1] *Тератология* (от греч. τερας — чудо, чудовище) — раздел медицины и биологии, изучающий пороки развития человека, животных и растений.



Самоподобие функции Вейерштрасса: каждый последующий график есть увеличенная копия выделенного на предыдущем графике фрагмента. Все четыре графика полностью совпадают, хотя их масштабы разные.

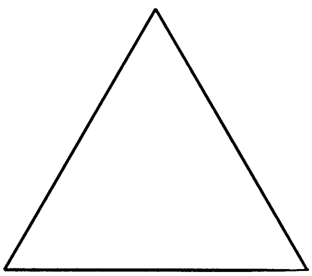
оси абсцисс и двукратным увеличением вдоль оси ординат части функции, заключенной в прямоугольник на рисунке *а*. Рисунок *в* есть увеличенное изображение прямоугольника на рисунке *б*, а рисунок *г* — увеличенное изображение прямоугольника на рисунке *в*. Легко видеть, что заключенные в прямоугольник части функции не просто «похожи», а являются точными копиями предыдущего целого, т. е. функция Вейерштрасса является самоподобной в линейном классическом смысле. Образно говоря, рассматривая функцию Вейерштрасса во все более сильную лупу, мы видим в ее частях зародыши целого. Бесконечно малая часть функции генерирует форму всего целого. Все это сильно напоминает ситуацию с геномом (набором генов) человека или животного, когда одна клетка живого организма содержит информацию обо всем целом. И в этом один из важных моментов для понимания обширнейших приложений фрактальных функций.

Вейерштрасс также отвернулся от своей патологической функции. Скорее всего, мудрый старец понимал, что рожденное им на склоне лет детище не принесет ничего, кроме всеобщего неприятия. Так же полвеком ранее поступил и другой немецкий мудрец Карл Гаусс, решивший не предавать огласке свое открытие новой неевклидовой геометрии. В самом деле, если любая сколь угодно малая часть функции Вейерштрасса повторяет всю функцию в целом, то чему же равна ее длина? Очевидно, бесконечности? Вопрос о длине фрактальной линии в конце XIX в. остался без ответа. Но он неожиданно «всплыл» во второй половине XX в. у берегов Британии.

Береговая линия Англии — пример сложного нелинейного фрактала.

Британское военно-морское ведомство, по-видимому, решило навести порядок в своем департаменте и поручило известному английскому физику Л. Ричардсону измерить длину береговой линии «владычицы морей». Не мудрствуя лукаво, Ричардсон избрал стандартный для этого случая прием: он заменил на карте истинную береговую линию замкнутой ломаной, составленной из отрезков прямых равной длины δ, вершины которых располагались на побережье. Длина ломаной $L(\delta)$ принималась за приближенное значение длины побережья, соответствующее выбранному значению δ. Далее оставалось перейти к пределу при $\delta \to 0$ и найти точное значение длины побережья L, ибо каждому первокурснику известно, что предел подобной ломаной при $\delta \to 0$, составленной для непрерывно дифференцируемой на промежутке $[a, b]$ функции $f(x)$, не зависит ни от длины элементов ломаной δ, ни от способа построения ломаной и равен длине L функции $f(x)$, вычисляемой по формуле

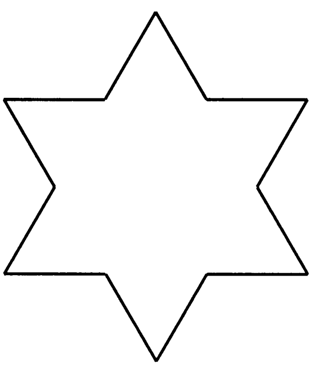
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,.$$



$n=0$

Однако, в отличие от гладких непрерывно дифференцируемых функций, линия побережья Англии оказалась настолько изрезанной и изломанной вплоть до самых малых масштабов карты, что с уменьшением звеньев δ длина ломаной $L(\delta)$ не стремилась к конечному пределу, а становилась бесконечно большой. Ричардсону удалось эмпирически установить характер стремления $L(\delta)$ к бесконечности, который выражался степенной функцией

$$L(\delta) = C\delta^{1-D}, \tag{5.1}$$



$n=1$

где $C=\mathrm{Const}>0$ и $D=\mathrm{Const}>1$. Для побережья Англии $D\approx 1{,}24$, поэтому $L(\delta)=C/\delta^{0{,}24}$ и ясно, что $L(\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$. Более того, для других береговых линий получались другие значения параметра D $(1<D<2)$, причем, чем более изрезанной была линия, тем большие значения D соответствовали ей. Таким образом, параметр D можно использовать в качестве характеристики меры изломанности, *фрактальности* функции.

Но оставим хаос изломов береговой линии Англии и попробуем подсчитать длину более упорядоченного и не менее красивого фрактального острова, открытого в 1904 г. немецким математиком Хельгой фон Кох и называемого *звездой Кох*. Начало пути и алгоритм действий будут на удивление простыми — и в этом одно из важнейших эстетических свойств фракталов: *простота и единство, ведущие к поразительной сложности и разнообразию*. Итак, рассмотрим равносторонний треугольник со стороной $l=1$ и применим к нему следующий алгоритм преобразований: *каждый прямолинейный элемент делится на три части, на средней части строится меньший равносторонний треугольник и его основание отбрасывается*. Следуя этому алгоритму, на первом шаге ($n=1$) вместо треугольника получим шестиконечную звезду Давида с 12 сторонами. Повторяя алгоритм для каждой из 12 сторон, на втором шаге ($n=2$) получим 48-стороннюю звезду и т. д. Четыре последовательных стадии преобразования исходного треугольника показаны на рисунке. Каждая из этих фигур называется *предфракталом*, и их самоподобие очевидно. Настоящий фрактал получится при $n \to \infty$, но, как и все настоящее, его никто никогда не увидит.

В отличие от побережья Англии звезда Кох состоит из ломаных, и мы можем приступить к нахождению ее длины L. В начальной стадии ($n=0$) длина элементов ломаной $\delta_0=l=1$, число элементов $N(\delta_0)=N(1)=3$ и длина звезды (пока еще равностороннего треугольника) $L(\delta_0)=N(\delta_0)\delta_0=3$, или $L(1)=3$.

При $n=1$, очевидно, имеем:

$$\delta_1=1/3\cdot\delta_0=1/3,\ N(\delta_1)=4N(\delta_0)=3\cdot 4,$$
$$L(\delta_1)=N(\delta_1)\delta_1=12\cdot 1/3=3\cdot 4/3.$$

На втором шаге при $n=2$ получим:

$$\delta_2=1/3\cdot\delta_1=(1/3)^2,\ N(\delta_2)=4N(\delta_1)=4^2N(\delta_0)=3\cdot 4^2,$$
$$L(\delta_2)=N(\delta_2)\cdot\delta_2=3\cdot(4/3)^2.$$

Наконец, на k-м шаге при $n=k$ будем иметь:

$$\delta_k=(1/3)^k,\ N(\delta_k)=3\cdot 4^k,\quad L(\delta_k)=3\cdot(4/3)^k. \qquad (5.2)$$

Так как $4/3>1$, то ясно, что при $k\to\infty$ значение $L(\delta_k)\to\infty$. Таким образом, длина фрактальной звезды Кох стремится к бесконечности!

Представим выражение (5.2) длины фрактальной линии в ином виде. Так как

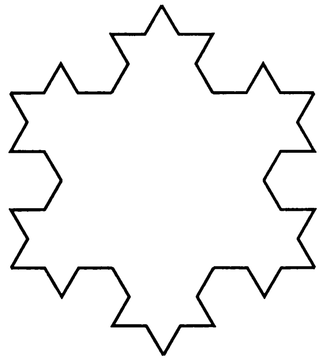
$$\delta_k=3^{-k}\Rightarrow \ln\delta_k=-k\ln 3\Rightarrow k=-\ln\delta_k/\ln 3$$

и

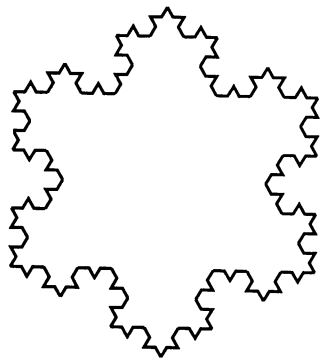
$$(4/3)^k=(e^{\ln 4/3})^k=e^{k\ln 4/3}=e^{-(\ln\delta_k/\ln 3)(\ln 4-\ln 3)}=e^{\ln\delta_k(1-\ln 4/\ln 3)}=\delta_k^{\,1-\ln 4/\ln 3},$$

то (5.2) примет вид

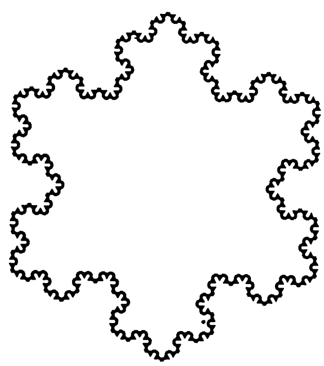
$$L(\delta_k)=3\delta_k^{\,1-\ln 4/\ln 3}=3\delta_k^{\,1-D},\ D=\ln 4/\ln 3. \qquad (5.3)$$



$n=2$

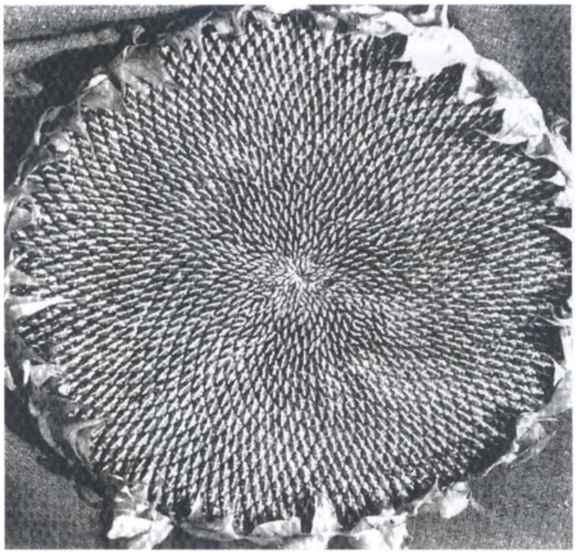


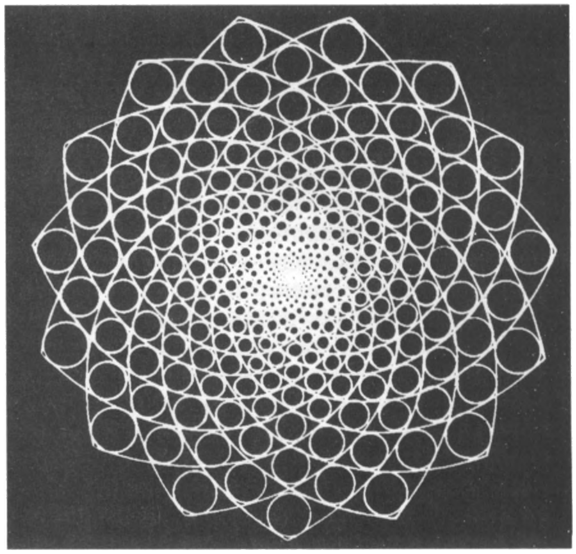
$n=3$



$n=4$

Звезда Кох — простой и красивый линейный фрактал.





Розетка подсолнечника (*слева*) и ее геометрия (*справа*). Розетка подсолнечника — еще один пример спиралевидного фрактала в природе. В отличие от одной спирали раковины Наутилуса, подсолнечник имеет два противоположно закрученных семейства спиралей. Число левых и правых спиралей равно двум соседним числам Фибоначчи, например 89 и 144, а их отношение с точностью 0,00001 равно коэффициенту золотого сечения.

Таким образом, длина звезды Кох (5.3), так же как и длина побережья Англии (5.1), стремится к бесконечности по степенному закону со своим показателем степени

$$D=\frac{\ln 4}{\ln 3}=1{,}2628.$$

Но справедливо ли вообще понятие длины к фрактальной линии? Поскольку каждая сколь угодно малая часть фрактальной линии содержит в себе уменьшенную копию всей линии, то, значит, она состоит не из точек, а из функций. И, следовательно, это уже не линия в евклидовом смысле — «длина без ширины», а нечто большее, некая «толстая линия». Ну как тут не вспомнить знаменитого скептика античности Секста Эмпирика, который в сочинении «Против ученых» писал во II в. н. э.: «Геометры говорят, что линия есть длина без ширины, а мы, скептики, не можем понять длины, не имеющей ширины, ни в чувственном, ни в умопостигаемом»! Насколько актуальными стали через 2000 лет слова Секста Эмпирика в отношении фрактальных линий! Так что же такое фрактал — одномерная линия, двумерная фигура или нечто среднее между ними?

Так мы подошли к одной из важнейших характеристик геометрического множества — его *мере*. Будем исходить из того интуитивно понятного факта, что *длиной* L элементарного отрезка прямой δ является сам отрезок $L=\delta$, *площадью* S квадрата со стороной δ является величина $S=\delta^2$ и *объемом* V куба со стороной δ является $V=\delta^3$. В общем случае можно сказать, что *мерой* M *элементарного* d*-куба* со стороной δ является величина $M=\delta^d$, где d — размерность куба ($d=1$ для отрезка, $d=2$ для квадрата, $d=3$ для куба). Ясно, что мера M_d произвольного d-мерного множества приблизительно равна числу

$N(\delta)$ элементарных d-кубов, содержащихся в множестве, умноженному на меру элементарного d-куба $M_d \approx N(\delta)\delta^d$, а точное значение меры множества получается предельным переходом при $\delta \to 0$

$$M_d = \lim_{\delta \to 0} N(\delta)\delta^d. \qquad (5.4)$$

Понятно, что d-мерное множество нужно измерять d-мерными кубами — только в этом случае можно получить имеющее смысл конечное значение меры. В самом деле, поскольку для одномерной линии длины L_0 число элементарных отрезков длины δ, умещающихся в ней $N(\delta) \approx L_0/\delta$, для двумерной фигуры площади S_0 $N(\delta) \approx S_0/\delta^2$, для трехмерного тела объема V_0 $N(\delta) \approx V_0/\delta^3$ и в общем случае для d-мерного множества меры M_0 $N(\delta) \approx M_0/\delta^d$, то только в этом случае мы получаем конечное значение меры множества $M_d \approx N(\delta)\delta^d \approx M_0\delta^{d-d} = M_0$. Если теперь предположить, что мы заранее не представляем размерность множества и D-мерное множество, для которого $N(\delta) \approx M_0/\delta^D$, будем измерять d-мерными кубами меры $M = \delta^d$, то для меры M_d D-мерного множества мы будем иметь

$$M_d \approx N(\delta)\delta^d \approx M_0\delta^{d-D}.$$

Ясно, что когда $d = D$, то $M_d \approx M_0$, т. е. мера множества будет конечной. Когда $d > D$, то $M_d \to 0$ при $\delta \to 0$ и когда $d < D$, то $M_d \to \infty$ при $\delta \to 0$. Значит, если множество измерять большей мерой, то его мера будет равна нулю, а если множество измерять меньшей мерой, то его мера будет бесконечной. Например, если двумерный квадрат измерять трехмерными кубами, то мера квадрата будет равна нулю, т. е. с точки зрения куба мера квадрата нулевая, что вполне понятно. И наоборот, если тот же двумерный квадрат измерять одномерными отрезками, то мера квадрата будет равна бесконечности, т. е. для измерения квадрата требуется бесконечно много одномерных отрезков.

Но ведь именно с такой ситуацией мы и столкнулись при измерении фрактальных линий! Мы считали звезду Кох одномерной линией ($d = 1$) и получили, что ее длина, вычисляемая по формуле (5.3), стремится к бесконечности: $L = 3\delta^{1-D} \to \infty$ при $\delta \to 0$, $D = \ln 4/\ln 3 > 1$. Значит, к фракталу мы подошли с меньшей мерой ($d = 1$), а должны подойти с мерой $d = D = \ln 4/\ln 3$ — только в этом случае мы получим конечную длину. Значит, размерность звезды Кох не целое число $d = 1$, а дробная величина $d = D = \ln 4/\ln 3 > 1$! Итак, *фрактал имеет дробную размерность* — не чудо ли это?!

Фрактальная линия уже не одномерная евклидова линия, но еще и не двумерная фигура! *Фрактальная линия есть некая «толстая линия» дробной размерности* $1 < D < 2$! Вспоминая береговую линию Англии, приходим к еще одному удивительному свойству: *каждый фрактал обладает собственной дробной размерностью.* Также и фрактальная поверхность — это уже не поверхность размерности $d = 2$, но еще и не объемное тело размерности $d = 3$. *Фрактальная поверхность есть некая «вспененная поверхность» дробной размерности* $2 < D < 3$!

Когда в начале XX в. немецкий математик Феликс Хаусдорф (1868—1942) и выходец из России Абрам Безикович[1] (1891—1970) независимо друг от друга нашли формулу для вычисления размерности D произвольного множества, они не могли и вообразить, сколь реальными станут их математические фантазии в конце века. Опуская математические тонкости, можно сказать, что Хаусдорф и Безикович прологарифмировали выражение меры множества (5.4):

$$\ln M_d = \lim_{\delta \to 0} \ln N(\delta) + d \lim_{\delta \to 0} \ln \delta,$$

откуда, учитывая, что $\lim\limits_{\delta \to 0} (\ln M_d / \ln \delta) = 0$, нашли формулу для вычисления параметра d, который сегодня называют *размерностью Хаусдорфа — Безиковича*:

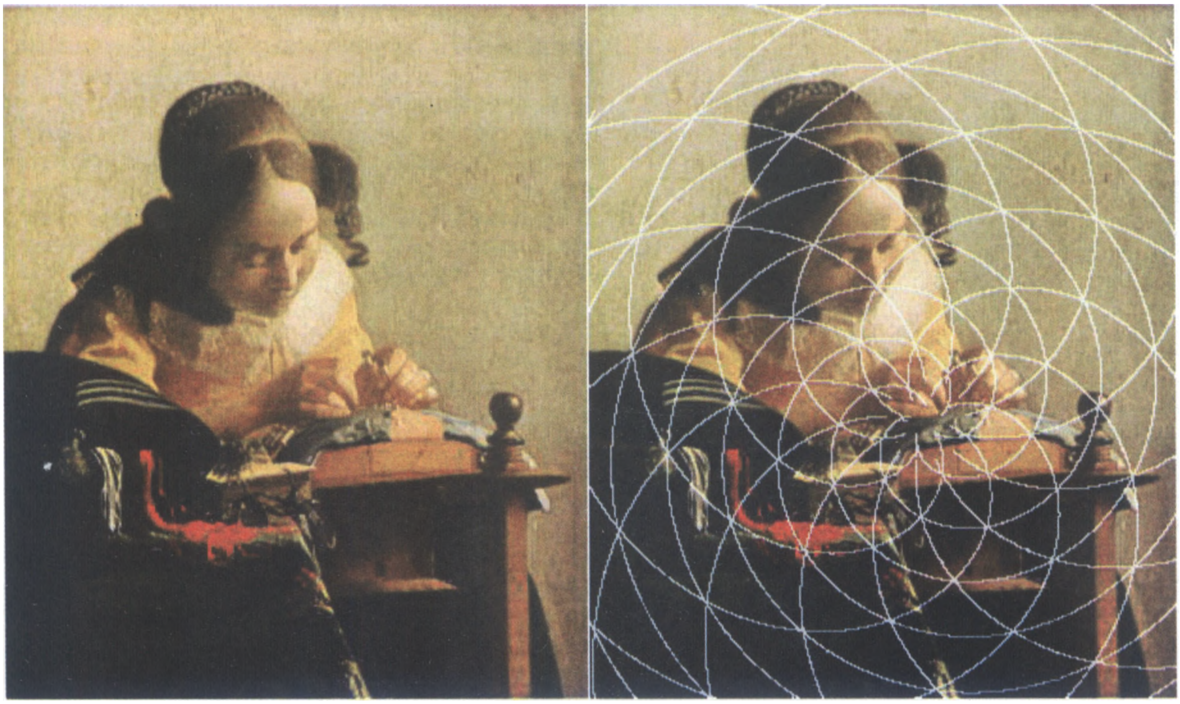
$$d = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln (1/\delta)}. \tag{5.5}$$

Для одномерной линии $N(\delta) \approx L_0/\delta$ и размерность d Хаусдорфа — Безиковича, согласно (5.5), равна 1. Для двумерной фигуры $N(\delta) \approx S_0/\delta^2$ и $d=2$. А вот для звезды Кох $N(\delta)=3 \cdot 4^k$, $1/\delta = 3^k$ и $d = \ln 4 / \ln 3$. Пользуясь понятием размерности Хаусдорфа — Безиковича, Мандельброт дал еще одно определение фрактала: *фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа — Безиковича которого больше его топологической размерности,* т. е. размерность фрактальной линии $D>1$, размерность фрактальной поверхности $D>2$ и т. д.

Помимо дробной размерности, еще одним удивительным свойством фракталов является их широчайшее распространение в природе. Как оказалось, фракталы окружают нас всюду. Причудливые очертания береговых линий и замысловатые извилины рек, изломанные поверхности горных хребтов и гладкие самоподобные вздутия облаков, раскидистые ветви деревьев и разветвленные сети кровеносных сосудов и нейронов, робкое мерцание пламени свечи и вспененные турбулентные потоки горных рек — все это фракталы. Одни фракталы, типа облаков или бурных потоков, постоянно изменяются, другие, подобные деревьям или нейронным сетям, сохраняют свою структуру неизменной. Как долго человечество шло к осознанию единства того, что его окружает на каждом шагу в своем неисчерпаемом многообразии!

Язык фрактальной геометрии природы оставался непонятным человечеству вплоть до появления в 1983 г. книги Мандельброта «Фрактальная геометрия природы». До этого времени в течение двух с половиной тысячелетий естествоиспытатели говорили на языке геометрии Евклида. Идеально регулярные образы — прямая и плоскость, треугольник и пирамида, окружность и сфера — составляли основу этого языка и всей научной картины мира. Это регулярно-геометрическое кредо сформулировал в 1623 г. Галилео Галилей: «Философия природы написана в величайшей книге — я разумею Вселенную,— которая всегда открыта перед нашими глазами, но понять ее сможет лишь тот, кто сначала выучит язык и постигнет письмена, которыми она начертана. А написана эта книга на

[1] Хаусдорф и Безикович были евреями. Хаусдорф вместе с женой и ее сестрой покончил с собой, чтобы избежать депортации в концлагерь. У входа в Математический институт Боннского университета висит мемориальная доска: «В этом университете с 1921 по 1935 год работал математик Феликс Хаусдорф (8.11.1868—26.01.1942). Он умер по вине национал-социалистов из-за того, что был евреем. В его лице мы чтим память всех жертв тирании. Пусть никогда не повторится диктатура и война!» Безикович также посетил сей мир в его минуты роковые. Но он был моложе и решительнее. Закончив в 1912 г. Санкт-Петербургский университет, он бежал из России по тонкому льду от другой диктатуры — большевистской. В последний момент от побега отказался его друг Александр Фридман (1888—1925), талантливый математик и механик, автор знаменитой теории расширяющейся Вселенной. Фридман вскоре умер от тифа, а Безикович после нескольких лет скитаний по Европе осел в Кембридже. В 1950 г. он занял кафедру знаменитого английского математика Джона Литлвуда. Среди кембриджских друзей Безиковича был Петр Капица.

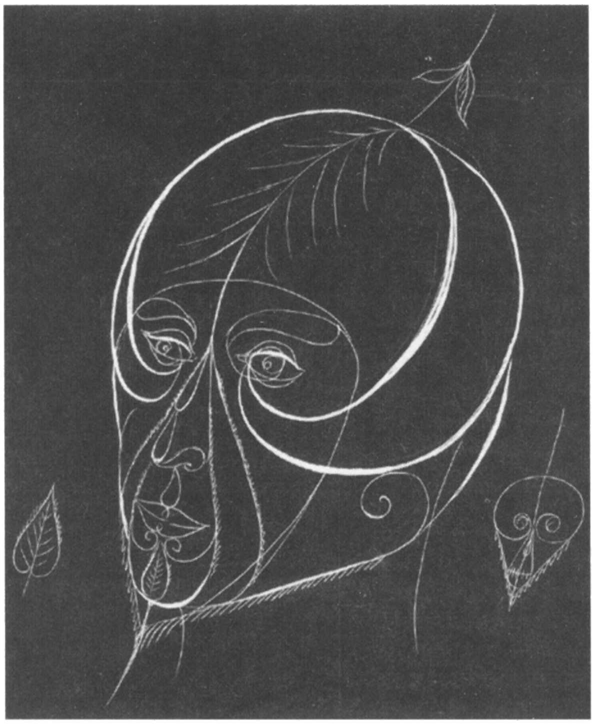


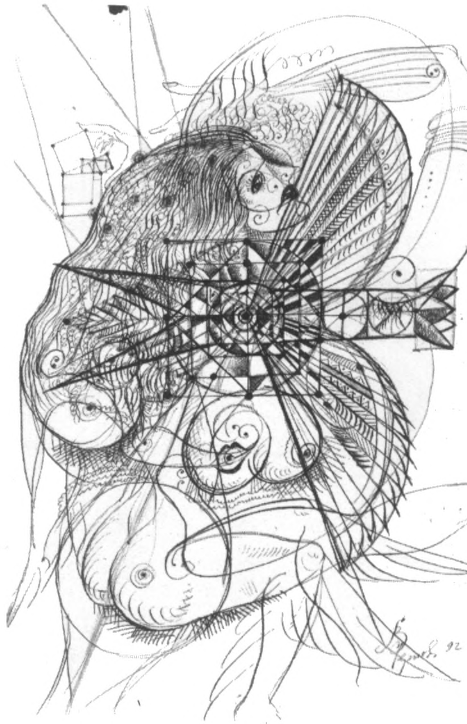
Я. ВЕРМЕР. Кружевница. *1665—1670 гг. (слева).* Компьютерная графика московского математика Д. Вейзе *(справа).* Сальвадор Дали считал «Кружевницу» картиной, исполненной неистовой эстетической силы. Дали долго искал объяснение волшебной силы, пока не обнаружил в основе ее композиции фрактальную розетку подсолнуха с центром на иголке вышивальщицы. Две соседние однонаправленные спирали образуют фигуру, похожую на рог носорога, которую Дали считал основным формообразующим элементом в искусстве.

языке математики, и письмена ее — треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без коих нельзя понять по-человечески ее слова: без них — тщетное кружение в темном лабиринте».

Потребовалось еще 350 лет кружения естествознания по прямым и окружностям, прежде чем оно обрело качественно новый язык фрактальной геометрии. Фрактальная геометрия — это революция в математике и математическом описании природы, возможно, равная по силе революции интегрального и дифференциального исчисления Ньютона и Лейбница. Вот как об этом пишет сам первооткрыватель фрактальной геометрии Бенуа Мандельброт: «Почему геометрию часто называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака — это не сферы, горы — это не конусы, линии берега — это не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой... Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно.

Существование этих структур бросает нам вызов в виде трудной задачи изучения тех форм, которые Евклид отбросил как бесформенные,— задачи исследования морфологии аморфного. Математики, однако, пренебрегли этим вызовом и предпочли все больше и больше отдаляться от природы, изобретая теории, которые не соответствуют ничему из того, что можно увидеть или почувствовать».





В. ЧЕРНОВ. Мыслящий лист. *1986 г. (слева).*
В. ЧЕРНОВ. Мечты. *1992 г. (справа).*
Творчество саратовского художника Владимира Чернова отличается обостренным видением фрактального самоподобия в формообразовании Графические работы Чернова иллюстрируют неограниченные возможности самоподобия спирали в создании художественной формы.

Широчайшая распространенность фрактальных структур в природе объясняется их разномасштабностью и самоподобием: и большие, и малые масштабы фрактальных структур имеют одинаковый закон построения. Форма фрактальной структуры, разглядываемая в микроскоп с любым увеличением, видится одной и той же. Но ведь этот закон сохранения формы в малом и большом, или геометрическое подобие, и есть основной принцип роста всего живого, который называют также *иерархическим принципом организации.* Законы ветвления самой тоненькой веточки дерева абсолютно те же, что и для всех его ветвей — больших и малых — и для всего ствола в целом. Простейшим и наиболее распространенным принципом самоподобного роста в природе является принцип *дихотомии* (греч. διχοτομεω — разделять пополам) — *деления пополам.*

Самоподобный (пропорциональный) рост живой формы, начинающийся в одной точке пространства и распространяющийся по всем его направлениям, описывается векторным уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$, которое при различных соотношениях между вектором экспансии $\boldsymbol{M}$ и вектором внешних сил $\boldsymbol{N}$ дает поразительное многообразие форм живой природы: формы яйца, яблока, черепа, лучеобразных раковин типа гребешков и спиралевидных раковин типа амонитов и т. д. Но и в неживой природе все то же самоподобие разномасштабных структур приводит к неисчислимому многообразию форм и облаков, и молний, и горных рельефов. Таким образом, *принцип пропорции — симметрии подобия,* или, как ее часто называют, *динамической симметрии,* — лежит в основе организации природных фрактальных структур и обеспечивает их повсеместное распространение.

Задать фрактальную структуру — значит задать не застывшую, неизменную форму, а задать принцип роста, закон изменения формы. Как правило, алгоритм построения формы выглядит значительно проще, чем результат его воплощения — сама форма. Поэтому фрактал дает фантастически компактный способ описания самых экзотических форм. В самом деле, попробуйте описать форму звезды Кох всего лишь на четвертом шаге ее построения ($n=4$), когда звезда имеет $N(\delta_4)=3\cdot4^4=768$ сторон! А ведь у звезды Кох все ее элементы есть отрезки прямых — это простейшая фрактальная структура. Но при традиционном — *статическом* — способе описания уже на четвертом шаге она потребует 768 уравнений. В то же время *динамический* способ описания той же звезды в виде алгоритма ее построения (см. с. 67) прост и единообразен на любом шаге. Итак, *фрактал не есть конечная форма* (фрактал никто никогда не видел, так же как число π), *а есть закон построения этой формы. Фрактал аккумулирует в себе идею роста. Фрактал есть ген формообразования.* Отсюда необычайная компактность в задании фрактальных структур. Единый алгоритм роста приводит к огромному многообразию конкретных структур на конкретных стадиях роста. А если учесть и возможное изобилие самих алгоритмов роста, то многообразие фрактальных структур станет просто неисчерпаемым. Таким образом, во фрактальных структурах мы находим яркое выражение главного эстетического принципа — принципа единства в многообразии.

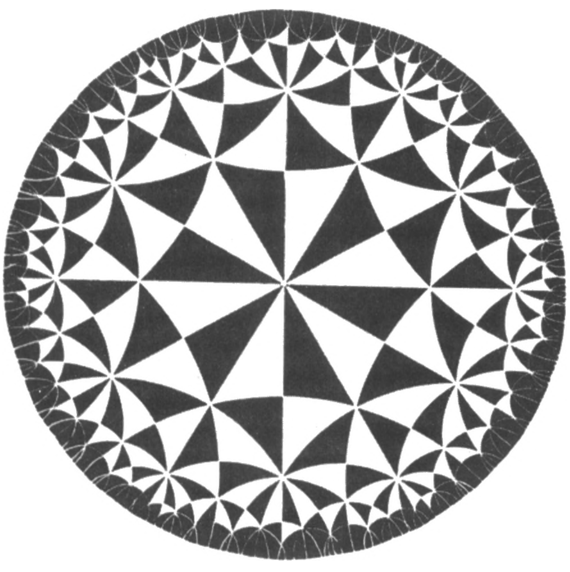
Фрактальные структуры встречаются в природе как в подвижном, развивающемся во времени состоянии — это облака и вообще турбулентное движение атмосферы, сообщества кле-

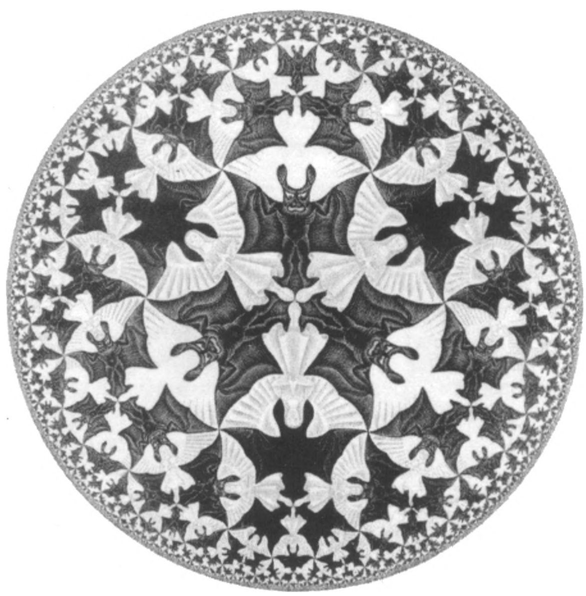
Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского на круге. *Нелинейная фрактальная структура (слева).*

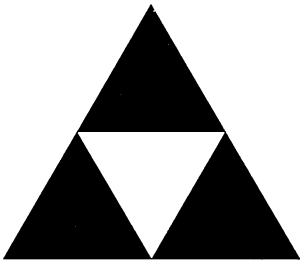
М. ЭШЕР.

Предельный круг IV. *1960 г. (справа).*

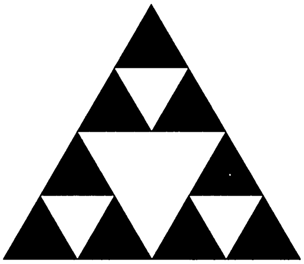
Подобно Баху в музыке, Эшер был необычайно сильным математиком в графике. Эшер первым перешел от «евклидовых» равноповторяющихся орнаментов к «неевклидовым» равноизменяющимся орнаментам.



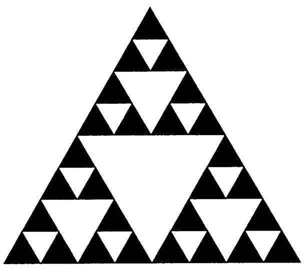




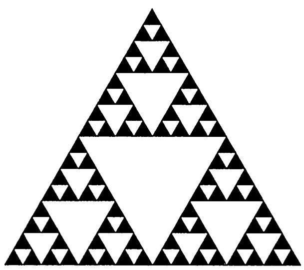
$n=1$



$n=2$



$n=3$



$n=4$

Треугольники Серпиньского — простейший линейный фрактал.

ток и растущие живые организмы, так и в неподвижном, стационарном виде — поверхность гор и контуры береговых линий, выросшие деревья и т. д. Общим для нестационарных и стационарных фрактальных структур является их самоподобие: в первом случае — неизменность законов развития структуры в различных масштабах времени, во втором — инвариантность формы в разных пространственных масштабах. Но и в том и в другом случае *отличительной особенностью фрактальных форм является их балансирование на границе Космоса и Хаоса.*

В самом деле, регулярны или нерегулярны фрактальные структуры? И горы, и облака, и ветви деревьев, и зигзаги молний, и русла рек с первого взгляда кажутся нам абсолютно хаотическими образованиями. Но, «приглядевшись», изучив фрактал, мы обнаруживаем за кажущимся хаосом порядок закона роста фрактальной формы. При более пристальном рассмотрении мы вновь обнаружим нарушения этого закона хаосогенными силами. Возможно, затем нам откроется регулярность нерегулярных сил и так далее. Так что *фрактальные структуры выступают неким пограничным образованием между Космосом и Хаосом, и именно это свойство придает им особую эстетическую привлекательность.* Недаром авторы книги «Красота фракталов» Х.-О. Пайтген и П. Рихтер заметили: «Возможно, наиболее убедительный аргумент в пользу изучения фракталов — это их бросающаяся в глаза красота».

Как обнаружила современная нелинейная динамика, возникновение хаоса возможно даже в *детерминированных физических системах,* т. е. в системах, поведение которых описывается строгим набором правил (читай: дифференциальных уравнений), позволяющих определить будущее системы по ее настоящему. Вот почему такой тип беспорядка или принципиальной непредсказуемости называется *детерминированным хаосом.* При определенных условиях в диссипативных системах возможен и обратный переход — рождение упорядоченных структур из первоначального беспорядка. Фрактальные структуры как раз и являются внешним проявлением такого внутренне неравновесного состояния системы, балансирующего между порядком и хаосом. Поэтому можно сказать, что *фрактальная геометрия есть геометрия хаоса, рождающего порядок, и геометрия порядка, рождающего хаос.*

Итак, во фрактальной геометрии современное естествознание нашло новый язык для описания взаимных переходов Космоса и Хаоса и, значит, как это следует из главы 1, и новый язык для описания красоты. «Язык, — пишет Пайтген с соавторами,— это очень подходящая метафора для концепции, лежащей в основе фрактальной геометрии. Как известно, индоевропейские языки базируются на алфавите с конечным числом букв (например, английском, включающем 26 букв). Буквы не несут в себе никакого смыслового значения до тех пор, пока они не соединены в слова. Точно так же евклидова геометрия состоит из нескольких элементов (прямая, окружность и т. д.), из которых строятся сложные объекты, геометрически выражающие некий смысл.

С другой стороны, азиатские языки, например китайский, состоят из символов, которые сами по себе уже выражают смысловое значение. Количество возможных символов, или элементов, этих языков произвольно велико и может считаться бесконечным. Аналогично можно рассматривать и фрактальную геометрию. Она состоит из бесконечного количества элементов, каждый из которых является завершенным и единственным в своем роде. Геометрические элементы определяются алгоритмами, которые функционируют как единицы «смыслового значения» в рамках фрактального языка».

Фрактальные языки можно разделить на два основных класса: *линейные* и *нелинейные*. Линейные фракталы — это фракталы, чьи алгоритмы роста определяются линейными функциями, т. е. уравнениями первого порядка. Звезда Кох — типичный пример линейного фрактала. В линейных фракталах самоподобие проявляется в самом бесхитростном, «прямолинейном» виде: *любая часть целого есть точная копия целого.* В этом свойстве линейных фракталов легко убедиться, глядя на звезду Кох. Еще одним классическим примером линейного фрактала является *треугольник Серпиньского*, названный в честь польского математика Вацлава Серпиньского (1882—1969), который впервые описал свойства этого треугольника в 1916 г. Алгоритм построения треугольника Серпиньского очевиден из рисунка: *из исходного равностороннего треугольника, закрашенного черным цветом, выбрасывается вписанный в него равносторонний треугольник.* Четыре предфрактала Серпиньского, называемые также салфетками Серпиньского, показаны на рисунке.

В. ЧЕРНОВ.
Фрактальная голова. *1980 г.*

Нелинейные фракталы — это фракталы, задаваемые нелинейными алгоритмами роста, т. е. уравнениями степени выше первой. Язык нелинейных фракталов значительно богаче и разнообразнее. Более затейливым является и самоподобие нелинейных фракталов: в них *часть есть не точная, а похожая, деформированная копия целого.* Понятно, что простейшие нелинейные фракталы будут задаваться квадратичными функциями. Но просто невозможно представить, насколько преображает линейные фракталы повышение степени на одну единицу! Тем более что дальнейшее повышение степени принципиально уже ничего не меняет в нелинейных фракталах. Буйство фантастических форм и завораживающая красота, скрывающиеся за невинной простотой квадратичных фракталов, превосходят всякое воображение. Но хватит преамбул — к делу.

Как водится, начало было вполне обыденным. В 1918 г. молодой 25-летний француз Гастон Жюлиа (1893—1978) скучал в госпитале, залечивая фронтовые раны,— еще гремели последние залпы первой мировой войны. Жюлиа заинтересовался поведением точки на комплексной плоскости под действием простейшего квадратичного преобразования

$$z_{n+1}=z_n^2+c, \quad c=\mathrm{Const}. \qquad (5.6)$$

То, что параллельно той же проблемой занимался его соотечественник и соперник Пьер Фату (1878—1929), только подогревало энтузиазм Жюлиа. Впрочем, оба француза могли не спешить — об их математических фантазиях скоро забыли почти на сто лет.

Комплексные числа возникают уже при решении квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, когда дискриминант уравнения $D=b^2-4ac<0$, т. е. в решении $x_{1,2}=(-b\pm\sqrt{D})/2a$ квадратного уравнения под корнем возникает отрицательное число. Введение комплексных чисел вида

$$z=x+iy, \tag{5.7}$$

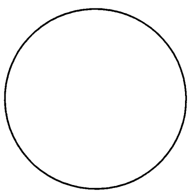
где $i=\sqrt{-1}$ называется *мнимой единицей*, а x и y — действительные числа, позволяет всегда находить решение квадратного уравнения (делает всегда выполнимой операцию извлечения корня), так же как введение отрицательных чисел делает всегда обратимой операцию сложения. Из (5.7.) ясно, что каждому комплексному числу z взаимно однозначно соответствует пара действительных чисел (x, y) или точка M плоскости с координатами (x, y). Поэтому тот, кто ничего не слышал о комплексных числах, может считать, что вместо преобразования (5.6) над комплексными числами Жюлиа и Фату рассматривали преобразование

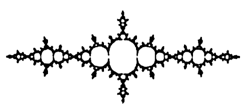
$$x_{n+1}=x_n^2-y_n^2+p,$$
$$y_{n+1}=2x_ny_n+q, \quad p,\ q=\mathrm{Const} \tag{5.8}$$

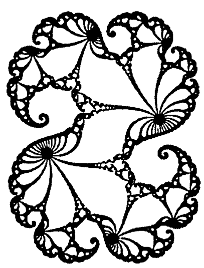
над парами действительных чисел или над точками плоскости $M(x, y)$. Равенства (5.6) и (5.8) связаны соотношениями $z_{n+1}=x_{n+1}+iy_{n+1}$, $z_n=x_n+iy_n$, $c=p+iq$. В дальнейшем для краткости будем говорить о комплексных числах z и комплексном параметре c, хотя повторимся, что комплексное число z и точка плоскости с координатами (x, y) есть одно и то же.

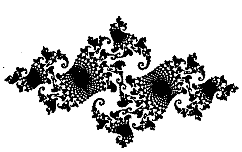
Но вернемся к квадратичному преобразованию (5.6). Начальная точка z_0 и значение параметра c в *итерационном*[1] *процессе* (5.6) могут быть выбраны произвольно. Пусть мы зафиксировали определенное значение параметра c и применяем преобразование (5.6) к начальной точке z_0. В результате получим последовательность точек z_0, $z_1=z_0^2+c$, $z_2=z_1^2+c=$ $=(z_0^2+c)^2+c$, ..., которая может вести себя трояко: либо начальная точка z_0 будет постепенно уходить в бесконечность, либо она будет стремиться к некоторой конечной точке комплексной плоскости, либо она не сможет принять определенного решения и будет блуждать по некоторой линии. В терминах нелинейной динамики точки притяжения итерационного процесса (5.6) называются *аттракторами* (конечными или бесконечным). Граница раздела между конечными аттракторами и бесконечным аттрактором называется *множеством Жюлиа*. Множество всех точек плоскости с конечными аттракторами, включая границу, называется *наполненным множеством Жюлиа*. Таким образом, множество Жюлиа разбивает плоскость на «зоны влияния»: точки наполненного множества Жюлиа образуют множество «пленников» — они либо притягиваются

[1] От лат. *iteratio* — повторение.


(а) $c=0$


(б) $c=0{,}27334+0{,}00742i$


(в) $c=-1.25$


(г) $c=i$

конечным аттрактором, либо блуждают по границе; точки, не принадлежащие наполненному множеству Жюлиа, образуют множество «беглецов» — их притягивает бесконечность, и они устремляются к ней.

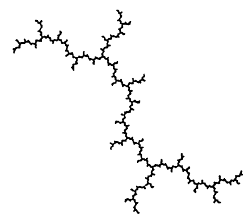
Понятно, что вид множества Жюлиа будет зависеть от выбора параметра c. Но поразительно, насколько сильной оказывается эта зависимость! Вот где проявляется ярко выраженная нелинейность, когда ничтожным изменениям параметра c соответствуют огромные изменения формы множества Жюлиа!

Начнем с простейшего значения параметра $c=0$. Ясно, что в этом случае процесс имеет два аттрактора: 0 и ∞, границей между которыми — множеством Жюлиа — является окружность единичного радиуса $|z|=1$ или $x^2+y^2=1$ с центром в начале координат (рис. *а*).

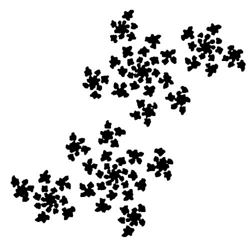
Но вот мы только чуть-чуть отходим от точки $c=0$ в любую сторону — и начинаются чудеса. Конечный аттрактор смещается из нуля, а гладкая окружность становится фрактальной изломанной линией. Новое множество Жюлиа самоподобно: под лупой его фрагменты выглядят столь же изломанными, как и без нее. Очертания любого мыса или залива множества Жюлиа, напоминающие очертания береговой линии, встречаются в любом другом его месте. Воистину замечательным является то, что фрактальное самоподобие множества Жюлиа, которое сегодня можно воочию наблюдать на дисплее компьютера, Жюлиа и Фату «увидели» с помощью математических доказательств еще в начале века. На рисунке *б* изображено множество Жюлиа при $c=-1{,}25$. От нашей окружности не осталось и следа — она рассыпалась на множество причудливо склеенных пузырьков.

Новые незначительные изменения параметра c приводят к новым разительным переменам в облике множества Жюлиа. Вот она — нелинейность! Теперь уже важно, в какую сторону от точки $c=0$ мы будем отходить: в зависимости от этого единственный конечный аттрактор распадется на два, три, десять, двадцать конечных аттракторов! Заливы множества Жюлиа станут все резче углубляться, пока они не прорежут тело множества целиком и одна деформированная окружность не распадется на бесконечное множество фрактально деформированных линий, в которых при самой буйной фантазии трудно узнать бывшую гладкую окружность. Однако, пока еще все эти куски наполненного множества Жюлиа связаны друг с другом некоторыми узловыми точками, или линиями, или даже областями (из любой точки наполненного множества Жюлиа хотя бы по самым узеньким мосточкам можно перейти в любую другую его точку, не пересекая границы множества), такое множество называется *связным*. Примеры таких множеств Жюлиа показаны на рисунках *в* и *г*.

При некоторых значениях c, например при $c=i$ (рис. *д*), внутреннее пространство наполненного множества Жюлиа вообще исчезает. Множество Жюлиа вырождается в причудливо изломанную линию, напоминающую *дендрит* (от греч. δενδρον — дерево) — образование из сросшихся кристаллов, напоминающее ветвь дерева. Дендриты Жюлиа не имеют ко-



(д) $c=-0{,}74543+0{,}11301i$



(е) $c=0{,}11301-0{,}67037i$

Множества Жюлиа при различных значениях параметра c.

нечных аттракторов (им сейчас просто негде поместиться!), а единственным аттрактором итерационного процесса является бесконечность. Точки же, образующие дендрит, не имеют никакого аттрактора и остаются вечно блуждать по бесконечным изломам дендрита. Ужасная судьба!

Наконец, при еще больших значениях c множество Жюлиа взрывается и рассыпается на мириады мелких искр, подобно фейерверку. Математики говорят, что в этом случае множество Жюлиа *теряет связность*, и называют такие множества *пылью Фату*. Пыль Фату также имеет единственным аттрактором бесконечность. По мере увеличения параметра c пыль Фату становится все мельче, поэтому наиболее завораживающие картины множеств Жюлиа появляются именно на границе связности множества. Пример такого множества Жюлиа показан на рисунке *е*.

Мы привели только шесть наиболее типичных множеств Жюлиа, причем самым нетипичным из них является первое — окружность. Но можно было бы рисовать десятки, сотни, тысячи множеств Жюлиа и каждый раз получать все новые и новые структуры. Контраст простоты алгоритма (5.6) и неисчерпаемого многообразия рождаемых им форм настолько велик, что по крайней мере в моей голове он до сих пор не укладывается, вызывая какой-то мистический трепет. Впрочем, в тех же чувствах признаются все, кто попадал в мир нелинейных фракталов. «Мы обнаружили там фантастический мир,— пишут Пайтген и Рихтер,— богатство форм которого контрастирует почти на грани абсурда с простотой формулы $x \to x^2+c$». Воистину мы не знаем лучшей иллюстрации основного закона эстетики — *закона единства в многообразии*, чем воплощение в многообразии множеств Жюлиа единственного и простейшего алгоритма (5.6)!

Но есть ли хоть какая-то закономерность в бесконечном многообразии множеств Жюлиа? Скрывается ли за этим буйством хаоса форм некий порядок? При каких значениях параметра c множество Жюлиа является связным, а при каких нет? Поиски ответа на этот вопрос, волновавший математиков еще со времен Жюлиа и Фату, привели к открытию самого фантастического объекта мира нелинейных фракталов — открытию *множества Мандельброта*.

Рассмотрим плоскость всевозможных значений параметра c, определяющего вид множества Жюлиа, и будем окрашивать черным цветом те значения c, при которых соответствующее множество Жюлиа является связным. В результате на комплексной плоскости значений параметра c мы построим некоторое множество, названное именем Бенуа Мандельброта, который получил его первые компьютерные изображения. Но сказать так — это не сказать ничего!

Как узнать, связно ли множество Жюлиа, соответствующее параметру c, или нет? В этом тонком деле нельзя положиться на компьютерный эксперимент: мы можем либо не заметить тончайшие нити, соединяющие части множества Жюлиа, либо, наоборот, принять посторонние изображения за несуществующие связи. И вот здесь на помощь приходит фундаментальная теорема, доказанная независимо Жюлиа и Фату еще в 1919 г.:

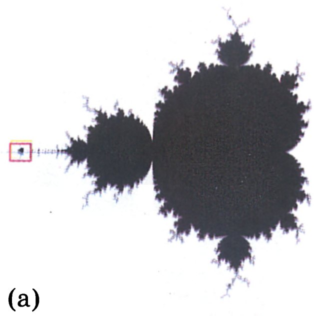
если последовательность 0, c, c^2+c, $(c^2+c)^2+c$, ..., полученная из (5.6) при $z_0=0$, является ограниченной, то соответствующее c множество Жюлиа будет связным. Теорема Жюлиа — Фату открывает прямой путь к вычислению множества Мандельброта на компьютере: принимая условие выхода точки z_n за круг радиуса R $|z_n|=x_n^2+y_n^2>R$ (R=100, например) за условие выхода точки в бесконечность, мы получаем реальный алгоритм вычисления множества Мандельброта. Теперь можно дать и более конструктивное определение множества Мандельброта, эквивалентное первому: *множество Мандельброта M есть множество значений параметра c, при которых последовательность (5.6), стартующая из точки $z_0=0$, остается ограниченной.*

Что же нам нарисует компьютер? Начнем с черно-белого портрета множества Мандельброта. Мы видим причудливую фигуру, которая, по признанию Пайтгена и Рихтера, кому-то кажется прекрасной, а кому-то безобразной. Если бы не странные наросты — их называют *почками* — и торчащие из почек измятые усы дендритов, то множество Мандельброта выглядело бы вполне регулярным. Во-первых, оно симметрично относительно оси абсцисс. Во-вторых, его основу составляют две регулярные фигуры: кардиоида с вершинами на оси абсцисс в точках 0,25 и −0,75 и круг радиуса 0,25 с центром на оси абсцисс в точке −1, касающийся кардиоиды в ее круглой вершине. На этом, пожалуй, описание множества Мандельброта в терминах геометрии Евклида заканчивается, хотя заметим, что регулярные фигуры составляют основу множества.

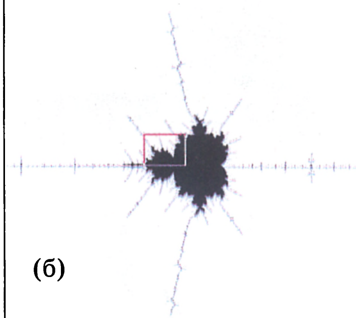
Но основная жизнь множества M сосредоточена на его границах — и здесь начинаются удивительные вещи. Мы видим бесконечное множество малых областей (почек), напоминающих по форме круг, касательных к кардиоиде и выстроенных как бы по росту, начиная с самых больших верхней и нижней почек. По мере приближения к впадинам основного тела множества Мандельброта эти касательные наросты (почки) убывают, становясь бесконечно малыми. Каждая из почек, в свою очередь, облеплена еще более мелкими наростами, расположенными по тому же закону, к каждому из мелких наростов опять присоединен бесконечный набор еще более мелких наростов и т. д.

Но это не все! При более сильном увеличении в окрестностях границ множества Мандельброта обнаруживаются уменьшенные копии самого множества Мандельброта! Самая большая из таких малых копий встречается на оси абсцисс, и ее центр расположен в точке −1,754877666... . Другие копии множества M разбросаны вокруг его основного тела. На какие единицы здесь идет счет, видно по координатам центра одной из крошечных кардиоид, которые равны (−0,1565201668; 1,032247109). Мандельброт доказал, что его множество содержит бесчисленное число своих малых копий! Подобно мелким брызгам, они разбросаны вокруг основного тела множества.

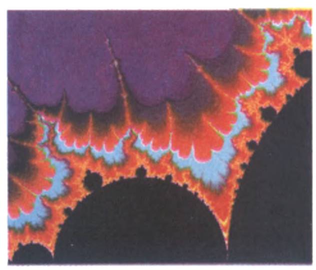
Но и это не все! При еще более сильном увеличении обнаруживается, что каждый нарост каждой почки выпускает хаотично изломанные усы дендритов, образуя как бы всклo-



(а)

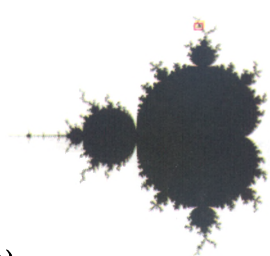


(б)

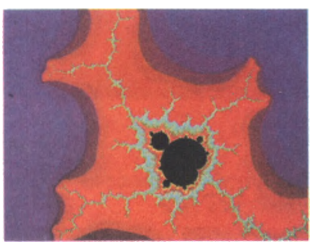


(в)

Основное множество Мандельброта *(а)*.
Увеличенное изображение выделенного на рис. *а* прямоугольника: копия основного множества Мандельброта на его иглообразном отростке, называемом антенной *(б)*.
Цветное изображение выделенного на рис. *б* прямоугольника *(в)*.



(а)



(б)

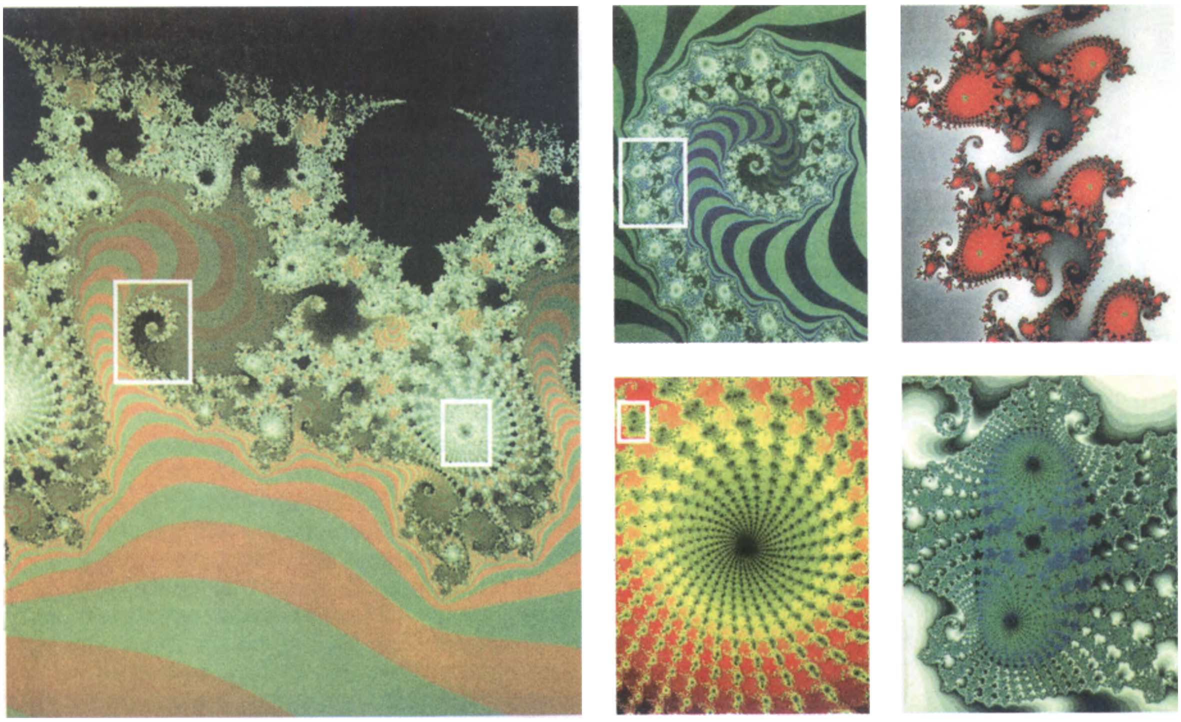
Дендриты, окружающие множество Мандельброта *(а)*. Уменьшенная копия множества Мандельброта в дендрите, отмеченном на рис. *а* прямоугольником *(б)*.

коченную шевелюру множества M. Среди болезненно изломанных дендритов есть одно исключение. Это дендрит, растущий из основной почки основного круга множества M. Его ствол строго прямолинеен и простирается по оси абсцисс до точки -2. Это так называемая *антенна* множества M, от которой отходят в стороны более мелкие усики.

Но и это не все! Оказывается, все малые копии множества M нанизаны на ветви дендритов, подобно единичным бусинкам или каплям росы. Главная из малых копий множества M расположена на антенне. Но не как-нибудь, а в точке золотого сечения ствола антенны! Итак, все малые копии множества M связаны с его основным телом ветвями дендритов! Совсем недавно французский математик Андриен Дуади совместно с Дж. Хаббардом получили фундаментальный математический результат — они доказали, что *множество Мандельброта является связным*. Таким образом, тело множества Мандельброта едино, его можно обойти целиком, не покидая границ множества. Такова в главном *морфология* (от греч. μορφη — вид, форма; учение о форме) множества Мандельброта.

Но и это далеко не все! Каждая часть множества Мандельброта, в свою очередь, является справочником по морфологии соответствующих множеств Жюлиа. *Одно множество Мандельброта классифицирует все множества Жюлиа!* Так, кардиоида содержит все значения параметра c, при которых соответствующие множества Жюлиа являются фрактально деформированной окружностью с одним неподвижным аттрактором. Большой круг определяет множества Жюлиа с притягивающими циклами второго порядка; две большие почки кардиоиды и главная кардиоида антенны задают множества Жюлиа с притягивающим циклом 3-го порядка. Далее каталог множества M усложняется: 6 его элементов определяют множества Жюлиа с периодом 4; 15 элементов — с периодом 5; 27 элементов — с периодом 6; 63 — с периодом 7; 120 — с периодом 8 и т. д. Усам дендритов соответствуют дендритообразные множества Жюлиа. Внешним точкам вблизи усов — пыль Фату. И так далее.

Возможно, это одна из наиболее замечательных особенностей множества Мандельброта — быть единым упорядочивающим началом в бесконечном разнообразии форм множеств Жюлиа. *Множество Мандельброта есть бесконечно эффективное хранилище информации, бесконечный каталог неисчерпаемой морфологии множеств Жюлиа.* Вот что по этому поводу пишет один из ведущих знатоков множества Мандельброта А. Дуади: «Подобное явление расшифровки информации поражает нас и в биологии: расшифровка всей генетической информации ДНК человека (или другого позвоночного) заняла бы около ста страниц. Сравните это с трактатами по анатомии, добавьте к ним еще и книги по эндокринологии и формам поведения! Или представьте себе ученых, столкнувшихся с набором множеств Жюлиа, но не знающих, откуда они взялись. Не станут ли они поступать так же, как и зоологи XIX в.,— определять царства, классы, отряды, роды, давать описания специфических свойств, определяющих каждую таксономическую единицу и т. д.? По-

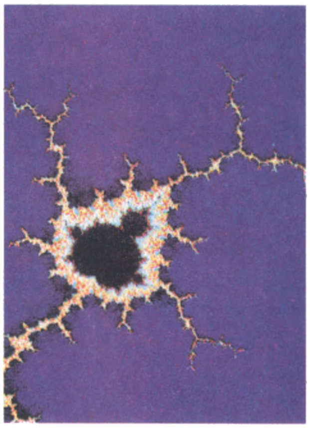


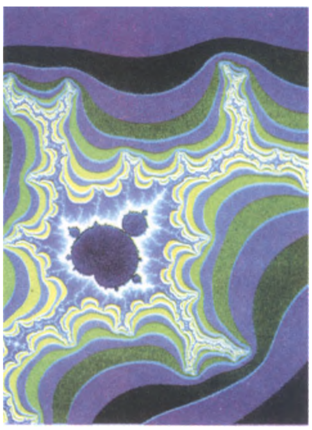
Последовательное увеличение фрагментов множества Мандельброта из долины морских коньков.

ясню. Я вовсе не утверждаю, что с помощью множеств Жюлиа можно создать модель какого-либо биологического явления. Я хочу только сказать, что они представляют собой поразительный пример того, как очень простая динамическая система может развить незначительную информацию, содержащуюся в ключе, и породить разнообразные высокоорганизованные структуры».

Но впереди у нас еще самое завораживающее — цветные портреты множества Мандельброта. Окрашивая в разные цвета области с различной скоростью стремления в бесконечность, мы вступаем в роскошное многоцветье мира нелинейных фракталов. Перед нашими глазами разворачивается не только грандиозная битва за сферы влияния на плоскости, но и филигранная, на уровне микрохирургии или китайских мастеров, рисующих портреты на рисовом зернышке, обработка каждого мельчайшего участка этой плоскости. Космос и Хаос сосуществуют и противоборствуют в этом мире на каждом шагу, создавая одни структуры, разрушая другие и вновь собирая новые. Вот она, красота, рождающаяся на границе Космоса и Хаоса! Вот оно, безумное многообразие, вырвавшееся из тесной формулы простейшего квадратичного закона! Вот оно, искусство, рождаемое математикой!

На цветных фотографиях, взятых нами из книги «Красота фракталов», показан ряд последовательных увеличений двух





Эксперименты Пайтгена и Рихтера с раскрашиванием множества Мандельброта. Легко видеть, что компьютер оставляет широкое поле для художественного творчества.

областей вблизи границ множества Мандельброта, расположенных во впадине между кардиоидой и большим кругом, именуемой *долиной морских коньков*. Часть области, взятая в рамку на предыдущем фото, дается в полном увеличении на последующем. Мы не будем комментировать сказочные картины, открывающиеся вблизи границ множества Мандельброта. Нам кажется, это тот случай, когда слова становятся неуместными — пусть каждый найдет свои слова и испытает свои чувства. Картины эти можно рассматривать бесконечно, и на сей раз это не поэтическая метафора, а математическая истина: *каждое новое увеличение одного и того же участка порождает новые формы.*

Благодаря свойству нелинейности квадратичные фракталы *нелинейно самоподобны*: новые фрактальные формы не копируют старые, но являются вариациями некоторых заданных тем. Темы фрактальных вариаций зависят от области вблизи границ множества Мандельброта, которую мы начинаем рассматривать под компьютерной лупой. Скажем, в долине морских коньков вплоть до миллионнократного увеличения обнаруживаются все новые и новые вариации на тему «хвостов» и «глаз» морских коньков. В областях дендритов, испускаемых почками множества M, мы попадаем в мир ужасающих разломов и ущелий, на дне которых иногда обнаруживаются крошечные копии основного тела множества Мандельброта. В новых областях солируют новые темы. Но всегда в той или иной области значений параметра c преобладают те формы, которые являются «строительными блоками» для построения множеств Жюлиа, соответствующих этим значениям параметра c. Качественное подобие соответствующих форм множества Мандельброта и множеств Жюлиа является настолько глубоким, что совпадает даже число спиралей, образующих «глаза» морских коньков,— в обоих множествах их по 29! Это наблюдение, основанное на данных компьютерных опытов, еще ждет своего обоснования методами чистой математики.

Увы, нам пора прощаться с множеством Мандельброта и множествами Жюлиа. Свойства этих множеств — известные и еще не изведанные, — равно как и свойства фракталов, стали предметом многих книг, международных конференций, журнальных обзоров. Нам остается заметить, что сегодня фрактальные картины этих множеств может рисовать каждый школьник. Алгоритм итерационного процесса (5.6) настолько прост, что требует всего нескольких строк и большую часть программы занимает процедура кадрирования и выбора цвета. Примеры таких программ Пайтген и Рихтер привели в конце своей книги «Красота фракталов». Так что лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать.

Волшебные видения мира нелинейных фракталов еще раз заставляют нас задуматься о природе красоты, в основе которой, по-видимому, лежит гармония Космоса и Хаоса. Именно на границе этих двух противоположных первоначал рождается красота, и не случайно, что именно на границах множества Мандельброта буйно расцветает многообразие фрактальных форм. Впрочем, мы уже достаточно много говорили об этом в первой главе и потому предоставим слово профессору Кельнского университета Герту Айленбергеру: «Почему все же силуэт изогнутого бурями дерева без листьев на фоне вечернего неба воспринимается как нечто прекрасное, а любой силуэт высоко функционального университетского здания таким не кажется, несмотря на все усилия архитектора? Ответ, как мне кажется (пусть даже это немного и надумано), должен быть дан с помощью новых подходов к динамическим системам. Наше ощущение *прекрасного* возникает под влиянием гармонии порядка и беспорядка в объектах природы — тучах, деревьях, горных грядах или кристалликах снега. Их очертания — это динамические процессы, застывшие в физических формах, и определенное чередование порядка и беспорядка характерно для них». Нам же остается только напомнить афоризм, приписываемый соотечественнику Айленбергера великому Гегелю: *мир есть гармония гармоний и дисгармоний*.

И последнее. Фракталы, безусловно, стали новой вехой в науке конца XX в., хотя все фрактально неисчерпаемое богатство заключенных в них смыслов еще предстоит раскрыть науке XXI в. Но фракталы, безусловно, стали и новой страницей нового *компьютерного искусства*, которое только родилось в XX в., но которому предстоит расцвести (или зачахнуть?) в новом, XXI в. Мы не будем здесь ввязываться в долгие споры о том, является ли компьютерное искусство искусством (если нет художника, то нет и искусства, говорят оппоненты). Спросим только, а разве долгие эксперименты с цветовой палитрой Пайтгена и Рихтера, которой они уделяли огромное внимание и которая действительно очень много значит во фрактальных картинах, не сродни творчеству художника?

Искусствоведы спорят, а караван компьютерного искусства идет. И в качестве напутствия этому каравану мы приведем слова известного немецкого компьютерного графика Герберта Франке: «Я думаю, что искусствоведы грядущих столетий, оглянувшись на наше время, придут к выводам, весьма отличным от тех, к которым приходят наши современники. Почитаемые ныне художники и скульпторы будут, скорее всего, почти забыты, зато появление электронных средств будет провозглашено наиболее значительной переменой в истории искусства».

Итак, сегодня фракталы стали одним из выразительных средств компьютерного искусства. Но, по-видимому, нам предстоит еще осознать и более глубокую истину: все искусство имеет фрактальную природу. В начале главы мы привели слова Галилея о том, что книга природы написана на языке треугольников и окружностей. К концу XX в. стало ясно, что книга природы написана на языке фракталов. Возможно, в XXI в. мы узнаем, что книга искусства написана на языке фракталов. Первые попытки доказательства этого тезиса мы предпринимаем в пятой части книги.

Нам же предстоит сделать шаг назад от красоты Космоса и Хаоса, перемешанной во фракталах, к красоте порядка, ибо, как мы заметили в первой главе, математика искусства должна начинаться с математики порядка.

6. ГАРМОНИЯ, СИММЕТРИЯ, ПРОПОРЦИЯ, РИТМ — СЛАГАЕМЫЕ ПРЕКРАСНОГО

Гармония — магическое слово, сулящее всевозможные блага, это синтетическое понятие, слово завтрашнего дня.

ЛЕ КОРБЮЗЬЕ

Симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство.

Г. ВЕЙЛЬ

Ничто не нравится, кроме красоты, в красоте — ничто, кроме форм, в формах — ничто, кроме пропорций, в пропорциях — ничто, кроме числа.

А. АВГУСТИН

... Ведь вся жизнь человеческая нуждается в ритме и гармонии.

ПЛАТОН

Итак, достойным завершением первой части нашей книги была бы формулировка *объективных законов красоты* или по крайней мере *законов порядка в прекрасном*. Но откуда вдруг сослагательное наклонение? Законов красоты не будет? Будет — иначе не будет и этой книги. Но прежде нам хотелось бы объясниться.

Возьмем любой учебник по физике — там мы найдем три закона механики Ньютона, закон всемирного тяготения опять же Ньютона, закон электростатики Кулона, законы электродинамики Максвелла и т. д. Все это законы природы, которые изучает наука о природе физика (от греч. φυσις — природа). Теперь откроем любой учебник по эстетике. Мы не найдем там и намека ни на один закон красоты. Вопрос этот либо дипломатично обходится, либо стыдливо берется в кавычки — «законы красоты» — что-то такое, что вроде бы и есть, а вроде бы и нет. Да и какие могут быть законы красоты, если ведущий эстетик М. С. Каган объявил тщетными попытки и Поликлета, и Дюрера, и Ле Корбюзье найти таковые?

Карл Маркс, ничего специально по эстетике не писавший, в одном месте недвусмысленно обронил: «Животное строит только сообразно мерке и потребности того вида, к которому оно принадлежит, тогда как человек умеет производить по меркам любого вида и всюду он умеет прилагать к предмету присущую мерку; в силу этого человек строит также и по законам красоты».

И по законам красоты... Эти слова Маркса повторяли сотни голосов, и стало как-то даже неприлично задаваться вопросом, а что же они, собственно, означают? Маркс ведь мудро обошел молчанием существо дела. Впрочем, такая мудрость вообще в духе философов. Платон в свое время также не сказал простодушным делосцам, как решать задачу об удвоении куба, а глубокомысленно заметил: «Боги недовольны вами за то, что вы мало занимаетесь геометрией». Делосскую проблему пришлось решать другу Платона математику Архиту, что он и сделал с восхитительным блеском[1].

Но если говорить серьезно, то дело, конечно, не в Марксе и даже не в Платоне, а в том, что проблема законов красоты действительно сопряжена с серьезными трудностями. Трудности эти вызваны, во-первых, двуединой природой эстетики: всякое объективное утверждение в эстетике подвержено также и субъективной оценке — и не только одного индивида, но и целых школ и даже эпох,— и эта субъективная оценка размывает объективные основы. Во-вторых, трудности связаны также и с двуединой природой самой красоты как единства противоположных начал Космоса и Хаоса, порядка и беспорядка. Поэтому правильнее, видимо, говорить не о законах красоты вообще, а о законах порядка в красоте, которые не нуждаются в субъективной эстетической оценке и потому могут быть достаточно общими и устойчивыми. Такие законы известны со времен античности — и это лучшее доказательство их объективности и стабильности.

Если быть точными, то это даже не законы, а некие принципы. Эстетика как философская наука и не обязана устанавливать конкретные законы, а должна вырабатывать некие общие философские принципы. Затем эти фундаментальные принципы наполняются конкретным содержанием в науках, изучающих те или иные искусства. Так же поступим и мы: в этой главе мы рассмотрим общие *принципы порядка в красоте,* а последующие четыре части книги будут посвящены тому, как эти принципы воплощаются в виде конкретных законов в музыке, архитектуре, живописи и литературе — четырех основных искусствах.

Оглядываясь более чем на двухтысячелетнюю историю эстетики, следует признать, что объективных принципов порядка в красоте известно не так уж много. Это уже известный *принцип единства в многообразии,* честь открытия которого делят Гераклит и Аристотель. Это *принцип гармонии как согласия разногласного,* восходящий к Пифагору и Гераклиту. И это *принципы симметрии, пропорции и ритма,* открытые, по-видимому, пифагорейцами. Ничего нового к этим принципам со времен античности не прибавилось.

Легко видеть, что первые два принципа — *единства в многообразии и гармонии* — являются качественными описательными законами, за которыми не может стоять никакой математики. Более того, по существу эти два принципа являются

[1] Подробнее о делосской проблеме см. Волошинов А. Пифагор: союз истины, добра и красоты.— М., 1993.

КУРОС. *525 г. до н. э.* Древнегреческие куросы и коры периода архаики (статуи юношей и девушек) одна из первых и наиболее прямолинейных попыток осмысления в искусстве природной зеркальной симметрии человека.

тождественными, ибо согласие разногласного, обеспечиваемое гармонией, есть не что иное, как единство, устанавливаемое гармонией в многообразии разногласного. Итак, *гармония или единство в многообразии есть качественное выражение идеи порядка в красоте.*

Качественный принцип гармонии наполняется количественным содержанием в законах симметрии, пропорции и ритма. Здесь уже открывается широкое поле для приложения сил математики. Как мы покажем в конце главы, законы пропорции (в том числе важнейший частный случай — пропорция золотого сечения) и ритма, в свою очередь, являются не более чем конкретными проявлениями единого принципа симметрии. По существу, это понимали и древние греки, выработав единую категорию *меры как количественного выражения идеи порядка в красоте.*

Таким образом, мы приходим к двум основным принципам (допуская вольность речи, можно назвать их законами красоты): качественному принципу гармонии и количественному принципу симметрии, которые воплощают идею порядка в красоте. Не случайно, начиная с Платона и до сего дня, гармонию и симметрию часто смешивают с красотой. Только два принципа красоты — может показаться, что это пугающе мало! Но не стоит отчаиваться, фундаментальных принципов и должно быть мало, в идеале — один. Вспомним о сверхзадаче физики XX в. — проблеме суперобъединения: найти единую суперсилу в природе, т. е. вывести все возможные взаимодействия в природе из единого фундаментального принципа. Так что один качественный и один количественный принцип порядка в красоте — это не недостаток, а скорее идеал, которого достигает эстетика как философия красоты.

ЭНГР. Источник. *1856 г.* Оживление природного порядка зеркальной симметрии человека художественным беспорядком несимметричных элементов композиции. Фактически этот процесс начался уже в период греческой классики и отчетливо виден в S-образном положении тела Афродиты Милосской.

Замечательно, что уже древние греки отчетливо понимали основные функции гармонии как упорядочивающего начала. В древнегреческой философии гармония в противоположность хаосу означала организованность всей Вселенной. Гармония трактовалась не как внешнее объединение разрозненных частей, а как внутреннее их единство, как единство противоположностей предела и беспредельного, частей и целого, мужского и женского, хорошего и дурного. Удивительно, сколь явно перекликается это с идеей единства противоположных первоначал Инь — Янъ в древнекитайской философии!

Пифагор, не только великий математик, но и основоположник античной эстетики, считал, что гармония внутренне присуща вещам, из которых составлен мир. Ее только нужно извлечь из вещей, что и делает художник благодаря своему мастерству, уму и таланту. Но пифагорейцы не остановились на констатации качественной идеи гармонии, а развили идею порядка до обнаружения количественных законов в красоте и мироздании, до провидческой философии числа, которую они положили в основу своей картины мира. Подробнее об этом мы скажем в главе 7, а в главе 9 познакомимся с пифагорейским учением о гармонии сфер, согласно которому расстояния между планетами соответствуют числовым отношениям музыкальной гаммы и весь Космос звучит единым благозвучным аккордом.

Понятию гармонии древнегреческий философ Платон придал социальное значение, рассматривая гармонию как совокупность физических достоинств и высоких нравственных принципов человека-гражданина. Отсюда происходит выражение *гармонически развитая личность.* Античное учение о гармонии как организующем начале прекрасного прошло через эпохи средневековья, Возрождения, Просвещения вплоть до наших дней, хотя существо самой красоты в каждую эпоху понималось по-своему. Для средневекового философа Фомы Аквинского, причисленного католиками к лику святых и признанного пятым «отцом церкви», красота заключалась в Боге, который «именуется прекрасным как причина гармонии и ясности». Как отголоски веры в божественное происхождение прекрасного сохранились выражения *ангельское лицо, божественный голос, чудесная погода.* Для ренессансного гуманиста Альберти гармония есть «абсолютное и первичное начало природы». Французские просветители-материалисты также подчеркивали природную основу гармонии и красоты.

Вместе с гармонией категория меры также составляла основу античного миропонимания. Чувство меры пронизывало все античное сознание. Измерять и, более того, соизмерять, т. е. раскрывать внутренние связи между измеряемыми объектами,— таков был не только образ мышления древнего грека, но и образ его жизни. Вспомним нескончаемые состязания, конкурсы, Олимпийские, Дельфийские, Пифийские, Истмийские и прочие игры, главная цель которых и была «помериться» силой, ловкостью, талантами, красотой. Неудивительно, что именно с мерой и соразмерностью прежде всего связано античное представление о прекрасном.

Утилитарное значение меры периода греческой архаики перерастает в эстетико-философское понятие уже у Гесиода: «Меру в словах соблюдай и всякому будешь приятен» — и у знаменитых «семи мудрецов», одному из которых —Клеобулу —традиция приписывает афоризм:

МЕТРON АРIΣТON — МЕРА НАИЛУЧШЕЕ.

Подлинный эстетико-философский и естественно-научный смысл категория меры приобретает в трудах Пифагора, раскрываясь через свои составные элементы — симметрию, пропорцию, ритм. Мера характеризует общие принципы строения, целостность объекта, тогда как понятия симметрии, пропорциональности и ритма добавляют к характеристике целого те или иные специфические оттенки. Открытие Пифагором закона целочисленных отношений в консонансах — а это уже не только качественный закон гармонии, но и количественный закон меры — утвердило веру пифагорейцев в упорядоченность не только прекрасного, но и всего мироздания. Это открытие утвердило в эстетике меру как объективную детерминанту красоты. И этот пифагорейский взгляд на структурно-математическую, «соразмерную» сущность прекрасного пронизывает всю эстетику — от Платона и Аристотеля до Флоренского и Лосева.

Исходя из меры определяет красоту Аристотель: «Красота заключается в величине и порядке, вследствие чего ни чрез-

СИНАГОГА. Аллегорическая статуя северного портала собора в Страсбурге. *1230-е гг.* S-образный изгиб тела стал излюбленным композиционным приемом в готике. Предельной выразительности этот мотив достигает в статуе Синагоги, символизирующей поражение неправой иудейской веры перед лицом католической церкви. Но ведь S-образная линия есть только новый тип симметрии — поворотная симметрия 2-го порядка.

ФАРАОН МИКЕРИН
с богиней Хитор и богиней дома Диосполис Парва.
Храм Микерина в Гизе.
XXVII в. до н. э. (слева).
ТРОН ЛЮДОВИЗИ.
Рождение Афродиты.
Мрамор.
Ок. 470 г. до н. э. (справа).
Первые шаги от искусства от природной зеркальной симметрии человека к художественной зеркальной симметрии композиции.

мерно малое существо не могло бы стать прекрасным... ни чрезмерно большое...». Затем пифагорейская традиция красоты как меры почти без изменений переходит в древнеримскую эстетику и находит практическое и теоретическое воплощение в деятельности римского архитектора Витрувия. «Десять книг об архитектуре» Витрувия не только архитектурный трактат, но и эстетико-философское сочинение, это своеобразная партитура гимна мере и красоте, созданная для воплощения в камне. «Никакой храм, — пишет Витрувий, — без соразмерности и пропорции не может иметь правильной композиции, если в нем не будет такого же членения, как у хорошо сложенного человека».

Античный принцип меры носил не только формальный структурно-математический характер. Мера для греков, а затем и для римлян — это также и человек, это норма поведения, закон мироздания, структура художественного произведения. Античное искусство возвеличивало человека даже тогда, когда говорило о богах.

Понятия симметрии, пропорции и ритма как конкретных выражений меры играли важную роль в познании греками пространственно-временной структуры окружающего мира. Закономерность и красота мироздания раскрывались перед ними и в симметрии живых организмов, и в пропорциональном строении тела человека, и в ритмах чередования дня и ночи, смены времен года и т. д. Вся античная архитектура и скульптура воплощали в себе эти принципы красоты. Лучшими примерами тому служат и величественные пропорции Парфенона, и знаменитый «Канон» Поликлета — скульптура и теоретический трактат, в которых автор воплотил идеальные, по его мнению, пропорции мужского тела.

Остановимся несколько подробнее на эстетическом и мировоззренческом содержании законов гармонии, симметрии, пропорции и ритма как упорядочивающих началах красоты и мироздания, как слагаемых прекрасного.

6.1. APMONIA

Греческому слову αρμονια по крайней мере три тысячи лет, и за это время оно прошло столь же сложный путь развития, как и вся история человечества. Впервые оно встречается в поэмах Гомера «Илиаде» и «Одиссее», датируемых IX—VII вв. до н. э. В «Илиаде» гармония означает *мир, согласие,* а в «Одиссее» — *скрепы, шипы,* которыми Одиссей соединял различные части строящегося корабля:

> Двадцать он бревен срубил, их очистил, их острою медью
> Выскоблил гладко, потом уровнял, по снуру обтесавши.
> Тою порою Калипсо к нему с буравом возвратилась.
> Начал буравить он брусья, и, все пробуравив, сплотил их,
> Длинными болтами сшив и большими просунув шипами.

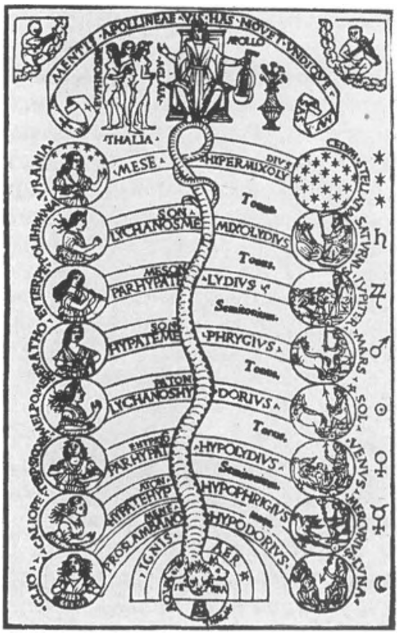
С последующим ростом культуры, развитием философии и расширением языка науки понятие гармонии, сохраняя свое древнее значение *соединения, согласия,* приобрело более глубокий и широкий смысл и стало важнейшей философской и эстетической категорией. Сегодня гармония в философии и эстетике означает *соразмерность частей и целого*, слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое.

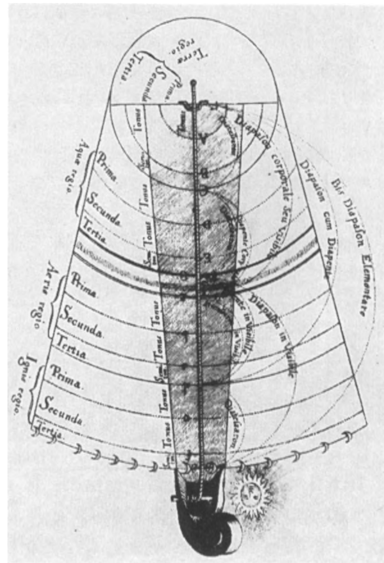
Гармония проявляется всюду, начиная от строения Солнечной системы и кончая духовной жизнью человека и общества. Чем сложнее целостная система, тем содержательнее оказывается гармония, выражающая соотношение разнородных элементов. Кроме того, гармония стала обозначать один из разделов теории музыки, изучающий ее выразительные средства, основанные на закономерном объединении музыкальных звуков в созвучия (аккорды) и на связи созвучий при их последовательном движении.

Учение о гармонии лишь немногим моложе самого слова. Оно возникло в VI в. до н. э. в трудах Пифагора и его учеников, пифагорейцев. Для пифагорейцев гармония означала организованность Вселенной, она противостояла Хаосу и определяла устройство всего мироздания.

В пифагорейском взгляде на гармонию как *изоморфное единство разнокачественных начал* нашла отражение глубокая убежденность древних в едином упорядоченном и закономерном устройстве мироздания. Идея гармонии, как всепроникающего единства разнородных и разнообразных элементов, была доведена в пифагорейской философии до своего апогея — идеи внутреннего единства двух полярных высокоорганизованных миров: Микрокосма и Макрокосма. Апофеозом пифагорейской концепции гармонии стал знаменитый античный тезис: «Познай самого себя, и ты познаешь богов и Вселенную».

Но что является сущностью, носителем гармонии? Уже в античную эпоху по этому вопросу имелись разногласия. Пифагорейцы считали, что в основе гармонии мироздания лежат число, числовые пропорции и отношения. Это было вполне оправдано, ибо, с одной стороны, числа тесно связаны с реаль-





ГАРМОНИЯ МИРА.
Иллюстрация из книги итальянского теоретика музыки Ф. Гафурио «Практика музыки». Милан. 1498 г. (слева).
МОНОХОРД,
или Гармония мира.
Иллюстрация к трактату Р. Флудда «О космическом двуединстве». Франкфурт. 1617 г. (справа).
Со времен Пифагора музыка была для греков синонимом математической гармонии мироздания.

ным миром, в котором все поддается счету, а с другой —они существуют как бы отдельно от него, чужды земной суете и тлену. Открытие же связи между числом и музыкой, между мудростью числа и красотою музыки укрепило пифагорейцев в своих воззрениях: гармония мироздания виделась им в математических соотношениях, обеспечивающих порядок и согласие во вселенной.

Иное дело — Гераклит, видевший в основе всего, в том числе и гармонии, борьбу противоположностей. «Борьба — отец всего и царь всему»,— учил Гераклит. Гераклит впервые высказал мысль о двух видах гармонии — *скрытой* и *явной*. По Гераклиту, скрытая гармония лежит в основе красоты и совершенства Космоса и сильнее явной гармонии. «И если мир,— говорит Гераклит,— кажется кучей мусора, рассыпанного наудачу, то здесь за игрой стихийных сил и случайностей скрывается прекраснейшая гармония». Ту же мысль через два с половиной тысячелетия выскажет в поэтической форме Александр Блок:

> Сотри случайные черты —
> И ты увидишь: мир прекрасен.

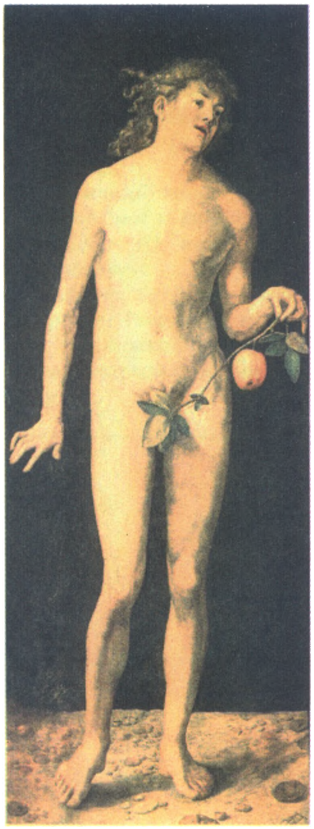
Гармония Пифагора и гармония Гераклита не взаимоисключают, а взаимодополняют друг друга: первая — как единство разнокачественных начал — по своему содержанию ближе к мирозданию, вторая — как единство взаимоисключающих противоположностей — ближе к искусству. Таким образом, со времен Пифагора и Гераклита концепция гармонии мироздания и гармонии искусства развиваются в тесной взаимосвязи, а сам термин гармонии одинаково близок и дорог как ученым, так и художникам.

Зерна учения о гармонии, брошенные Пифагором и Гераклитом в благодатную почву средиземноморской культуры, проросли в могучее древо гармонии, живущее и поныне. Учение о гармонии было подхвачено и развито Платоном, чья философия, будто скрепы-гармонии Одиссеева корабля, пронизывает не только мировую философию, но и мировую культуру. Платон придал понятию гармонии универсальный смысл, распространив космологическую и математическую теорию пифагорейцев на нравственный и духовный космос человека.

Гармония для Платона есть основа прекрасного. В свою очередь, такие качества, как мера, симметрия, пропорция, ритм, составляют единое целое гармонии. Из этих посылок естественным образом вытекает знаменитое изречение Платона о том, что «умеренность и соразмерность всюду становится красотой и добродетелью».

Начиная с ранней классики взгляд на гармонию как согласие разногласного, лежащее в основе мироздания, отличается завидным постоянством. Такой взгляд на гармонию сохранял и в эпоху позднего эллинизма Цицерон: «Только мир свободен от всяких недостатков и во всех своих пропорциях и частях строен, закончен и совершенен»; и в последних лучах догоравшей античной культуры Боэций: «И поэтому сказано не без причины — все слагающееся из противоположностей объединяется и сочетается некоей гармонией»; и на рассвете эпохи Возрождения Альберти: «Ведь назначение и цель гармонии — упорядочить части, вообще говоря, равные по природе, неким совершенным отношением так, чтобы они одна другой соответствовали, создавая красоту»; и на пороге века Просвещения Лейбниц: «Душа следует своим законам, тело — своим, и они сообразуются в силу гармонии, предустановленной между всеми субстанциями, так как все они суть выражения одной и той же вселенной»; и в начале XX в. Пуанкаре: «Но то, что мы называем объективной реальностью, в конечном счете есть то, что общо нескольким мыслящим существам и могло бы быть общо всем. Этой общею стороной может быть только гармония, выражаемая математическими законами. Следовательно, именно эта гармония и есть единственная объективная реальность, единственная истина, которой мы можем достигнуть; а если я прибавлю, что универсальная гармония мира есть источник всякой красоты, то будет понятно, как мы должны ценить те медленные и тяжелые шаги вперед, которые мало-помалу открывают ее нам»; и в середине XX в. Эйнштейн: «Без веры во внутреннюю гармонию нашего мира не могло бы быть никакой науки. Эта вера есть и всегда останется основным мотивом всякого научного творчества».

К сожалению, у нас нет возможности остановиться подробнее на развитии учения о гармонии, в котором, как в капле воды, отражается все развитие человеческой мысли. Аристотель и Секст Эмпирик, Августин и Фома Аквинский, Дюрер и Леонардо да Винчи, Кеплер и Галилей, Гете и Шиллер, Кант и Гегель, Гейзенберг и Шредингер внесли свой вклад в это древнейшее учение.



ДЮРЕР. Адам. *1507 г.*
Диптих Дюрера, основанный на зеркальной симметрии композиции и антисимметрии двух взаимодополняющих начал природы, является высочайшим образцом гармонии философского и художественного, духовного и телесного в искусстве. Адам и Ева — это Янъ и Инь философии искусства.

Мы же отметим три важных аспекта, которые выделяют в современных воззрениях на гармонию,— математический, эстетический и художественный. На ранних этапах развития учения о гармонии господствовало ее количественное понимание как меры порядка. Гармония трактовалась как соразмерность, пропорциональность отдельных частей и целого и, по существу, была очень близка понятию меры. Такое формальное толкование гармонии, выделяющее прежде всего математическую количественную сторону, было характерно для пифагорейцев и мыслителей средневековья. В XVII в. пифагорейскую математическую концепцию гармонии развил Иоганн Кеплер.

В эпоху Возрождения математическое понимание гармонии постепенно дополняется эстетическим. В отличие от математического эстетическое понимание гармонии является не просто количественным, но и качественным, выражающим внутреннюю природу объекта. В эстетическом понимании гармонии получает развитие тезис Платона о связи гармонии с прекрасным. Поэтому эстетическая гармония связывалась с эстетическим переживанием, с чувством прекрасного. В европейской эстетике красота природы становится неотделимой от представления о ее гармонии.

Более глубокое и диалектичное — художественное — понимание гармонии вырабатывается в эстетике Нового времени. Художественная гармония — это гармония искусства, это не только математическое соответствие между однородными элементами, но и единство противоположных эстетических категорий: прекрасного и безобразного, трагического и комического, возвышенного и низменного. Взаимодействие этих противоречивых начал придает художественной гармонии движение и наполняет ее жизнью.

Итак, гармония — это сложное и многозначное понятие; поэтому гармония так близка и естествоиспытателю, и философу, и поэту.

Вот почему современные физики так часто говорят о гармонии как организующем начале мироздания, описываемом красивыми и простыми математическими закономерностями. «Восприняв от античности идею о математическом истолковании порядка в природе, — пишет Вернер Гейзенберг, — современное естествознание осуществляет ее, однако, другим способом... Наука нового времени показала, что в окружающем нас реальном мире неизменными являются не геометрические формы, а динамические законы... Гармонию пифагорейцев, которую еще Кеплер надеялся найти в орбитах небесных светил, естествознание со времен Ньютона ищет в математических уравнениях, формулирующих эти законы».

Вот почему художники так боготворят гармонию, организующую «вторую природу» — искусство. «Поэт — сын гармонии,— говорил в своей речи «О назначении поэта» А. Блок,— и ему дана какая-то роль в мировой культуре. Три дела возложены на него: во-первых, освободить звуки из родной безначальной стихии, в которой они пребывают; во-вторых, привести эти звуки в гармонию, дать им форму; в-третьих, внести эту гармонию во внешний мир».

Поиски скрытой гармонии — высший удел и ученых, и художников. Это нескончаемый путь культуры, путь, приносящий и ученым, и художникам муки и радости. А в конце пути, когда «ни прибавить, ни убавить, ни изменить ничего нельзя, не сделав хуже», сияет недосягаемая вершина — Гармония.

6.2. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

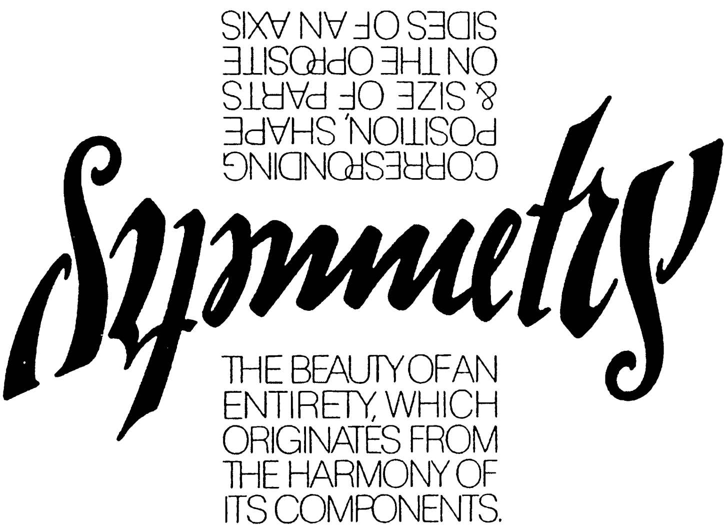
«Раз, стоя перед черной доской и рисуя на ней мелом разные фигуры, я вдруг был поражен мыслью: почему симметрия приятна для глаз? Что такое симметрия? Это врожденное чувство, отвечал я сам себе. На чем оно основано? Разве во всем в жизни симметрия?» (Л. Толстой. «Отрочество»).

Известно, что детские вопросы оказываются самыми сложными, тем более если устами отрока Николеньки Иртеньева их задает сам Лев Толстой. Попытаемся и мы ответить на них. Поскольку каждый человек имеет хотя бы интуитивное представление о симметрии, начнем с последнего вопроса:

Разве во всем в жизни симметрия? Действительно, достаточно оглянуться вокруг, чтобы убедиться, что это так: рыбы и птицы, животные и насекомые, обезьяна и человек, цветы и листья, грибы и водоросли — во всем в жизни симметрия! Воистину, должна существовать некая глобальная, если не космическая, сила, делающая мир симметричным. Такая вселенская сила есть — это сила тяготения.

Законы формообразования в живой природе подчиняются известному из кристаллографии *принципу симметрии Кюри*, который применительно к нашему случаю можно сформулировать так: *форма тела сохраняет только те элементы собственной симметрии, которые совпадают с накладываемыми на него элементами симметрии внешней среды.* Если же пластичный живой материал не имеет собственной изначальной

ДЮРЕР. Ева. *1507 г.*



ДЖ. ЛАНГДОН. Симметрия. Амбиграмма. *1992 г.*

Амбиграмма *(от греч.* αμφι — кругом, со всех сторон и γραμμα — рисунок, надпись) — читаемая в нормальном и перевернутом виде надпись. Искусство симметричной записи несимметричного слова.

симметрии, то он с необходимостью должен подчиняться законам симметрии внешнего поля.

Поле тяготения обладает высшей формой симметрии — сферической, поэтому сферически симметричны Земля, Солнце и все космические тела, сформированные под действием собственного поля гравитации. По той же причине сферически симметричны и взвешенные в воде микроорганизмы, для которых поле тяготения вторично по сравнению со сферически симметричным полем давления жидкости.

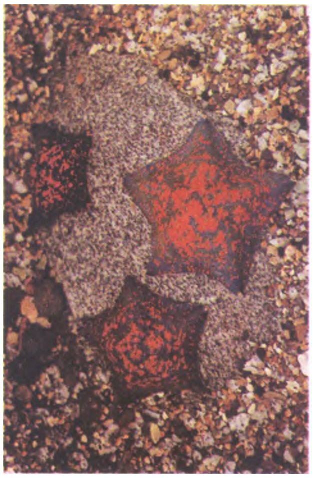
Если живой организм растет в прикрепленном состоянии (деревья) или ведет малоподвижный образ жизни (морские звезды), то у него выделяется ось воздействия силы тяжести, проходящая через точку закрепления, и сам организм приобретает таким образом радиальную симметрию конуса. Особенно хорошо симметрия конуса видна на парковых елях, которые в отличие от дикорастущих деревьев не подвержены другим внешним воздействиям и сами образуют конус, противонаправленный конусу силы тяжести.

Наконец, все движущееся на Земле в каждый момент движения направлено вдоль одной из бесконечного множества плоскостей симметрии поля гравитации и таким образом с необходимостью приобретает плоскость симметрии, которая определяется векторами силы тяжести и направления движения. Биологи эту плоскость симметрии называют *билатеральной*, а тип симметрии — *зеркальным*.

Благодаря симметрии живой организм приобретает по крайней мере два жизненно важных качества: устойчивость и «изовитальность» — способность одинаково развиваться относительно центра, оси или плоскости симметрии. Ясно, что в случае асимметричной формы животного относительно вектора движения поворот в одну из сторон был бы для него затруднительным и естественным для него стало бы не прямолинейное, а круговое движение. Хождение же по кругу рано или поздно закончится для животного трагически. Зеркальной симметрией обладает, например, автомобиль, одинаково хорошо поворачивающий и вправо, и влево, чего нельзя сказать о мотоцикле с коляской, который такой симметрией не обладает и постепенно вытесняется автомобилем и своим двухколесным зеркально-симметричным собратом.

Итак, по мере эволюции жизни на Земле от взвешенных в воде простейших организмов к прикрепленным растениям и далее к подвижным животным степень их симметричности убывала по схеме: *симметрия сферы — симметрия конуса — симметрия плоскости*. Но в любом случае универсальность симметрии живых форм объясняется универсальностью силы тяготения на Земле. Более того, поскольку сила гравитации действует во всей Вселенной, то и предполагаемые космические пришельцы не могут быть безудержно асимметрично-чудовищными, как их порой изображают, а обязательно должны быть симметричными.

Любопытно, что переход от сферической симметрии у низших организмов к зеркальной симметрии у высших пытались объяснить еще древние греки. Так, в диалоге Платона «Пир» Аристофан рассказывает о том, что первоначально люди



Морская звезда — пример живого организма с поворотной симметрией 5-го порядка. Этот тип симметрии наиболее распространен в живой природе (цветы незабудки, гвоздики, колокольчика, вишни, яблони и т. д.) и принципиально невозможен в кристаллических решетках неживой природы. Симметрию 5-го порядка называют симметрией жизни. Это своеобразный защитный механизм живой природы против кристаллизации, против окаменения, за сохранение живой индивидуальности.

были круглыми, «спина не отличалась от груди, рук было четыре, ног столько же, сколько и рук, и у каждого на круглой шее два лица, совершенно одинаковых... Страшные своей силой и мощью, они питали великие замыслы и посягали даже на власть богов...

И вот Зевс и прочие боги стали совещаться, как поступить с ними... Наконец, Зевс, насилу кое-что придумав, говорит:

— Кажется, я нашел способ и сохранить людей, и положить конец их буйству, уменьшив их силу. Я разрежу каждого из них пополам, и тогда они, во-первых, станут слабее, а во-вторых, полезней для нас, потому что число их увеличится. И ходить они будут прямо, на двух ногах. А если они и после этого не угомонятся и начнут буйствовать, я, сказал он, рассеку их пополам снова, и они запрыгают у меня на одной ножке». Для Платона совершенно очевидно, что с каждым новым рассечением, с каждой потерей симметрии жизненные потенции человека убывают. А нам пора перейти к следующему вопросу, поставленному Николенькой Иртеньевым:

Что такое симметрия? Начнем с этимологии слова — это всегда полезно. Греческое слово συμμετρια (συμ — производная от συν — вместе, совместно; μετρον — мера) означает *совместная мера, соразмерность*. Соразмерность левого и правого в билатеральной симметрии собратьев по разуму и по планете человек наблюдает с первых шагов существования. Неудивительно поэтому, что идея симметрии как организующего мир начала осознана человечеством издревле и вошла в его коллективную память, которую психологи называют *коллективным бессознательным*.

Как отмечал наш выдающийся ученый академик В. И. Вернадский (1863—1945), «чувство симметрии и реальное стремление его выразить в быту и жизни существовало в человечестве с палеолита и даже с эолита... Этот опыт многих тысяч поколений ясно указывает на глубокую эмпирическую основу этого понятия и ее существования в той материальной среде, в которой жил человек, в биосфере».

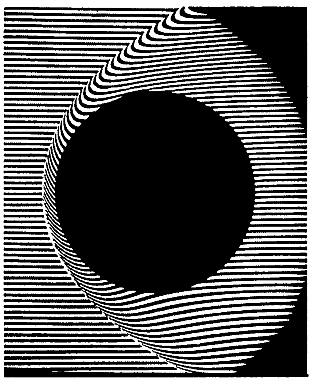
«Изучение археологических памятников показывает, что человечество на заре своей культуры уже имело представление о симметрии и осуществляло ее в рисунках и в предметах быта. Надо полагать, что применение симметрии в первобытном производстве определялось не только эстетическими мотивами, но в известной мере и уверенностью человека в большей пригодности для практики правильных форм». Это слова другого нашего замечательного соотечественника, посвятившего изучению симметрии всю свою долгую жизнь,— академика А. В. Шубникова (1887—1970).

Первоначальное понятие о геометрической симметрии как о соразмерности частей целого, как о гармонии пропорций целого с течением времени приобрело универсальный смысл и было осознано как всеобщая идея *инвариантности* (т. е. неизменности) относительно некоторых преобразований. Такое определение симметрии предложил Герман Вейль.

Итак, геометрический объект или физическое явление считаются симметричными, если с ними можно сделать что-то такое, после чего они останутся неизменными. Например,

Бабочка парусник махаон — прекрасный пример билатеральной симметрии в природе.

Снежинки — очаровательный пример красоты порядка в природе и замечательное воплощение принципа единства в многообразии. Тысячи разнообразных форм снежинок объединены законом поворотной симметрии 6-го порядка. Иоганн Кеплер посвятил снежинкам трактат «О шестиугольных снежинках». Их изучал Рене Декарт, а американский ученый Уильям Бентлей собрал коллекцию более 6000 микрофотографий снежинок.



В. ВАЗАРЕЛИ.
Зебры. *1943 г. (вверху).*
Интерферограмма отошедшей ударной волны при сверхзвуковом обтекании шара *(внизу).*
Искусство и наука, объединенные антисимметрией черных и белых полос.

пятиконечная звезда, будучи повернута на 72° (360° : 5), займет первоначальное положение, а ваш будильник одинаково идет и звенит в любом углу комнаты. Первый пример дает понятие об одном из видов геометрической симметрии — поворотной, а второй иллюстрирует важную физическую симметрию — однородность и изотропность (равнозначность всех направлений) пространства. Благодаря последней симметрии все физические приборы (в том числе и будильник) одинаково работают в разных точках пространства, если, конечно, не изменяются окружающие физические условия. Легко вообразить, какая бы царила на Земле неразбериха, если бы эта симметрия была нарушена!

Таким образом, не только симметричные формы окружают нас повсюду, но и сами многообразные физические и биологические законы гравитации, электричества и магнетизма, ядерных взаимодействий, наследственности пронизаны общим для всех их принципом симметрии. «Новым в науке явилось не выявление принципа симметрии, а выявление его всеобщности»,— писал Вернадский. Действительно, еще Платон мыслил атомы четырех стихий — земли, воды, огня и воздуха — геометрически симметричными в виде правильных многогранников (см. гл. 9). И хотя сегодня «атомная физика» Платона выглядит наивной, принцип симметрии и через два тысячелетия остается основополагающим принципом современной физики атома. За это время наука прошла путь от осознания симметрии геометрических тел к пониманию симметрии физических явлений.

Итак, в современном понимании симметрия — это общенаучная философская категория, характеризующая структуру организации систем. Важнейшим свойством симметрии является сохранение (инвариантность) тех или иных признаков (геометрических, физических, биологических, информационных и т. д.) по отношению к определенным преобразованиям. Математическим аппаратом изучения симметрии сегодня является теория групп и теория инвариантов.

«Принцип симметрии в XX в. охватывает все новые области. Из области кристаллографии, физики твердого тела он вошел в область химии, в область молекулярных процессов и в физику атома. Нет сомнения, что его проявления мы найдем в еще более далеком от окружающих нас комплексов мире электрона и ему подчинены будут явления квантов». Замечательно, что эти слова Вернадского, сказанные им в начале века, не просто сбываются, но сбываются в той же последовательности в открытиях симметрии двойной спирали молекулы ДНК и в симметрии кварков.

И еще несколько слов о нарушении симметрии. Мы уже отмечали, что все физические законы являются симметричными. Но при ближайшем рассмотрении в каждой такой симметрии обнаруживается маленький изъян. Оказывается, природа не терпит точных симметрий! *Природа почти симметрична, но не абсолютно симметрична.* Так, планетные орбиты, которые еще Пифагором мыслились в виде совершенных окружностей, на самом деле оказались *почти* окружностями, но все-таки не окружностями, а эллипсами. Нарушение

ЁМЕЙМОН (Ворота сияния солнца) — вход в комплекс погребального ансамбля Тосегу в г. Никко.
Япония. 1634—1636 гг.
Японская пословица гласит: «Не говори кекко (чудесно), если ты не видел Никко!»

симметрии обнаружено сегодня во многих явлениях ядерной физики.

Приблизительная симметрия является сегодня одной из научных загадок. Вот что по этому поводу пишет американский физик, лауреат Нобелевской премии Ричард Фейнман: «Почему природа столь близка к симметрии? По этому вопросу ни у кого нет никакой разумной мысли. Единственное, что я могу предложить вам, — это старое японское предание. В японском городе Никко есть ворота, которые японцы называют самыми красивыми воротами страны. Они были построены в период большого влияния китайского искусства. Это необычайно сложные ворота, со множеством фронтонов, изумительной резьбой и большим количеством колонн, на основании которых вырезаны драконьи головы, божества и т. п. Но, приглядевшись, можно заметить, что в сложном и искусном рисунке на одной из колонн некоторые из его мелких деталей вырезаны вверх ногами. В остальном рисунок полностью симметричен. Спрашивается: для чего это было нужно? Как говорит предание, это было сделано для того, чтобы боги не заподозрили человека в совершенстве. Ошибка была сделана намеренно, дабы не вызывать зависти и гнева богов.

Мы можем, вообще говоря, подхватить эту мысль и сказать, что истинное объяснение приблизительной симметрии мира состоит в следующем. Боги сотворили свои законы только приближенно симметричными, чтобы мы не завидовали их совершенству!» Другого объяснения тайны приближенной сим-

Озеро горных духов. *Алтай. Фото автора.*
Отражение в воде — единственный пример горизонтальной симметрии в природе. Быть может, в этом и состоит тайна его очарования?

Львиноголовый орел Имдугуд, когтящий оленей.
Рельеф храма в Эль-Обейде. Шумер. Ок. XXVI в. до н. э.
Зеркальная симметрия, ставшая основой всех последующих геральдических композиций.

метрии наука пока не знает. Мы же перейдем к третьему вопросу Николеньки Иртеньева:

Почему симметрия приятна для глаз? По-видимому, господством симметрии в природе, о котором мы не случайно так много говорили, во многом объясняется эстетическая ценность симметрии для человека. С детства человек привыкает к билатерально симметричным родителям, затем у него появляются билатерально симметричные друзья; он видит зеркальную симметрию в бабочках, птицах, рыбах, животных, поворотную — в стройных елях и волшебных узорах снежинок, переносную — в оградах парков, решетках мостов, лестничных маршах, бордюрах, которые издревле были любимым декоративным элементом. Человек привыкает видеть в природе вертикальные оси и плоскости симметрии, и вертикальная симметрия воспринимается им гораздо охотнее. Мы нигде не увидим обои с горизонтальными осями симметрии, ибо это вызвало бы неприятный контраст с вертикальной симметрией растущих за окном деревьев. Единственная горизонтальная симметрия, которую мы встречаем в природе,— это отражение в зеркале воды. Возможно, в необычности такой симметрии и заключается ее завораживающая сила.

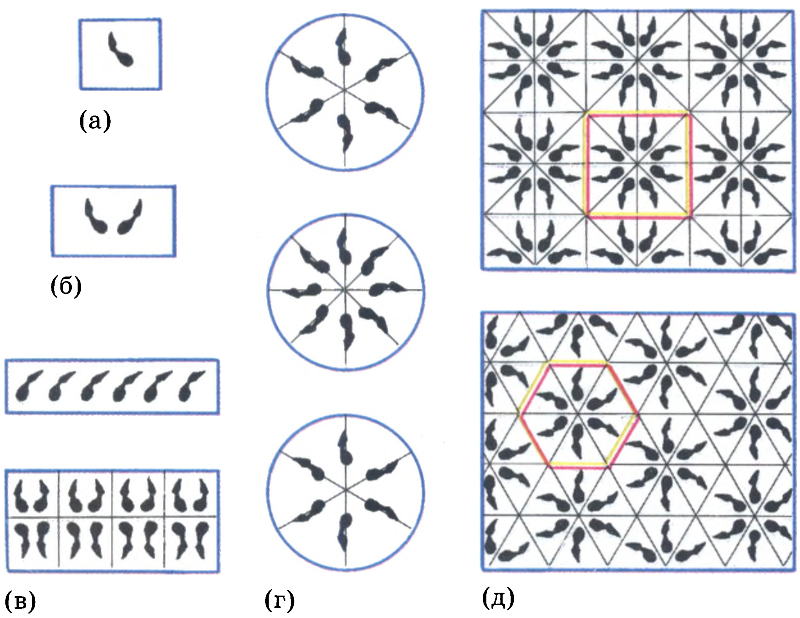
Таким образом, симметрия воспринимается человеком как проявление закономерности, порядка, царящего в природе. При восприятии порядка, очевидно, включается не только образное, но и рациональное полушарие. Мы не только принимаем Космос таким, какой он есть (так же как и Хаос), но и бессознательно начинаем анализировать его: «взвешивать» симметричные группы элементов, соизмерять ритмические единицы, сопоставлять пропорциональные элементы. Порядок мы постигаем не только чувством, но и разумом, не только правым, но и левым полушарием, и потому порядок доставляет нам большее эстетическое удовлетворение, чем хаос. «Порядок освобождает мысль»,— любил повторять великий французский математик, философ и храбрый воин Рене Декарт (1596—1650). «Творчество есть акт упорядочивания»,— вторил Декарту его соотечественник, выдающийся зодчий XX в. Ле Корбюзье.

Итак, симметрия, воспринимаемая человеком как закономерность структуры, как внешнее проявление внутреннего порядка, начинает обладать эстетической ценностью, т. е. воспринимается как красота. Простой пример убеждает нас в этом. Чернильная клякса сама по себе некрасива. Но стоит перегнуть лист бумаги с невысохшей кляксой пополам, и мы получим двойную кляксу, которая уже производит приятное впечатление. Зеркальная симметрия новой кляксы, т. е. закономерное расположение ее частей, привносит в нее элементы красоты. Знание законов геометрической симметрии сделает наши опыты с кляксой весьма плодотворными.

На рисунке изображены узоры, полученные с использованием различных типов геометрической симметрии из простой, бесформенной кляксы. Узор на рисунке *б* получен с помощью зеркальной симметрии. Закон его построения слишком прост, и потому эстетическая ценность такого узора невелика.

Узоры, приведенные на рисунке *в*, называются бордюрами и представляют собой тип переносной симметрии, когда каждая предыдущая фигура совпадает с последующей при поступательном перемещении вдоль бордюра на постоянный интервал (шаг симметрии). Нижний бордюр имеет более сложный закон построения, чем простая переносная симметрия. Всего же существует семь типов бордюров.

На рисунке *г* показаны так называемые *розетки*. Розетки получаются поворотом фигуры вокруг вертикальной оси сим-



«Кляксография» — узоры, полученные из обыкновенной кляксы *(а)* с помощью зеркальной симметрии *(б)*, переносной симметрии *(в)*, поворотной симметрии *(г)* и орнаментальной симметрии *(д)*.

метрии на угол $360°/n$ ($n=2, 3, 4, \ldots$), т. е. обладают поворотной симметрией n-го порядка. Верхняя розетка имеет поворотную симметрию 6-го порядка, средняя — 8-го, нижняя же сочетает зеркальную и поворотную симметрии, но в то же время она имеет чисто поворотную симметрию 3-го порядка.

Наконец, на рисунке *д* показаны два орнамента из семнадцати возможных. Орнаментальная симметрия строится на одной из пяти возможных плоских решеток, основу которых составляют правильный треугольник, квадрат, прямоугольник, параллелограмм и правильный шестиугольник. Верхний орнамент на рисунке *д* имеет квадратную решетку, а нижний — гексагональную (правильный шестиугольник). Заполнив одну ячейку решетки, мы получим с помощью переносной симметрии весь орнамент.

Вот так с помощью симметрии простая клякса превращается в затейливые узоры, которые уже никак не назовешь некрасивыми. Мы вглядываемся в узоры симметрии, открываем их законы, и они воспринимаются нами как красивые. По этому поводу А. В. Шубников и его ученик В. А. Копцик в книге «Симметрия в науке и искусстве» пишут: «Смысл эстетического воздействия симметрии (и всякой иной закономерности), по нашему мнению, заключается в том психическом процессе, который связан с *открытием* ее законов».

Другим важным фактором, составляющим эстетическое содержание симметрии, является ее *целесообразность*, которая также есть проявление закономерного. Уже первобытные люди понимали, что симметричные изделия более целесообразны, что проявляется в их устойчивости и равной функциональности в разных направлениях. Таким образом, уже в эпоху неолита симметрия была выделена как наиболее совершенная и красивая форма, о чем свидетельствуют многочисленные симметричные орудия и украшения с симметричными рисунками.

Современный человек просто не в состоянии представить себе несимметричный (а значит, и нефункциональный) самолет или автомобиль. В этой связи показательны наблюдения известного летчика-испытателя, Героя Советского Союза Марка Галая: «Я заметил, что красивая, ласкающая своими пропорциями взор машина обычно к тому же и хорошо летает. Эта на первый взгляд почти мистическая закономерность имеет, я думаю, свое вполне рациональное объяснение: дело, по-видимому, обстоит как раз наоборот — хорошо летающая машина начинает представляться «красивой». Эстетическое формируется под влиянием рационального».

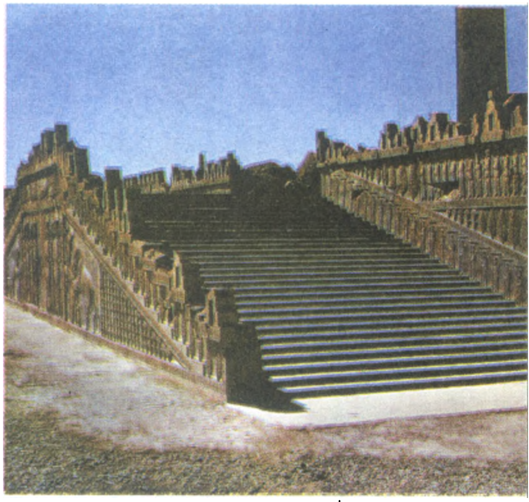
Итак, целесообразность симметричных форм была осознана человечеством в доисторические времена, а в сознании древних греков симметрия уже становится олицетворением закономерности, целесообразности, а следовательно, и красоты. Идея связи прекрасного с симметрией пронизывает всю греческую философию, все греческое искусство. Достаточно вспомнить строго симметричные формы античных архитектурных памятников, изумительную стройность греческих ваз, математическую строгость их орнамента. С тех пор симметрия и красота в сознании человека слиты воедино.

Краснофигурный кратер. *470 г. до н. э. (вверху).* КАЛИМЕД. Чернофигурная амфора с изображением борцов. *360 г. до н. э. (внизу).* Антисимметрия двух основных стилей вазописи в Древней Греции.

(а)

(б)

(в)



(г)

СИММЕТРИЯ В ИСКУССТВЕ.
Зеркальная симметрия: нагрудное украшение с именем фараона. *XX в. до н. э. (а).*
Капитель колонны из дворца Артаксеркса II в Сузах. *V—IV вв. до н. э. (б).*
Поворотная симметрия 12-го порядка: мозаика купола баптистерия в Равенне. *V в. (в).*
Переносная симметрия: рельефы ападаны в Персеполе. *VI—V вв. до н. э. (г).*

В «Фаусте» Гете противопоставляет в образах прекрасной Елены и одноглазой, однозубой старухи Форкиады красоту симметрии и уродство асимметрии. В «Сказке о царе Салтане...» Пушкин рисует величавую Царевну-Лебедь со звездой во лбу (красота — симметрия) и окривевших злодеек ткачиху с поварихой (уродство — асимметрия). В «Войне и мире» Льва Толстого мы читаем: «Это был огромный, в два обхвата, дуб, с обломанными, давно видно, суками и обломанной корой, заросшей старыми болячками. С огромными своими неуклюже, несимметрично растопыренными корявыми руками и пальцами, он старым, сердитым и презрительным уродом стоял между улыбающимися березами».

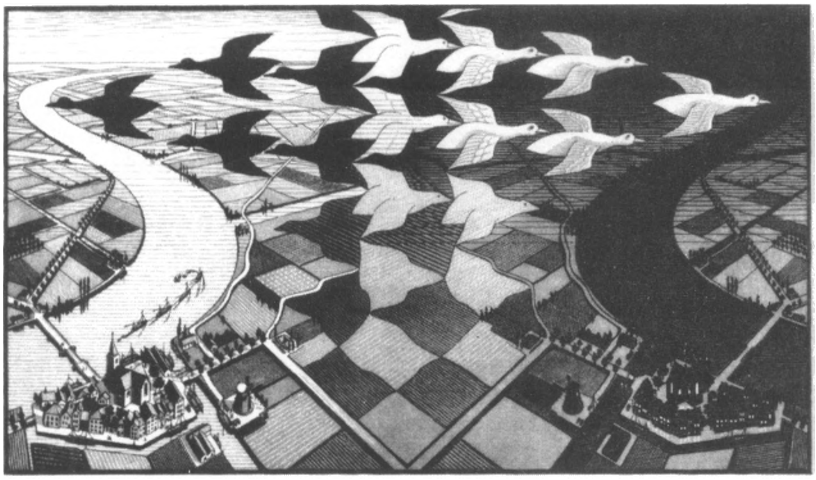
Симметрия как объективный признак красоты, как необходимый элемент гармонии частей и целого проходит через всю историю искусств. «Равенство, неравенство, повторение и симметрия, определенные структуры играют в искусстве, как и в математике, фундаментальную роль»,— считает физик Гейзенберг. Не говоря уже об архитектуре и скульптуре, симметрия господствует в изобразительном искусстве Древнего Египта, Древней Греции и Рима, средневековья и Возрождения, мусульманском орнаменте. Зеркальная симметрия была особенно любима шумерами.

ЕВХАРИСТИЯ.
Мозаика апсиды
собора Св. Софии в Киеве.
1043—1046 гг.
Зеркально-симметрическое раздвоение фигуры Христа позволяло одновременно изображать два важнейших момента евхаристии: причащение хлебом, символизировавшим тело Христово, и причащение вином, обозначавшим кровь Христа. Зеркальное раздвоение Христа было одним из излюбленных приемов в иконографии тайной вечери.

Симметрия в искусстве — это волнующая тема, требующая особого разговора. Поэтому мы ограничимся только замечанием о том, что следование принципу зеркальной симметрии в искусстве было настолько сильным, что порой приводило к парадоксальным результатам. Так, на мозаике киевского собора Св. Софии под знаменитой орантой изображены два зеркально-симметричных Христа, обращенных лицом к ученикам. Правда, при ближайшем рассмотрении мы увидим, что симметрия здесь только приблизительная, так как один Христос преломляет хлеб, а другой разливает вино. Этот прием, позволяющий одновременно изобразить два важнейших момента тайного причастия, безусловно, является слишком «математичным» и со временем был вытеснен более реалистическим изображением тайной вечери.

Как и в любом деле, абсолютизация одной идеи не может дать лучших результатов. Симметрия в искусстве не составляет исключения. «Красота неправильная», асимметрия, наравне с симметрией пробивала себе дорогу в искусстве, ибо сведение красоты только к симметрии ограничивало богатство ее внутреннего содержания, лишало красоту жизни. Истинную красоту можно постичь только в единстве Космоса и Хаоса, симметричного порядка и асимметричного беспорядка. Покой, равновесие, закономерность симметрии должны дополняться движением, свободой, случайностью асимметрии.

Примером удивительного сочетания симметрии и асимметрии является Покровский собор (храм Василия Блаженного) на Красной площади в Москве. Эта причудливая композиция из десяти храмов, каждый из которых обладает центральной симметрией, в целом не имеет ни зеркальной, ни поворотной симметрии. *Симметричные* архитектурные детали собора кружатся в своем *асимметричном*, беспорядочном танце вокруг его центрального шатра: они то поднимаются, то опускаются,



М. ЭШЕР. День и ночь. *1938 г.*
Философское осмысление идеи антисимметрии в искусстве.

БАРМА и ПОСТНИК.
Покровский собор на рву — храм Василия Блаженного. Москва. *1555—1560 гг.*
Гармоническое сочетание симметрии частей и асимметрии целого.

то как бы набегают друг на друга, то отстают, создавая впечатление радости и праздника. Без своей удивительной асимметрии храм Василия Блаженного просто немыслим!

Между симметрией и ее отрицанием — асимметрией есть еще два очень важных симметрийных понятия — *антисимметрия* и *диссимметрия*. Вообразим некое волшебное зеркало, которое отражает данное черно-белое изображение, как и обычное зеркало, но при этом меняет цвета на противоположные. Подобное явление называют антисимметрией. Итак, *антисимметрия есть сохранение одного свойства объекта и замена другого свойства на противоположное.*

Понятие антисимметрии было введено А. В. Шубниковым в 1951 г. в его книге «Симметрия и антисимметрия конечных фигур» и оказалось необычайно плодотворным. Поскольку первым шагом всякого анализа является установление дихотомии некоторого свойства и его отрицания, например дихотомии *материальное — идеальное, объективное — субъективное, рациональное — эмоциональное, добро — зло, Космос — Хаос*, и вообще *Янъ — Инь* в философии, *четное — нечетное, конечное — бесконечное, дискретное — непрерывное* в математике, *позитрон — электрон, протон — анти-протон, нейтрино — антинейтрино, кварк — антикварк* и вообще *частица — античастица, материя — антиматерия* и даже *мир — антимир* в физике, то нетрудно оценить, сколь велико научное и мировоззренческое значение понятия антисимметрии.

Не меньшую роль антисимметрия играет и в искусстве. Достаточно вспомнить типично «антисимметричные» названия великих литературных произведений: «Война и мир», «Преступление и наказание», «Принц и нищий», «Волки и овцы», «Толстый и тонкий» и др. Прекрасным примером антисимметрии целых направлений в искусстве являются *чернофи-*

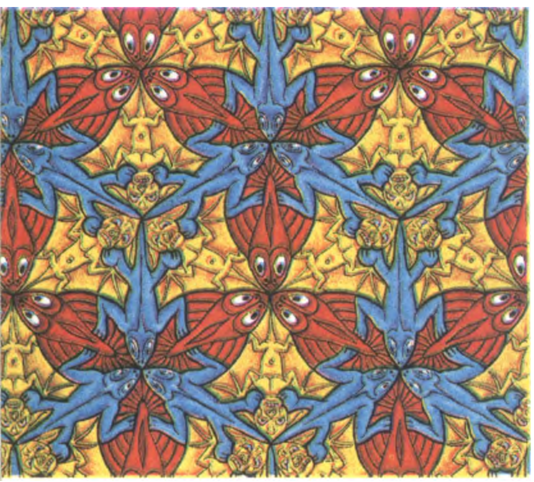
гурный и *краснофигурный* стили древнегреческой вазописи (в первом случае фигуры наносились черным лаком на красноватый фон глины; во втором, более сложном и более позднем стиле черным делался фон, а фигуры имели цвет незакрашенной глины). Широко используется антисимметрия в различной символике, начиная от антисимметрии первоначал Инь — Янъ в древнекитайском символе Тайцзи, с которого мы начали книгу, вплоть до антисимметричного названия знаменитого шотландского виски «Black and White» и его эмблемы в виде черной и белой собачек.

Классическим примером антисимметрии в живописи является гравюра голландского художника Маурица Эшера (1898—1972) «День и ночь». Дневной и ночной города на гравюре связаны зеркальной плоскостью антисимметрии: геометрия левой и правой частей гравюры абсолютно зеркально-симметрична, а цвет соответствующих геометрических объектов противоположен. В результате белые птицы летят из дня в ночь, а черные — из ночи в день. Сами птицы представляют собой сложный орнамент, возникающий из последовательных деформаций черно-белых антисимметричных квадратов полей. Творчество Эшера отличается глубочайшим проникновением в законы симметрии и антисимметрии — но это уже отдельная тема.

В случае, если геометрически симметричный объект можно по определенному закону раскрасить в несколько цветов или физическое явление имеет несколько дискретных закономерно изменяющихся состояний, то идея черно-белой антисимметрии обобщается в понятии *цветной симметрии*. Разработка теории цветной симметрии связана с именем выдающегося российского кристаллографа академика Н. В. Белова (1891—1982). Замечательным примером трехцветной симметрии, построенной на гексагональной (шестиугольной) решетке, является знаменитый орнамент М. Эшера «Ящерицы».

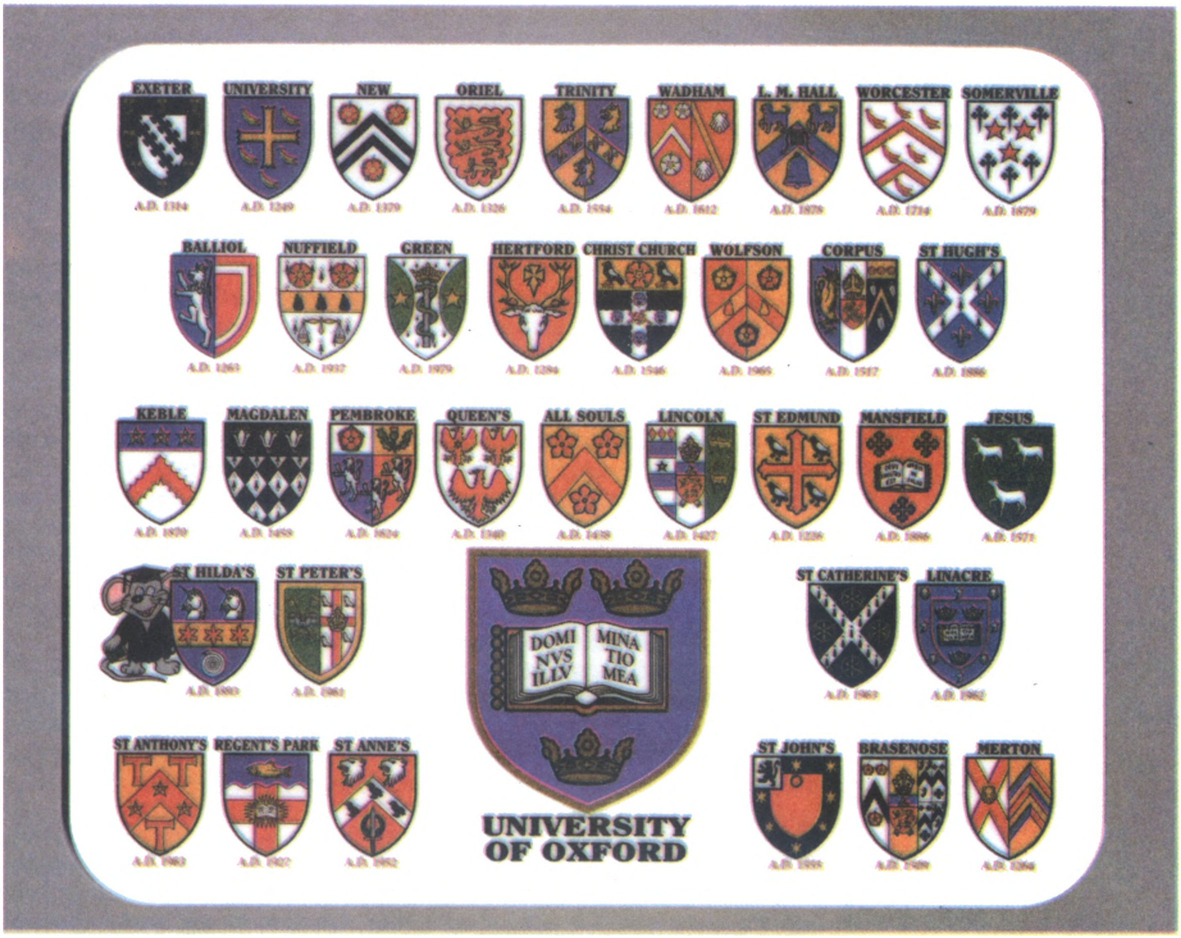
М. ЭШЕР. Ящерицы. *Орнамент.*

Очевидно, что отсутствие свойства сохранения цвета в антисимметрии не обеднило, а обогатило соответствующую геометрическую симметрию, сделало возможным появление совершенно нового явления в геометрической симметрии — антисимметрии. Так мы приходим к важнейшему симметрийному понятию, введенному французами Луи Пастером (1822—1895) и Пьером Кюри (1859—1906), понятию *диссимметрии*. Диссимметрия — это *частичное отсутствие симметрии, расстройство симметрии, выраженное в наличии одних симметрийных свойств и отсутствии других*.



М. ЭШЕР. Ящерицы, рыбы и летучие мыши. *Орнамент.*

Как выяснил Пьер Кюри, именно отсутствующие элементы симметрии допускают развитие системы в отличие от присутствующих элементов симметрии, которые фиксируют ее статус и ограничивают свободу развития. Таким образом, именно диссимметрия приводит к появлению новых свойств системы. Отсюда и знаменитая фраза Кюри, имеющая статус закона: *диссимметрия творит явление*. В новых понятиях принцип симметрии Кюри, с которого мы начали знакомство с симметрией, принимает более стройное звучание: *при наложении нескольких явлений различной природы их диссимметрии складываются.*



ГЕРБЫ колледжей Оксфордского университета. *Коврик для компьютерной мыши.*

Г. Вейль не случайно называл зеркальную симметрию геральдической, поскольку она широко распространена в геральдике. Однообразие зеркальной симметрии оживляется в геральдике поворотной, переносной и цветной симметриями, а также антисимметрией и дисимметрией.

Особенно важным понятие диссимметрии становится в приложении к искусству, которое живет на границе Космоса и Хаоса. Так что если первую часть книги мы начали с определения красоты как единства качественных начал Космоса и Хаоса, то закончить ее мы можем определением красоты в количественных терминах: *красота есть единство симметрии и диссимметрии.* Симметрия придает красоте порядок, объективную закономерность, тогда как диссимметрия оставляет свободу художнику. Ибо, как справедливо заметил американский философ и математик Ч. Пирс (1839—1914), «хотя порядок и необходим искусству, однако посредственное искусство как раз и страдает от избытка порядка». Только согласие двух разногласных начал симметрии и диссимметрии ведет искусство к его идеалу, именуемому гармонией.

Итак, сфера влияния симметрии и диссимметрии поистине безгранична: природа — наука — искусство. Всюду мы видим единство двух великих начал — симметрии и диссимметрии, которые и определяют гармонию природы, мудрость науки и красоту искусства.

6.3. PROPORTIO

«Коль скоро, стало быть, все вещи прекрасны и в известном смысле могут служить источником наслаждения, а красоты и наслаждения нет без пропорциональности, пропорциональность же прежде всего существует в числах, необходимо, чтобы все поддавалось счислению, отчего число и есть в духе важнейший прообраз создателя, а в вещах — важнейший след, ведущий к мудрости».

Так писал в XIII в. в «Путеводителе ума к Богу» Джованни Фиданца Бонавентура (1221—1274), крупнейший представитель поздней схоластики, причисленный через два века к лику святых, а еще через столетие — к числу пяти величайших учителей церкви. Неудивительно поэтому, что суждения Бонавентуры аккумулировали в себе менталитет всей эпохи средневековья от Августина до Фомы Аквинского, считавшего пропорцию основным началом в онтологии красоты.

Вообще, если искусство античности, провозгласившее билатерально симметричного человека мерой всех вещей, можно назвать искусством зеркальной симметрии, то искусство средневековья с его бесконечными поисками систем пропорционирования «ад триангулум» или «ад квадратум» (см. гл. 18) следует назвать искусством пропорции.

Слово proportio ввел в употребление Цицерон в I в. до н. э., переведя на латынь платоновский термин αναλογια, который означал соответствие, соотношение. С тех пор вот уже 2000 лет пропорцией в математике называют равенство между отношениями четырех величин a, b, c, d:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,. \tag{6.1}$$

Пропорция в искусстве также определяет соотношение величин элементов художественного произведения либо соотношение отдельных элементов и всего произведения в целом. В эстетике пропорция, как и симметрия, является составным

Матрешки — хороший пример переносной симметрии подобия.

элементом категории меры и выражает закономерность структуры эстетического образа.

На первый взгляд симметрия и пропорция выглядят как два антипода. Если симметрия порождает однородное строение формы, т. е. несет в себе идею сохранения, то пропорция обеспечивает однородный рост формы, т. е. несет в себе идею изменения. *Симметрия — это неизменность состояния, равновесие; пропорция — это неизменность изменения, неравновесность.*

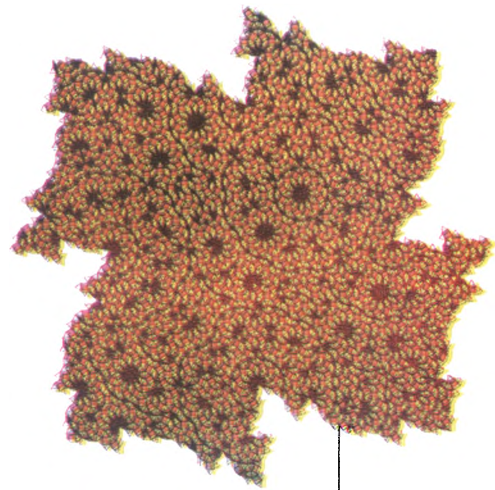
Принцип симметрии, объяв собой всю природу от микромира до макрокосма, опускает тем не менее одно важнейшее явление — явление роста, изменения, которое и охватывает принцип пропорции. Следовательно, *симметрия — это статика природы, а пропорция — ее динамика.* Итак, пропорция — это изменение, но не любое изменение, а подчиненное конкретной идее — идее инвариантности. Но инвариантность — это и есть симметрия, значит, принцип пропорции естественным образом вытекает из принципа симметрии. Вот почему пропорцию называют также *симметрией подобия* или *динамической симметрией.* Первый термин принадлежит русскому ученому А. В. Шубникову, а второй —американскому искусствоведу Джею Хэмбиджу.

Хорошо знакомым примером переносной симметрии подобия является группа матрешек, поставленная в ряд: отношение высот матрешек или «угол роста» матрешек является той неизменной постоянной, которая характеризует данную симметрию подобия. Спиралевидной, или винтовой, симметрией подобия обладают всевозможные раковины (хотя и не все), например раковины аммонита. Вообще все растущее обладает той или иной симметрией подобия, отчего роль этого вида симметрии в природе трудно переоценить.

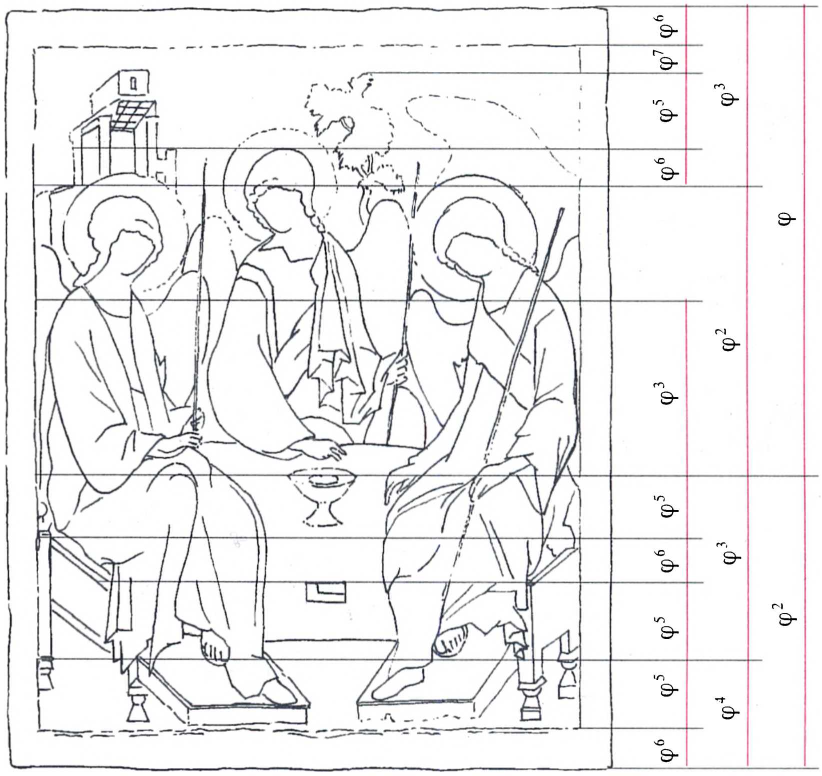
Сегодня симметрия подобия или принцип пропорции получили неожиданное развитие во фрактальной геометрии, поскольку отличительным свойством фракталов является их линейное или нелинейное самоподобие. Так, средневековый принцип пропорции, провозглашенный просвещенными монахами как объективный закон красоты, как «в духе важнейший прообраз Создателя, а в вещах — важнейший след, ведущий к мудрости», через 1000 лет, на рубеже XX и XXI вв., и в самом деле становится важнейшим «путеводителем ума» к тайнам формообразования в природе и искусстве, могучим методом постижения гармонии мироздания и гармонии искусства.

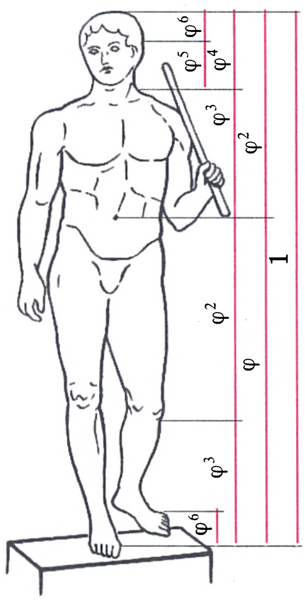
Важнейшую роль в искусстве играет *пропорция золотого сечения.* Эта пропорция была известна древним грекам, которые называли ее *делением отрезка в крайнем и среднем отношении,* и встречается в бессмертных «Началах» Евклида, где дан геометрический метод ее построения с помощью диагонали двойного квадрата. По преданию, задолго до Евклида золотую пропорцию знал Пифагор, который в свою очередь, скорее всего, позаимствовал ее у древних египтян, коих он посетил в своих странствиях.

Золотая пропорция определяется как *деление отрезка на две неравные части, при котором меньшая часть так от-*



Я. ВАТАНАБА.
Июль *(вверху).*
Сентябрь *(внизу).*
Два фрагмента из цикла 12 месяцев года. 1994 г.
Выбирая различные гаммы цветов для раскраски квазипериодических покрытий плоскости, впервые обнаруженных оксфордским математиком Роджером Пенроузом, японский физик Ясунари Ватанаба создал компьютерную программу, рисующую прекрасные фрактальные орнаменты. Одна из работ Ватанабы — календарь из 12 месяцев года — была представлена на Международной конференции «Математика и искусство» в Суздале.





ПОЛИКЛЕТ. Дорифор (копьеносец), или Канон (прорисовка). *Ок. 440 г. до н. э. (слева).* А. РУБЛЕВ. Троица (прорисовка). *Ок. 1420 г. (справа).* Свойство самоподобия ряда золотого сечения делает его важнейшим морфологическим фракталом природы и искусства. Как и в случае с зеркальной симметрией, развитие морфологии искусства идет от природного ряда золотого сечения в вертикальных пропорциях человека к фракталу золотого сечения в художественной композиции.

носится к большей, как большая ко всей длине отрезка. Легко видеть, что золотое сечение есть удачное сочетание симметрии и асимметрии.

В самом деле, зеркально-симметричное деление отрезка пополам выглядит слишком уравновешенно, мертво. Если точку деления взять слишком близко к одному из концов отрезка, то новая конфигурация будет чересчур неуравновешенной, беспокойной. Только некоторая золотая середина, скрепленная внутренним единством симметрии подобия целого и его частей, даст желаемое внешнее единство симметрии и асимметрии. Если бы все загадки золотого сечения можно было объяснить так просто!

«Эта наша пропорция, высокочтимый герцог, достойна такой привилегии и такого превосходства, какие только можно высказать по поводу ее безграничных возможностей, поскольку, не зная ее, никогда нельзя обнаружить ни в философии, ни в другой какой-нибудь науке очень многих вещей, достойных восхищения».

Этими словами начиналась глава VI «О достойном ее восхвалении» книги монаха ордена францисканцев Луки Пачоли (ок. 1445— ок. 1514) «О божественной пропорции», посвященной исключительно золотой пропорции. *Sectio aurea — золотое сечение* назвал эту пропорцию друг Пачоли Леонардо да Винчи, сделавший иллюстрации для книги своего друга. Сам же монах предпочитал другое название: *Sectio divina — божественное сечение.* Книга Пачоли, давшая второе рождение золотому сечению, оказала огромное влияние на мировоззрение эпохи Возрождения. И если эта эпоха по праву называется золотым веком в истории человечества, то искусство Ренессанса можно назвать искусством золотого сечения.

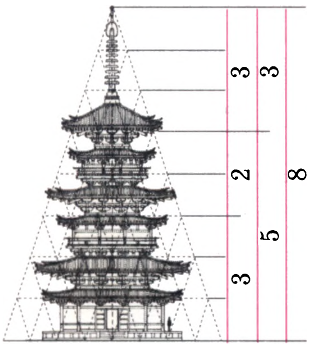
Последующие научные открытия показали, что золотое сечение составляет основу многих природных явлений, что оно связано с глубокими естественно-научными закономерностями.

Самым последним открытием такого рода явилось обнаружение того факта, что золотое сечение является критерием перехода от порядка к хаосу в нелинейных динамических системах. Таким образом, будучи мерой, законом природы, золотое сечение становится и мерой творчества художника, законом красоты: совершенная природа дает человеку образец совершенства. Так раскрывается еще одна эстетическая грань золотого сечения — целесообразность, ибо в целесообразности природы сомнений у человечества никогда не было.

Золотое сечение в искусстве мы находим всюду: в архитектуре, музыке, живописи, литературе, прикладных искусствах. На точку золотого сечения обычно приходится кульминация или главная мысль поэтического, драматургического или музыкального произведения (см. гл. 14 и др.). Золотое сечение мы находим в общей композиции произведения и в соотношении его частей вплоть до самых малых. В живописи линия золотого сечения часто является и линией горизонта (см. «Обручение Марии» Рафаэля) или линией смыслового центра композиции (чаша в «Троице» Андрея Рублева).

Золотое сечение в искусстве мы находим всегда: в совершенно различных цивилизациях, отделенных друг от друга тысячелетиями, в усыпальнице Хеопса в Древнем Египте и в храме Парфенон в Древней Греции, в Баптистерии эпохи Возрождения в Пизе и в храме Покрова на Нерли, в санкт-петербургском Адмиралтействе и в ультрасовременных сооружениях Ле Корбюзье. Золотое сечение мы обнаруживаем и в музыкальных произведениях от Баха до Бартока, и в поэтических произведениях от Пушкина до Вознесенского, и в живописи от Андрея Рублева до Сальвадора Дали.

Загадка притягательной силы золотого сечения давно волнует человечество. В главе 17 мы расскажем об уникальных геометрических свойствах пропорции золотого сечения, объясняющих его особую роль в формообразовании в природе и искусстве. Есть и чисто физиологические объяснения пред-



Пагода храма Янусидзи.
Нара. Япония. VIII в.
Числа Фибоначчи 8, 5, 3, 2 и отношение золотого сечения определяют пропорции пагоды.

МИКЕЛАНДЖЕЛО. Сотворение Адама.
Фрагмент росписи свода Сикстинской капеллы в Ватикане. 1508—1512 гг.
Дарующий жизнь перст Бога-демиурга и еще инертную руку Адама отделяет ничтожное пространство, сжавшееся до точки. В этой точке весь динамизм композиции, электрический разряд творящей энергии, сладостный миг рождения жизни. Неудивительно, что эта главная смысловая точка есть точка золотого сечения композиции.

почтения человеком пропорции золотого сечения, связанные с биоритмами мозга человека, ритмами сердечных сокращений, спецификой сокращения глазных мышц и т. д.,— во всех этих явлениях обнаружена пропорция золотого сечения. Конечно, во многом справедливо и самое простое объяснение: эстетическое превосходство золотого сечения является не врожденным, а «благоприобретенным» в процессе исторического развития человечества. Поскольку золотое сечение дано человеку самой природой в пропорциях его тела, оно постепенно и стало для него эталоном красоты.

Но вот совсем недавно Викторина Лефевр поставила удивительный по простоте опыт. Испытуемым давались прозрачные пакетики с двумя никак не отобранными, практически одинаковыми фасолинами. Полагаясь только на свою интуицию, испытуемым предлагалось разложить «красивые» и «некрасивые» фасолины по двум коробкам. Как уже догадывается читатель, все испытуемые разложили пакетики в пропорции золотого сечения! Здесь уже работают чисто психологические факторы. Но какие и почему? Пока это загадка.

Несмотря на явное превосходство, пропорция золотого сечения, разумеется, не является единственной в искусстве. Различным системам пропорциональности посвящена фактически вся третья часть книги, ибо искусство архитектуры есть искусство пропорционирования. Поэтому мы не будем более останавливаться на пропорции и перейдем к еще одному слагаемому прекрасного — ритму.

6.4. ΡΥΘΜΟΣ

«С о к р а т. Теперь скажи мне, если отнять у поэзии в целом напев, ритм и размер, останется ли что, кроме слов?

К а л л и к л. Ровно ничего».

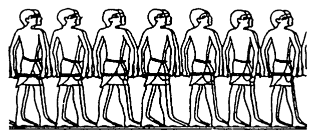
Решительный ответ Калликла, сохраненный в платоновском диалоге «Горгий», убеждает нас в том, что ведущая роль ритма в искусстве была осознана с первых шагов «философии искусства» — эстетики. Недаром и сегодняшнее авангардное искусство — искусство разрушенных форм — оставило себе только ритм и отбивает его во все доступные ему барабаны.

Принцип ритма, как и принцип симметрии, пронизывает окружающий нас мир во всех направлениях: ритмы пульсаров во Вселенной, открытые в 1967 г., и ритмы Солнечной системы — ритмы смены дня и ночи, времен года, фаз Луны, приливов и отливов, цветения растений и сезонных миграций животных, известные человечеству издревле; постоянно ощущаемые нами ритмы дыхания и сердцебиения и не замечаемые никогда ритмы биотоков мозга; бегущие во времени музыкальные и поэтические ритмы и застывшие в пространстве ритмы архитектурных сооружений, оград, орнаментов и т. д.

Ритмы окружают человека повсюду, и ритмы пронизывают человека насквозь. На сегодня известно более 400 суточных биоритмов у человека. Ритмичность — основное свойство живого организма, а биоритмы — необходимое условие его существования. Помимо биоритмов, а часто и вопреки им на человека наваливаются и социальные ритмы: ритмы рабочего дня, ритмы теле- и радиопередач, ритмы транспорта и т. д.

По своей универсальности принцип ритма может сравниться только с принципом симметрии, и такое сопоставление вполне закономерно. В самом деле, в основе любого ритма лежит течение времени. Время *одномерно и однородно* — его математический прообраз есть обычная координатная ось. Какие же виды симметрии допускает координатная ось? Только один — переносная симметрия. Таким образом, *ритм есть переносная симметрия времени.* Пространственные ритмы воспринимаются нами через временные: глаз обегает равные пространственные единицы за равные интервалы времени, и в нашем сознании пространственные ритмы преобразуются во временные. Наиболее ярким примером пространственных ритмов, выражаемых через темпоральные, служит окружность циферблата часов, в которой центральная симметрия 12-го порядка циферблата воспринимается как переносная симметрия 12 часов времени.

Итак, *подобно пропорции, ритм есть одна из разновидностей симметрии.* Только следуя традиции и благодаря ярким структурообразующим свойствам ритма, имеет смысл отличать этот тип симметрии как в природе, так и в искусстве. Идея симметрии является основополагающей в феномене ритма, и из нее вытекает как универсальность ритма, так и многие его фундаментальные свойства.

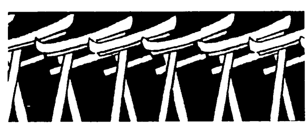


(а)

(б)

(в)

(г)



(д)

Ритмы орнаментов разных народов:
(*а*) — древнеегипетский
(*б*) — древнегреческий
(*в*) — древнеримский
(*г*) — арабский
(*д*) — японский

Император Юстиниан со свитой.
Фрагмент мозаики церкви Сан-Витале в Равенне. 526—547 гг.
Мозаики главного нефа церкви Сан-Витале — это симфония многоярусных горизонтальных ритмов.

Природная основа ритма в музыке и поэзии наиболее очевидна. Она связана с дыхательным и сердечным ритмом человека. Дыхательный ритм предопределяет деление обычной речи на *колоны*, поэзии — на *стихи*, музыки — на *такты*. Внутреннее заполнение каждого такого ритмического отрезка опорными и неопорными элементами изначально определено сердечным ритмом. На одно дыхание в среднем приходится четыре удара сердца, и не потому ли так легки четырехстопные ямбы и хореи и так распространен музыкальный ритм в четыре четверти?

Ритмы искусства наиболее близки своим природным прообразам — биоритмам человека, поэтому они наиболее легко «резонируют» друг с другом, чем и определяется ведущая роль ритмов в искусстве. Именно в ритмах прежде всего достигается то органическое соединение «искусственного произведения» — произведения искусства — с естественными природными процессами в организме человека, когда, говоря словами Эйзенштейна, «нами и произведением управляет одна и та же закономерность».

Разумеется, основные ритмические единицы — метр в стихосложении и такт в музыке, являющие собой почти кальку с природных биоритмов человека, только открывают спектр ритмов искусства. Эти элементарные ритмические единицы — *локальный ритм* — объединяются в более крупные ритмические образования — *глобальный ритм*. Как правило, глобальных ритмов в произведении искусства несколько, они идут навстречу друг другу, сталкиваются, дробятся и вновь восстанавливаются. Подобно тому как сложное гармоническое колебание представляет собой сумму элементарных гармоник, так и художественное произведение пронизано многочисленными ритмами различной структуры.

Ритмы пронизывают не только каждое произведение искусства, но и всю историю искусств, где, как отмечалось в главе 1, имеет место глобальный ритм чередования гармонических и дисгармонических стилей, определяемый диалектическим единством противоположных первоначал Космоса и

МИКЕЛАНДЖЕЛО.
Страшный суд.
Фреска алтарной стены Сикстинской капеллы. 1536—1541 гг.
Экзотические извивы «человекоритмов» фрески, где ритмообразующим модулем выступает размер человеческого тела, подчеркивают апокалиптичность картины Страшного суда.

Хаоса. Количественный анализ ритмов различных искусств делает только первые шаги, однако работы российского математика и искусствоведа, вице-президента Международной ассоциации эмпирической эстетики В. М. Петрова убеждают в необычайной перспективности этого направления математического анализа искусства.

Итак, ритм есть не только основной формообразующий закон искусства, но и одна из неотъемлемых форм существования материи. Ритм есть один из фундаментальных принципов формы, которые в естествознании называются физическими законами, а в эстетике — законами красоты. Огромная роль ритма в формообразовании в искусстве подтверждается строками диалога Платона, с которых мы начали наш разговор о ритме, а в формообразовании в природе — словами нашего современника Р. Фейнмана: «В явлениях природы есть формы и ритмы, недоступные глазу созерцателя, но открываемые глазу аналитика. Эти формы и ритмы мы называем физическими законами».

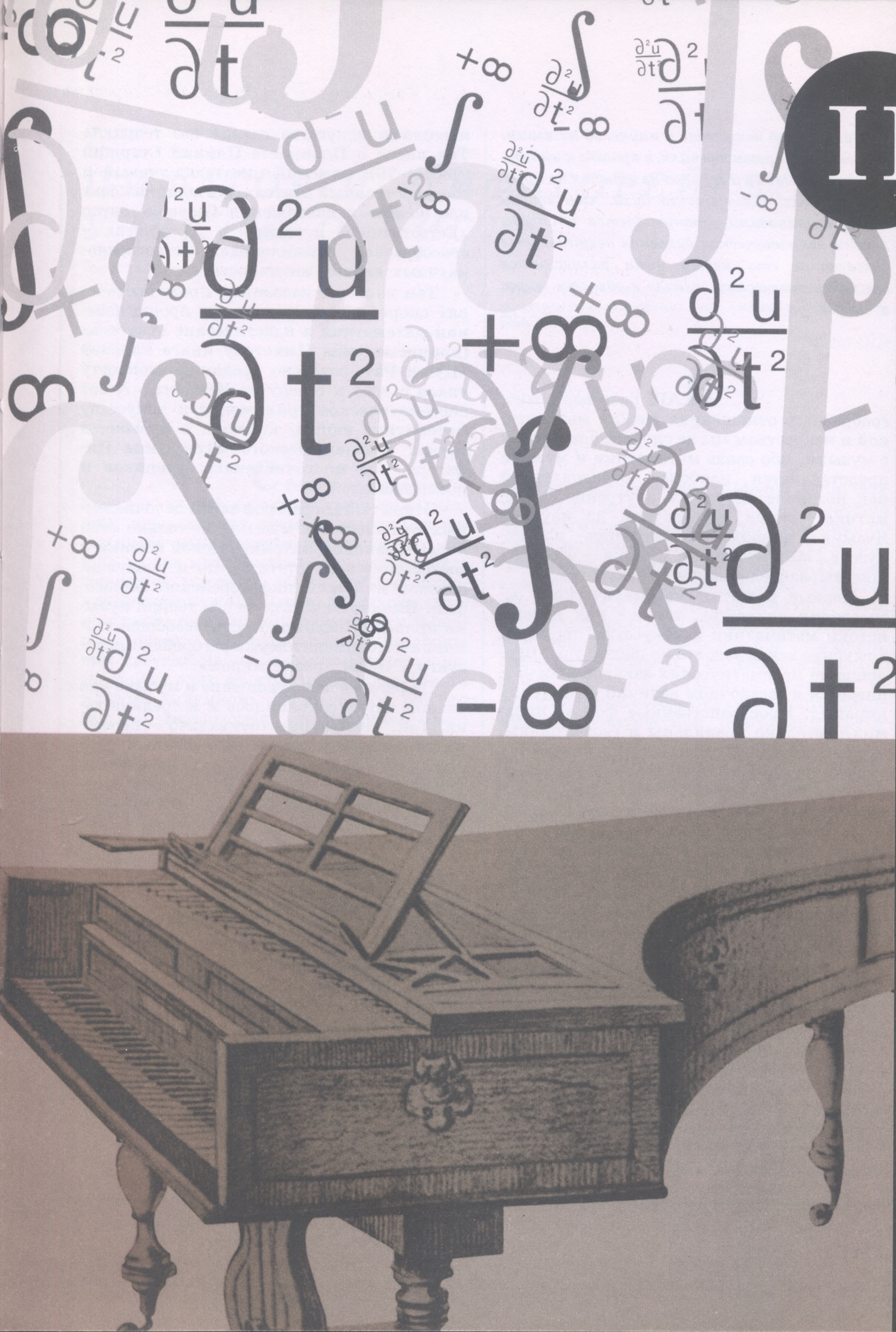
Как ритм в искусстве наиболее доступен, так и математика ритма наиболее проста. В музыке, например, ритм указывается в начале произведения в виде математической дроби, выражающей число долей целой ноты в такте. Поэтому ритм в этой книге мы почти не будем рассматривать.

Подведем некоторые итоги. В основе объективных законов красоты лежат два фундаментальных принципа: качественный принцип гармонии и количественный принцип симметрии. Пропорция и ритм являются только конкретными выражениями единого принципа симметрии. Оба принципа — гармонии и симметрии — воплощают в природе и искусстве идею Порядка. Гармония и симметрия как объективные критерии порядка не являются синонимами красоты. Красота более широкое понятие, являющее собой единство Космоса и Хаоса, объективных законов и субъективных оценок. Симметрия как конкретное выражение порядка подчинена гармонии как абстрактному эстетико-философскому принципу организации природы и искусства. *Гармония — это Космос «первой» и «второй» природы.*

О трудном пути к гармонии писано немало. Писал о нем и замечательный русский художник В. И. Суриков: «А какое время надо, чтобы картина утряслась так, чтобы переменить ничего нельзя было. Действительные размеры каждого предмета найти нужно. Важно найти замóк, чтобы все части соединить. Это — математика». Именно математике, лежащей в основе скрытой гармонии искусства, и посвящены следующие четыре части книги.

II

МАТЕМАТИКА И МУЗЫКА



Раздумывая об искусстве и науке, об их взаимных связях и противоречиях, я пришел к выводу, что математика и музыка находятся на крайних полюсах человеческого духа, что этими двумя антиподами ограничивается и определяется вся творческая духовная деятельность человека и что между ними размещается все, что человечество создало в области науки и искусства.

Г. НЕЙГАУЗ

Наш разговор о многообразных отношениях между математикой и искусством мы не случайно начинаем с музыки, ибо связь математики и музыки представляется наиболее обусловленной как исторически, так и внутренне. Математика — самая абстрактная из наук, а музыка — наиболее отвлеченное из искусств. Математика и музыка — это высшие выразители науки и искусства.

Первые попытки математического осмысления искусства, так же как и сами истоки математики и искусства, теряются в глубине веков задолго до нашей эры. Воплощение математических законов просматривается в загадочном величии египетских пирамид. Пространственные формы пирамид настолько правильны и геометричны, что они вот уже пятое тысячелетие видятся скорее не плодом вдохновенного порыва художника, а результатом скрупулезных построений древнеегипетского математика.

Другим интересным проявлением поисков математических закономерностей в области ваяния и зодчества является существование в древности так называемых канонов, т. е. совокупности правил изображения человеческой фигуры. Создателем первого канона считается древнеегипетский архитектор и скульптор Имхотеп (XXVIII в. до н. э.), а Древняя Греция подарила миру великого ваятеля и теоретика искусства Поликлета (V в. до н. э.). «Сделал Поликлет также статую копьеносца (дорифор) — возмужалого юноши. Ее художники зовут Каноном и получают из нее, словно из какого-нибудь закона, основания своего искусства, и Поликлета считают единственным человеком, который из произведения искусства сделал его теорию». Так писал о Поликлете Плиний Старший (23(24)–79), римский писатель, ученый и государственный деятель, погибший в Помпее во время извержения Везувия, автор «Естественной истории» в 37 книгах — своеобразной энциклопедии естественнонаучных знаний античности.

Тем не менее названные примеры говорят скорее об эпизодическом проникновении математики в пластические искусства (приписываемая Имхотепу книга канонов «Души Ра», согласно преданию, попросту упала с неба к северу от Мемфиса). А вот систематическое приложение к искусству математика нашла, конечно, в музыке, в трудах древнегреческого математика Пифагора, его многочисленных учеников и последователей.

Открытый Пифагором закон целочисленных отношений в музыке не только стал первым законом математической физики и математической эстетики, но и послужил основой для всей пифагорейской философии. Именно математическая теория музыки привела Пифагора к идее всеобщей гармонии и к знаменитому пифагорейскому лозунгу «Числа правят миром».

Пифагорейское отношение к музыке как точной науке сохранилось и в средние века. Так, *квадривиум* (буквально — пересечение четырех дорог) — повышенный курс светского образования в средневековых университетах — состоял из четырех предметов: музыки, арифметики, геометрии и астрономии. Вместе с *тривиумом*, содержавшим грамматику, риторику и диалектику, квадривиум составлял так называемые *семь свободных искусств*. То был свод знаний, необходимых монахам для понимания Библии, которому суждено было на протяжении целого тысячелетия представлять систему средневекового образования.

В Новое время пифагорейскую традицию математического построения оснований музыки продолжили такие выдающиеся математики, как Кеплер, Декарт, Лейбниц, Эйлер. Но поистине удивительным является то, что математические законы определяют и строение всей музыкальной формы, о чем мы узнаем в последней главе этой части книги.

7.
ПИФАГОР И ПИФАГОРЕЙСКОЕ УЧЕНИЕ О ЧИСЛЕ

Греки совершили открытие, величайшее из когда-либо совершенных человеком: они открыли могущество разума.

М. КЛАЙН

С берегов Средиземноморья — колыбели европейской цивилизации, с тех давних времен, названных через много веков «весною человечества», дошло до нас имя Пифагора — математика, философа, мистика. Мы не знаем доподлинно портрета Пифагора, не сохранилось ни одной строки из его сочинений; его биография стала легендой, полной невероятных преувеличений, а самого Пифагора назвали «на одну десятую гением, на девять десятых выдумкой». По преданию, вид его был так величествен, что ученикам часто казалось, будто это сам бог Аполлон говорит с ними.

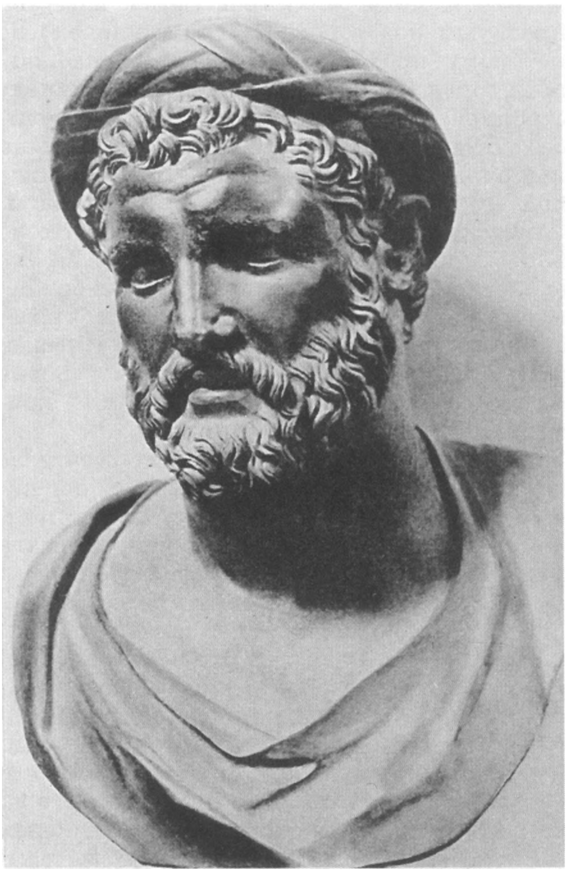
Пифагор — едва ли не самый популярный ученый не только в античности, но и в наши дни. И дело, конечно, не в том, что «таблица Пифагора» смотрит на нас с любой тетрадки в клеточку. Дело в том, что «то ли по счастливому стечению обстоятельств, то ли благодаря гениальной интуиции пифогорейцам удалось сформулировать два тезиса, общезначимость которых подтвердило все последующее развитие науки: во-первых, что основополагающие принципы, на которых зиждется мироздание, можно выразить на языке математики; во-вторых, что объединяющим началом всех вещей служат числовые отношения, которые выражают гармонию и порядок природы». Так определяет роль Пифагора в современной науке американский математик М. Клайн.

Что же известно о Пифагоре? Родился Пифагор на острове Самос, расположенном в Эгейском море у берегов Малой Азии, около 570 г. до н. э. Остров Самос известен пробитым под горою Кастро туннелем, по которому проходил водопровод, снабжавший город Самос питьевой водой. Туннель строился с двух сторон, причем расчеты, без которых в этом деле не обойтись, были настолько точными, что оба хода сошлись под горой с незначительной ошибкой. Самосский туннель, построенный около 530 г. до н. э., является едва ли не единственным замечательным подтверждением математической подготовки греческих строителей — современников Пифагора, свидетельствует о высоком уровне математики того времени и смелом ее применении.

Отец Пифагора Мнесарх был резчиком по драгоценным камням. Будучи пытливым юношей, Пифагор отправился в путешествие по странам Востока, спускался в знаменитую пещеру Крита, с которой греки связывали миф о сотворении богов, был в Египте, где якобы попал в плен к персам и был увезен в Вавилон. Это несчастье сыграло счастливую роль в судьбе Пифагора: вавилонская наука, и в частности математика, была передовой наукой того времени, и у халдейских мудрецов было чему поучиться. И хотя о странствиях Пифагора, как и о всей его жизни, нет достоверных данных, взаимосвязь вавилонской математики и математики Пифагора (вспомним хотя бы, что знаменитая теорема Пифагора была известна без доказательства вавилонянам) указывает на то, что Пифагор во многом воспринял восточную мудрость. Египетские жрецы и вавилонские халдеи привили также Пифагору пристрастие к восточным таинствам, магии и числовой мистике.

Вернувшись на родину, Пифагор собирает вокруг себя единомышленников, приспособив для занятий философией одну из пещер, где проводит почти все дни и ночи. Однако вскоре он покидает родной город в знак протеста против деятельности правителя Самоса, тирана Поликрата, считая, что свободный человек не должен подчиняться произволу и деспотизму.

Согласно преданию, на сороковом году жизни Пифагор поселился в южноиталийском городе Кротоне. Здесь он «сразу привлек всеобщее уважение как человек, много странствующий, многоопытный и дивно одаренный судьбою и природою: с виду он был величав и благороден, а красота и обаяние были у него и в голосе, и в обхождении, и во всем»,— писал в «Жизни Пифагора» древнегреческий философ Порфирий (233—304).



ПИФАГОР(?). *Бронзовый бюст. Римская копия с греческого оригинала IV в. до н. э. (?).*
Найден при раскопках Геркуланума близ Помпей.

В Кротоне Пифагор учредил нечто вроде религиозно-этического братства или тайного монашеского ордена, члены которого обязывались вести так называемый пифагорейский образ жизни. Это был одновременно и религиозный союз, и политический клуб, и научное общество.

Система жизненных принципов и правил, проповедуемая Пифагором, и сейчас достойна подражания.

Так, Пифагор учил: «Беги от всякой хитрости, любым орудием отсекай от тела болезнь, от души — невежество, от утробы — роскошество, от семьи — ссору, от всего, что есть, — неумеренность». День пифагорейцу надлежало заканчивать вопросом:

«Не допускай ленивого сна на усталые очи,
Прежде чем на три вопроса о деле
дневном не ответишь:
Что я сделал? чего не сделал? и что мне
осталось сделать?»

и начинать с вопроса:

«Прежде чем встать от сладостных снов,
навеваемых ночью,
Думой раскинь, какие дела тебе день
приготовил».

Сам Пифагор начинал занятия ранним утром, успокоив душу игрою на лире и пением стихов Гомера, предпочитал уединенные прогулки, замечая при этом, что «где тише всего, там и краше всего». Система этических правил Пифагора была собрана в своеобразный моральный кодекс пифагорейцев — «Золотые стихи».

Пифагор предписывал чтить старейших, «ибо всюду предшествующее почетнее последующего». Пифагор высоко ценил дружбу, считая, что у друзей все общее и что друг — это второе я. Скромность и пристойность он видел в том, чтобы не хохотать и не хмуриться, избегать издевок и пошлых рассказов. В еде он довольствовался хлебом, медом и овощами и воздерживался от животной пищи[1]. Носил Пифагор ослепительно белые одежды.

К сожалению, реальные и вызывающие глубокое уважение к личности Пифагора сведения были перемешаны со множеством сказок и легенд, которые со временем породили несерьезное отношение к Пифагору как исторической личности. Легенды наперебой объявляли Пифагора чудотворцем: сообщали, что у него было золотое бедро; что люди видели его одновременно в двух разных местах говорящим со своими учениками; что однажды, когда он с многочисленными спутниками переходил реку и заговорил с ней, река вышла из берегов и воскликнула: «Да здравствует Пифагор!»; что он предсказывал землетрясения, останавливал повальные болезни, отвращал ураганы, укрощал морские волны и т. д.

Ритуал посвящения в члены пифагорейского братства был окружен множеством таинств, разглашение которых сурово каралось. Но и попав в орден после строгого отбора и испытательного периода, новички могли только из-за занавеса слушать голос Учителя, видеть же его самого разрешалось только после нескольких лет аскетической жизни. «Стремление уйти от мира, замкнутая монашеская жизнь, вегетарианство и общность имущества встречались у многих сект. Но что отличало пифагорейцев от всех других — это способ, при помощи которого они считали возможным достигнуть очищения души и соединения с божеством; это делалось именно при помощи математики. Математика была одной из составных частей их религии». Эта меткая характеристика пифагорейского братства принадлежит известному голландскому математику и историку науки Б. Л. ван дер Вардену.

Итак, именно в математике, в познании количественных отношений, видели пифагорейцы ключ к разгадке мировой гармонии, постижение которой и составляло смысл их жизни. Но почему постижение всеобщей гармонии ставилось высшей жизненной целью? Дело в том, что пифагорейцы верили в бессмертие души и переселение души человека в животных[2]. Поэтому они полагали, что посвящение в тайны всеобщей гармонии, т. е. стремление к истине, приближает душу человека к божеству, создавшему эту гармонию, вследствие чего душа сможет освободиться от дальнейших перевоплощений.

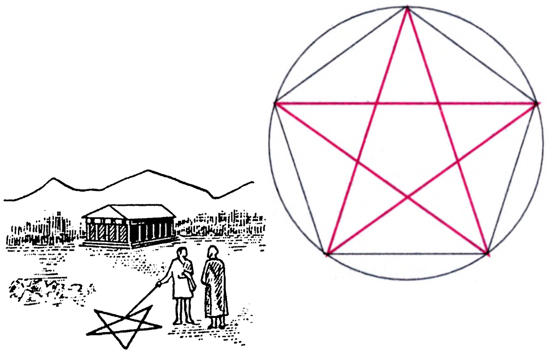
Учение Пифагора носило эзотерический, т. е. тайный, характер и не излагалось письменно, почему и не сохранилось никаких письменных трудов самого Пифагора. В силу этого, а также в силу существовавшей в античности традиции приписывать результаты открытий учеников своему учителю практически невозможно определить, что сделал в науке сам Пифагор, а что — его ученики и представители пифагорейской школы. Споры вокруг «пифагорейского вопроса» ведутся третье тысячелетие, однако общего мнения не существует и поныне. Вот почему принято осторожно говорить «пифагорейское учение», а не «учение Пифагора».

Обет молчания, даваемый пифагорейцами, нашел отражение в символе «бык на языке», что на современный лад означает «держи язык за зубами». Вообще, пифагорейцы имели множество знаков и символов, которые были своего рода заповедями, например: «через весы не шагай», т. е. не нарушай справедливости; «огня ножом не вороши», т. е. не задевай гневных людей обидными словами; «не ешь сердца», т. е. не подтачивай душу страстями или горем.

Но главным пифагорейским символом — символом здоровья и опознавательным знаком — была пентаграмма или пифагорейская звезда — звездчатый пятиугольник, образованный диагоналями правильного пятиугольника. Звездчатый пятиугольник обладает замечательными математическими свойствами, которые мы рассмотрим в главе 17. Он содержит все пропорции, известные пифагорейцам: арифметическую, геометрическую, гармоническую и так называемую золотую. Видимо, поэто-

[1] Порфирий приводит любопытный эпизод. Проповедуя вегетарианство, Пифагор тем не менее посоветовал самосскому атлету Евримену ежедневно питаться мясом, а не сыром и смоковами, как это делали остальные спортсмены. Евримен последовал Пифагоровой мудрости — набрался сил и, несмотря на свой малый рост, одержал победу в борьбе на Олимпийских играх.

[2] Известна легенда, рассказывающая, что однажды, увидев, как били собаку, Пифагор сказал: «Перестаньте ее бить, в этой собаке живет душа моего друга: я узнал его по голосу».



Звездчатый пятиугольник, или пентаграмма, — пифагорейский символ здравия и тайный опознавательный знак.

му пентаграмма и была выбрана в качестве пифагорейского символа.

Нарисованная пентаграмма была тайным знаком, по которому пифагорейцы узнавали друг друга. Согласно легенде, когда один пифагореец умирал на чужбине и не мог расплатиться с гостеприимным хозяином дома, ухаживавшим за ним, он велел хозяину нарисовать на стене своего дома пентаграмму. «Если когда-нибудь мимо пройдет пифагореец, он обязательно сюда заглянет»,— сказал умиравший. Действительно, через несколько лет другой странствующий пифагореец увидел знак, расспросил о случившемся хозяина и щедро вознаградил его.

Однако в первоначальном виде пифагорейский союз просуществовал недолго и к концу VI в. (ок. 510 г. до н. э.) подвергся кровавой расправе. Пифагорейцы бежали из Кротона в другие города, что во многом способствовало распространению учения Пифагора по всей Греции и даже за ее пределы. Сам Пифагор удалился в город Метапонт, расположенный неподалеку от Кротона, где и провел остаток своей жизни.

Смерть Пифагора окружена красивыми легендами. По одной из них, дом в Кротоне, где Пифагор собирался со своими учениками, был подожжен. Друзья бросились в огонь и проложили в нем дорогу учителю, чтобы он по их телам вышел из огня, как по мосту. Друзья погибли, а сам Пифагор, будучи спасенным столь дорогой ценой, так затосковал, что лишил себя жизни. Умер Пифагор около 500 г. до н. э.

Подлинно новым и революционным в пифагорейской научной системе явилось учение о числе, которое мы рассмотрим в трех аспектах: философском, математическом и музыкальном. В числовых отношениях, т. е. в математике, видели пифагорейцы сущность мировой гармонии, ключ к разгадке всех тайн природы, окруженных ореолом мифологии. Вообще, развитие пифагореизма шло от мифологии через философию к науке. Пифагорейская наука была еще слишком близка к мифологии, чем и объясняется царившее в ней «мифологическое начало». Но то, что в математических свойствах пифагорейцы увидели сущность явлений природы, то, что в основе разнородных процессов они обнаружили некоторую пропорциональность, закономерность, выражаемую числом, было выдающимся научным завоеванием. «Подобно тому как число подчинено определенным законам, так подчинена им и Вселенная; этим впервые высказывается мысль о закономерности Вселенной» — так характеризовал роль пифагорейского учения о числе Ф. Энгельс.

Примечательно, что отправным пунктом в пифагорейском учении о числе была музыка. Именно в музыке была впервые обнаружена таинственная направляющая роль чисел в природе. По преданию, сам Пифагор установил, что приятные слуху созвучия получаются лишь в том случае, когда длины струн, издающих эти звуки, относятся как целые числа первой четверки: 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4 (см. гл. 8). Это открытие потрясло Пифагора и долго вдохновляло его учеников на поиски новых числовых закономерностей в природе. По мнению выдающегося немецкого физика А. Зоммерфельда, день, когда было сделано это открытие, можно назвать днем рождения математической физики. Этот же день можно назвать и днем рождения экспериментальной эстетики, хотя обеим наукам пришлось ждать своего второго рождения более двух тысяч лет.

Вот как описывает этот день римский философ и сенатор Северин Боэций (480—524): «И вот однажды, под влиянием какого-то божественного наития, проходя мимо кузниц, он слышит, что удары молотков из различных звуков образуют некое единое звучание. Тогда, пораженный, он подошел вплотную к тому, что долгое время искал, и после долгого размышления решил, что различие звуков обусловлено силами ударяющих, а для того чтобы уяснить это лучше, велел кузнецам поменяться молотками. Однако выяснилось, что свойство звуков не заключено в мышцах людей и продолжает сопровождать молотки, поменявшиеся местами. Когда, следовательно, Пифагор это заметил, то исследовал вес молотков. Этих молотков было пять, причем обнаружилось, что один из них был вдвое больше другого и эти два отвечали друг другу соответственно созвучию октавы. Вес вдвое большего был на 4/3 больше веса третьего, а именно того, с которым он звучал в кварту...

Вернувшись домой, Пифагор путем различного исследования стал выяснять, заключается ли в этих пропорциях вся причина созвучия («Трактат о музыке»)».

Пифагор со своими учениками. *Иллюстрация из книги Франкино Гафурио «Теория музыки». Милан. 1492 г.*

Гравюры изображают акустические опыты Пифагора и Филолая на сосудах, струнах и трубках, находящихся в отношениях 4 : 6 : 8 : 9 : 12 : 16.

Только что появившаяся на свет пифагорейская наука еще не могла отделить абстрактное понятие числа от конкретного материального объекта. Видя в числах сущность явлений, начало начал, пифагорейцы считали, что реальные тела состоят из «единиц бытия» — «математических атомов», различные комбинации которых и представляют конкретные объекты. Даже вселенная мыслилась ими как совокупность чисел. Сами же числа пифагорейцы представляли наглядно и материально: единица трактовалась как абсолютная и неделимая единичность, т. е. точка, «геометрический атом» или первооснова всех чисел; два — как уход в неопределенную даль, т. е. прямая линия, простирающаяся в одном измерении; три — треугольник, образующий плоскость двух измерений, и возврат к определенности; четыре — пирамида, дающая представление о пространстве трех измерений. Вообще, числа 1, 2, 3, 4 играли у пифагорейцев особую роль и образовывали *тетрактис*, или четверку. По преданию, клятва пифагорейцев гласила: «Клянусь именем Тетрактис, ниспосланной нашим душам. В ней источник и корни вечно цветущей природы». Особая роль тетрактиса, видимо, была навеяна законами музыкальных созвучий, после чего все объекты природы виделись пифагорейцам состоящими из четверок: четверка геометрических элементов — точка, линия, поверхность, тело; четверка физических элементов — земля, вода, огонь, воздух. (Учение Платона о четырех физических элементах, четырех стихиях, мы рассмотрим в главе 9.) Сумма же чисел, образующих тетрактис, равная десяти ($10=1+2+3+4$), считалась священным числом и олицетворяла всю Вселенную.

Так родился знаменитый пифагорейский тезис: «Все вещи суть числа». Этот тезис, если забыть о его внутреннем содержании, а тем более если числа отождествлять с цифрами, многим представлялся попросту абсурдным. Далее, считая, что материальный мир состоит из чисел, т. е. из идей, пифагорейцы становились на позиции философского идеализма, и не случайно именно на почве пифагореизма возникло учение основоположника объективного идеализма в философии Платона. Наконец, интерес к числу часто носил у пифагорейцев религиозно-мистический характер[1].

Но всякое явление следует рассматривать в его историческом окружении. Пифагорейская наука рождалась в колыбели мифологии, и обожествление числа Пифагором было вполне естественным. С другой стороны, роль математики в естествознании оказалась столь высока, что и сегодня Юджин Вигнер говорит о ней как о божественном даре (см. с. 44).

Наиболее страстно и убежденно роль числа в познании мира определил знаменитый пифагореец V в. до н. э. Филолай. В одном из сохранившихся фрагментов сочинения Филолая «О природе» говорится: «В число же никогда не проникает ложь, потому что она противна и ненавистна его природе, истина же родственна числу и неразрывно связана с ним с самого начала».

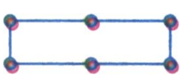
Заканчивая разговор о философских аспектах пифагорейского учения о числе, хочется вспомнить и слова великого Гёте. Будучи не только гениальным поэтом, но и выдающимся мыслителем и разносторонним ученым, Гёте очистил пифагорейскую мудрость от мистической патины. «Числа не управляют миром, но показывают, как управляется мир».

Перейдем теперь к математической стороне пифагорейского учения о числе. Числа пифагорейцы изображали в виде точек (возможно, камешками, расположенными на песке), которые они группировали в геометрические фигуры. Так возникли числа, сегодня именуемые фигурными:

линейные числа (в современной терминологии это простые числа), т. е. числа, которые делятся на единицу и на самих себя и, следовательно, представимы только в виде последовательности точек, выстроенных в линию

(число 5)

плоские числа — числа, представимые в виде произведения двух сомножителей



(число 6)

[1] Некоторые отголоски пифагорейской числовой мистики мы встречаем и в наши дни: например, обычай дарить нечетное число цветов (четное число у пифагорейцев считалось несчастливым).

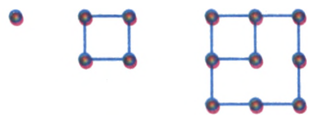
телесные числа, выражаемые произведением трех сомножителей

(число 8)

треугольные числа

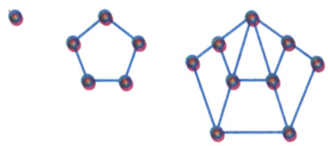
(числа 1, 3, 6)

квадратные числа



(числа 1, 4, 9)

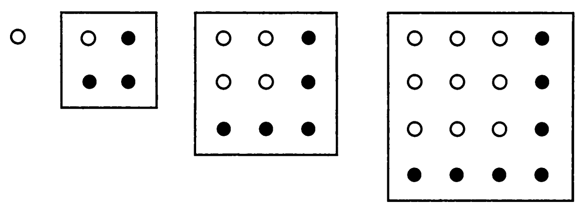
пятиугольные числа



(числа 1, 5, 12)

и т. д. Именно от фигурных чисел пошло выражение «возвести число в квадрат или куб».

Такое фигурное представление чисел часто помогало найти различные числовые закономерности. Например, написав последовательность квадратных чисел, легко увидеть (именно увидеть глазами!) доказательство следующего математического утверждения:



$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Аналогично рассмотрение n-го треугольного числа приводит к равенству

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Фигура (обозначенная черными точками), которая, будучи приложенной к основной фигуре (белые точки), образует ей подобную, была названа Аристотелем *гномоном.* Первоначально слово «гномон» означало солнечные часы — прибор, позволяющий по линиям, которые пересекает тень от вертикального столбика, разделять беспредельность времени на очевидные части. Число для пифагорейцев и есть такой гносеологический гномон, дающий возможность различать вещи и тем самым овладевать ими в сознании. Живые организмы растут именно методом гномона, что позволяет сохранять присущую этим организмам форму.

Вообще, с изучения фигурных чисел, т. е. сумм некоторого числа единиц-точек (камешков), поставленных в виде определенной фигуры, началось изучение сумм числовых рядов. Это, в свою очередь, позволило Архимеду (ок. 287—212 гг. до н. э.) развить методы нахождения площадей и объемов фигур и тел и вплотную подойти к созданию интегрального исчисления, появившегося, однако, лишь 2000 лет спустя.

Рассмотрение чисел привело пифагорейцев к рассмотрению отношений между ними, т. е. пропорций. Пропорция с равными средними членами определяет среднее значение. По преданию, Пифагору были известны три вида средних значений, которые называли «древними»:

$$\begin{aligned}
&\text{арифметическое среднее} && \frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a} \Rightarrow a-b=b-c \Rightarrow b=\frac{a+c}{2};\\
&\text{геометрическое среднее} && \frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c} \Rightarrow b=\sqrt{ac};\\
&\text{гармоническое среднее} && \frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c} \Rightarrow \frac{1}{b}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2} \Rightarrow b=\frac{2ac}{a+c}\\
& && (a>b>c>0).
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Обратим внимание на то, что среднее гармоническое величин a, b, c есть среднее арифметическое обратных величин $1/a$, $1/b$, $1/c$. Пропорции и средние значения пифагорейцы наполняли не только математическим, но и философским и эстетическим содержанием, объясняя с их помощью и музыкальные созвучия, и даже всю Вселенную.

Однако история науки, как и сама жизнь, полна неожиданных и драматических событий: среднее геометрическое таило в себе сокрушительный удар по всей пифагорейской системе; более того, нанести этот удар пифагорейцы, истинные рыцари науки, вынуждены были сами себе. Именно пифагорейцы обнаружили, что среднее геометрическое к числам 1 и 2 (в современных обозначениях $\sqrt{2}$) не выражается в виде отношения натуральных чисел, а других чисел древние греки не знали. Говоря языком геометрии, пифагорейцы установили, что диагональ квадрата, сторона которого равна 1, несоизмерима с этой стороной, т. е. отношение диагонали к стороне не выражается никаким целым или дробным числом. Выражаясь языком алгебры, пифагорейцы доказали, что уравнение $m^2=2n^2$ не имеет решений во множестве рациональных чисел, что и потребовало введения чисел новой природы — иррациональных.

Иррациональность отношения стороны и диагонали квадрата пифагорейцы объясняли тем, что оба этих отрезка состоят из бесчисленного множества точек и поэтому их отношение сводится к отношению двух бесконечно больших целых чисел. Хотя эта мысль не выдерживает критики для геометрических объектов, находящихся в рациональных отношениях (ведь они также состоят из бесчисленного множества точек!), по отношению к иррациональным числам она является справедливой. Действительно, всякое иррациональное число можно с любой степенью точности представить в виде отношения двух целых чисел, причем чем больше будут эти числа, тем точнее их отношение будет выражать иррациональное число.

Открытие несоизмеримости (для диагонали квадрата со стороной 1 не было соответствующего числа) опрокидывало всю философскую систему пифагорейцев, которые были убеждены, что «элементы чисел являются элементами всех вещей и весь мир в целом является гармонией и числом». Это открытие долго держалось в тайне, а ученик Пифагора Гиппас из Метапонта за то, что он открыл недостойным участия в учениях природу пропорции и несоизмеримости, был изгнан из школы Пифагора. Позднее, когда Гиппас погиб во время кораблекрушения, его противники видели в этом наказание богов за разглашение тайны. Следует сказать, что пифагорейцы, не в пример иным ученым, после отчаянной борьбы против открытия, опрокидывавшего символ их веры, признали свое поражение. Пытаясь выйти из тупика, они стали представлять величины не арифметически — числами, а геометрически — отрезками. Так возникла *геометрическая алгебра*.

Между тем исторически именно это неосознанное открытие иррациональных чисел является наивысшим достижением пифагорейской школы; ему было суждено пережить тысячелетия и стать поворотным этапом в развитии математики. С этого открытия начинается эра теоретической математики, ибо обнаружить несоизмеримые величины с помощью опыта невозможно.

Титульный лист книги Грегора Райха «Маргарита философика». *Фрайнбург. 1503 г.*

Наконец, рассмотрим «музыкальную» сторону пифагорейского учения о числе. Как уже отмечалось, открытие математических закономерностей в музыкальных созвучиях послужило первым «экспериментальным» подтверждением пифагорейской философии числа. «Открытие Пифагора... было первым примером установления числовых связей в природе,— читаем мы в «Фейнмановских лекциях по физике».— Поистине должно быть было удивительно вдруг неожиданно обнаружить, что в природе есть факты, которые описываются простыми числовыми отношениями».

С этого времени музыка, точнее теория музыки или учение о гармонии, занимает почетное место в пифагорейской системе знаний. «Музыкантов»-пифагорейцев интересует не столько музыкальное искусство, реальная музыка звуков, сколько те математические пропорции и соотношения, которые лежат в основе музыки. Многие греческие математики, в том числе Евклид (III в. до н. э.) и Клавдий Птолемей (85?—165?), посвятили музыкальным созвучиям и построению музыкальной шкалы специальные сочинения. Впрочем, поиски математических закономерностей в музыкальных созвучиях вели и через два тысячелетия такие великие математики, как Иоганн Кеплер, Готфрид Лейбниц, Леонард Эйлер.

Идея музыкальных соотношений настолько увлекла пифагорейцев, что они пытались обнаружить их всюду. В конце концов эта идея приняла «космические масштабы» и переросла в идею «всеобщей гармонии». Пифагорейцы утвердились в том, что вся Вселенная устроена на основе музыкальных, т. е. простых числовых, соотношений, что движущиеся планеты издают «музыку небесных сфер», а обычная музыка является лишь «отзвуком» царящей всюду «всеобщей гармонии» (см. гл. 9).

Таким образом, музыка и астрономия были сведены пифагорейцами к анализу числовых закономерностей, т. е. к арифметике и геометрии. Все четыре дисциплины стали считаться математическими и называться одним словом — «математа».

8.
ПИФАГОРОВА ГАММА

Почтенный Пифагор отвергал оценку музыки, основанную на свидетельстве чувств. Он утверждал, что достоинства ее должны восприниматься умом, и потому судил о музыке не по слуху, а на основании математической гармонии и находил достаточным ограничить изучение музыки пределами одной октавы.

ПЛУТАРХ

Строго говоря, речь здесь пойдет о пифагоровом строе, а слово «гамма» вынесено в заголовок потому, что оно у всех ассоциируется с музыкой. Что же такое гамма и строй в музыке?

Гаммой, или *звукорядом*, называется последовательность звуков (ступеней) некоторой музыкальной системы (лада), расположенных, начиная от основного звука (основного тона), в восходящем или нисходящем порядке. Название «гамма» происходит от греческой буквы Γγ (гамма), которой в средние века обозначали крайний нижний тон звукоряда, а затем и весь звукоряд.

Важнейшей характеристикой музыкального звука является его *высота*, представляющая отражение в сознании частоты колебания звучащего тела, например струны. Чем больше частота колебаний струны, тем «выше» представляется нам звук.

Каждый отдельно взятый звук не образует музыкальной системы и, если он не слишком громкий, не вызывает у нас особой реакции. Однако уже сочетание двух звуков в иных случаях получается приятным и благозвучным, а в других, наоборот, «режет» ухо. Согласованное сочетание двух звуков называется *консонансом*, а несогласованное — *диссонансом*. Ясно, что консонанс или диссонанс двух тонов определяется высотным расстоянием между этими тонами или интервалом.

Интервалом между двумя тонами назовем порядковый номер ступени верхнего тона относительно нижнего в данном звукоряде, а *интервальным коэффициентом* I_{21} двух тонов — отношение частоты колебаний верхнего тона к частоте нижнего[1]:

$$I_{21}=\frac{f_2}{f_1}\,(f_2>f_1). \tag{8.1}$$

Рассмотрим теперь некоторую совокупность звуков, нажав, например, на фортепиано последовательно несколько клавиш. Скорее всего, у нас получится бессвязный набор звуков, как говорится, ни складу ни ладу. В других случаях звуки вроде бы подходят, ладятся между собой, но их совокупность покажется оборванной, незаконченной. Эту последовательность так и хочется продолжить до определенной ноты, которая в данной системе звуков кажется наиболее устойчивой, основной и называется *тоникой*. Итак, звуки в музыкальной системе связаны между собой определенными зависимостями, одни из них являются *неустойчивыми* и тяготеют к другим — *устойчивым*.

Но не только тоника и совокупность устойчивых и неустойчивых звуков определяют характер музыкальной системы. Легко убедиться, нажав подряд восемь белых клавиш от ноты до (гамма до *мажор* натуральный) и от ноты ля (ля *минор* натуральный), что эти гаммы звучат по-разному: первая — мажор — звучит бодро и светло, а вторая — минор — грустно и пасмурно[2]. Следовательно, существует и другая характеристика системы звуков — *на-*

[1] В теории музыки понятия интервала и интервального коэффициента строго не разграничены. Следуя традиции, мы часто для краткости будем называть интервальный коэффициент интервалом.

[2] Характер звучания лада, конечно, не определяется столь грубо и однозначно. Вопрос этот очень деликатный, и о нем мы еще поговорим в конце главы.

клонение: мажорное или минорное. Таким образом, мы приходим к одному из самых сложных понятий в теории музыки — понятию лада.

Ладом называется приятная для слуха взаимосвязь музыкальных звуков, определяемая зависимостью неустойчивых звуков от устойчивых, и прежде всего от основного устойчивого звука — тоники, и имеющая определенный характер звучания — наклонение. История музыкальной культуры знает множество ладов, свойственных разным народам и разным временам. Древние греки знали с десяток ладов, а лады некоторых восточных стран и Индии чрезвычайно сложны, своеобразны и непривычны для европейского слуха.

Наиболее распространенные современные лады состоят из семи основных ступеней, каждая из которых может повышаться или понижаться, что дает еще пять дополнительных звуков. Таким образом, *диатоническая* (7-ступенная) гамма лада превращается в *хроматическую* (12-звуковую). Первой ступенью лада является тоника. Законы строения лада — это целая наука, краеугольный камень музыкознания, а изучению этих законов многие ученые и композиторы посвятили всю свою жизнь.

Нас же будут в первую очередь интересовать математические закономерности, описывающие строение лада, т. е. музыкальный строй. *Музыкальным строем* называется математическое выражение определенной системы звуковысотных отношений. Помимо чисто теоретического интереса строй находит применение при настройке музыкальных инструментов с фиксированной высотой звуков, таких, как фортепиано или орган.

В заключение заметим, что наши эксперименты с нажатием клавиш на фортепиано могут закончиться самым редким и самым приятным феноменом, когда взятая система звуков будет не только принадлежать к какому-либо ладу, но и будет носить осмысленный характер. Такой художественно осмысленный последовательный ряд звуков разной высоты называется *мелодией*. Это как раз то, что мы так любим напевать в зависимости от нашего настроения — бодрого, грустного, веселого...

После такого кратчайшего экскурса в теоретическое музыкознание мы можем вернуться на берега солнечной Эллады во времена мудрого Пифагора. Попытаемся восстановить рассуждения Пифагора и его учеников при построении пифагорова строя, ибо именно этот строй определил на тысячелетия, если не навечно, все развитие музыкальной культуры, не только европейской, но и восточной. Мы уже говорили, что сам Пифагор не оставил никаких письменных работ, да и наследие пифагорейцев представляется безнадежной грудой развалин — собранием случайно уцелевших фрагментов и более поздних цитат. Бесспорно, развалины эти прекрасны и поныне поражают воображение, как развалины знаменитого Парфенона, однако многое в этих обломках бесследно утеряно и о целом часто можно только догадываться. И все-таки...

Монохорд — однострунный — был одним из первых музыкальных инструментов древних греков. Это был длинный ящик, необходимый для усиления звука, над которым натягивалась струна. Снизу струна поджималась передвижной подставкой для деления струны на две отдельно звучащие части. На деревянном ящике под струной

ПАРФЕНОН — храм богини Афины Парфенос в Афинах.
Возведенный в 447—438 гг. до н. э. зодчими Иктином и Каллистратом в ознаменование победы над персами, украшенный бессмертными работами скульптора Фидия, Парфенон третье тысячелетие несет в себе тайну гармонии и величия. Этот шедевр архитектуры, названный Ле Корбюзье грандиозной скульптурой, вписанной в прекрасный ландшафт Пирея, остается прекрасным даже в развалинах.

имелась шкала делений, позволявшая точно установить, какая часть струны звучит. Конечно, как музыкальный инструмент монохорд покажется нам слишком примитивным, однако он был прекрасным физическим прибором и учебным пособием, на котором античные созерцатели постигали премудрости музыкальной грамоты.

Древние уверяли, что уже Пифагор знал законы колебания струны монохорда и построения музыкальных созвучий (консонансов), однако запись об этих законах мы находим у пифагорейца Архита из Тарента (428—365 гг. до н. э.), жившего на полтора столетия позже Пифагора. Архит был, безусловно, самым выдающимся представителем пифагорейской школы, другом философа Платона и учителем математика Евдокса (ок. 408 — ок. 355 гг. до н. э.), государственным деятелем и полководцем. Многосторонность Архита поразительна: он решил знаменитую делосскую задачу об удвоении куба, заслуженно считался крупнейшим пифагорейским теоретиком музыки, первым упорядочил механику на основе математики и свел движения механизмов к геометрическим чертежам, работал над деревянной моделью летающего голубя.

По мнению Ван-дер-Вардена, Архит является автором VIII книги «Начал» Евклида, в которой изложена арифметическая теория пропорций. Как государственный деятель Архит пользовался исключительным уважением: он семь лет подряд избирался стратегом[1], хотя по закону стратеги выбирались лишь на один год. Путем искусных дипломатических маневров Архит вызволил из плена Платона и тем самым спас жизнь великому философу. «Славный Архит, земель, и морей, и песков исчислитель...» — писал Гораций.

«Законы Пифагора — Архита», на которых основывалась вся пифагорейская теория музыки, можно сформулировать так:

1. Высота тона (частота колебаний f) звучащей струны обратно пропорциональна ее длине l:

$$f=\frac{a}{l}, \qquad (8.2)$$

здесь a — коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств струны (толщины, материала и т. п.).

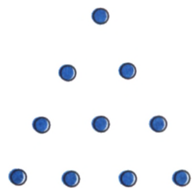
2. Две звучащие струны дают консонанс лишь тогда, когда их длины относятся как целые числа, составляющие треугольное число $10=1+2+3+4$, т. е. как $1:2$, $2:3$, $3:4$.

Эти интервалы — «совершенные консонансы», и их интервальные коэффициенты позже получили латинские названия[2]:

октава $\frac{l_2}{l_1}=\frac{1}{2}$

квинта $\frac{l_2}{l_1}=\frac{2}{3}$

кварта $\frac{l_2}{l_1}=\frac{3}{4}$



Треугольное число 10.

Было замечено также, что наиболее полное слияние тонов дает октава $(2:1)$, затем идут квинта $(3:2)$ и кварта $(4:3)$, т. е. *чем меньше число n в отношении вида $\frac{n+1}{n}$* ($n=1$, 2, 3), *тем созвучнее интервал.*

«Второй закон Пифагора — Архита» и сейчас кажется удивительным. Что же говорить о пифагорейцах, которых он просто привел в восторг. Здесь они нашли подтверждение всей своей философии: целые числа, более того, числа тетрактиса правят всем, даже музыкой! Пифагорейцы не заставили себя долго ждать и распространили закон музыкальных отношений всюду, где это возможно, в том числе и на строение Вселенной.

Итак, если в качестве цены деления шкалы монохорда взять отрезок l, равный 1/12 длины струны монохорда l_1, то вместе со всей струной монохорда длины $l_1=12l$ будут созвучны ее части длины $l_2=6l$ — звук на октаву выше $(l_2:l_1=1:2)$, $l_3=9l$ — звук на квинту выше $(l_3:l_1=2:3)$ и $l_4=8l$ — звук на кварту выше $(l_4:l_1=3:4)$. Это созвучие и определяющие его числа 6, 8, 9, 12 на-

[1] *Стратег* — в древнегреческих городах-государствах военачальник, облеченный широкими военными и политическими полномочиями.

[2] Названиями интервалов в музыке служат латинские числительные, которые указывают порядковый номер ступени звукоряда, составляющей интервал с исходной ступенью: октава — восьмая, квинта — пятая, кварта — четвертая и т. д.

зывались *тетрада* (четверка). Пифагорейцы считали, что тетрада — это «та гамма, по которой поют сирены». При настройке античной лиры, ставшей символом музыки, четыре ее струны обязательно настраивались по правилу тетрады, а настройка остальных струн зависела от лада, в котором предстояло на ней играть.

Но для античного мыслителя было мало установить численные значения изучаемых величин. Пифагорейский глаз и ум привыкли не только измерять, но и *соизмерять*, т. е. раскрывать внутренние связи между изучаемыми предметами, другими словами, устанавливать пропорциональные отношения. Архит был истинным пифагорейцем, и он установил пропорциональные отношения между основным совершенным консонансом — октавой, квинтой и квартой. Решение это было получено Архитом в связи с желанием разделить октаву на благозвучные интервалы. Вероятно, Архит исходил из того интуитивно очевидного предположения, что вместе с тонами f_1 и $f_2=2f_1$, дающими основной консонанс — октаву, должно дать консонанс и их среднее арифметическое

$$f_3=\frac{f_1+f_2}{2}.$$

Но тогда длина струны l_3 выразится через длины струн l_1 и l_2 согласно (8.2) следующим образом:

$$f_3=\frac{f_1+f_2}{2}\Rightarrow\frac{a}{l_3}=\frac{a/l_1+a/l_2}{2}\Rightarrow l_3=\frac{2l_1l_2}{l_1+l_2},$$

т. е. l_3 есть среднее гармоническое l_1 и l_2 (см. 7.1). Легко обнаружить и обратное: среднее гармоническое для частот f_1 и f_2 переходит в среднее арифметическое для длин l_1 и l_2:

$$f_4=\frac{2f_1f_2}{f_1+f_2}\Rightarrow\frac{a}{l_4}=\frac{2\frac{a}{l_1}\frac{a}{l_2}}{a/l_1+a/l_2}\Rightarrow l_4=\frac{l_1+l_2}{2}.$$

Вспоминая, что $l_1=12l$ и $l_2=6l=\frac{1}{2}l_1$, мы вместе с Архитом приходим к важному выводу:

$$l_3=\frac{2l_1l_2}{l_1+l_2}=8l=\frac{2}{3}l_1\ \left(\frac{2\cdot12\cdot6}{12+6}=8\right),\qquad(8.3)$$

$$l_4=\frac{l_1+l_2}{2}=9l=\frac{3}{4}l_1\ \left(\frac{12+6}{2}=9\right),\qquad(8.4)$$

т. е. *квинта есть среднее гармоническое длин струн основного тона l_1 и октавы l_2, а кварта — среднее арифметическое l_1 и l_2.*

Но произведение среднего арифметического на среднее гармоническое равно произведению исходных чисел:

$$l_3l_4=\frac{2l_1l_2}{l_1+l_2}\,\frac{l_1+l_2}{2}=l_1l_2,\qquad(8.5)$$

откуда, разделив обе части на l_1^2, получаем второй важный вывод:

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{l_3}{l_1}\,\frac{l_4}{l_1}\ \left(\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right),\qquad(8.6)$$

или

$$I_{21}=I_{31}\cdot I_{11}\ \left(2=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\right),$$

т. е. *октава есть произведение квинты на кварту.*

Разделив же (8.5) на l_1l_3, Архит получает и третью из основных пропорций — геометрическую:

$$\frac{l_2}{l_3}=\frac{l_4}{l_1},\qquad(8.7)$$

которую называли «музыкальной»: *октава так относится к квинте, как кварта к основному тону.*

Легко получить еще два соотношения:

$$I_{21}=\frac{f_2}{f_1}=\frac{f_2}{f_3}\,\frac{f_3}{f_1}=I_{23}I_{31}=I_{24}I_{41},\ (=2),\qquad(8.8)$$

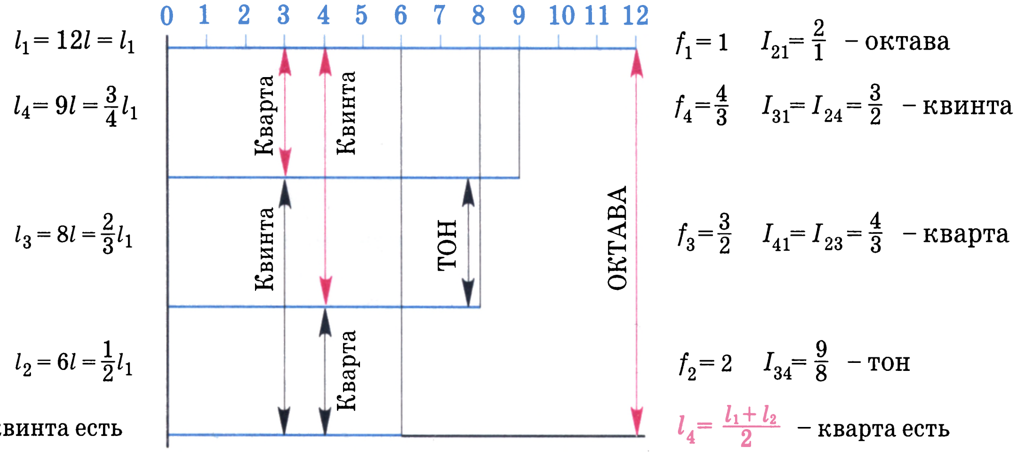
т. е. *октава делится на два неравных консонансных интервала — квинту и кварту.* Интервал, дополняющий данный интервал до октавы, называется его *обращением*. Таким образом, квинта есть обращение кварты и наоборот.

Наконец, найдем интервальный коэффициент между струнами квинты l_3 и кварты l_4, который вместе со своим интервалом называется *тоном* (не нужно путать тон-интервал и тон-звук данной высоты):

$$I_{34}=\frac{f_3}{f_4}=\frac{f_3}{f_1}\,\frac{f_1}{f_4}=\frac{f_3}{f_1}:\frac{f_4}{f_1}=\frac{I_{31}}{I_{41}}\left(=\frac{9}{8}\right),\qquad(8.9)$$

т. е. *тон-интервал равен отношению квинты к кварте.*

Заметим, что в отличие от обычного расстояния на прямой $r_{21}=x_2-x_1$, определяемого как разность координат конца и



$l_3 = \frac{2l_1 l_2}{l_1 + l_2}$ – квинта есть среднее гармоническое l_1 и l_2

$l_4 = \frac{l_1 + l_2}{2}$ – кварта есть среднее арифметическое l_1 и l_2

$$\text{ОКТАВА} = (\text{квинта}) \cdot (\text{кварта}),$$

$$\text{ТОН} = \frac{\text{квинта}}{\text{кварта}},$$

$$\frac{\text{ОКТАВА}}{\text{квинта}} = \frac{\text{кварта}}{\text{ТОН}}$$

Деление струны монохорда (l_1) на части, образующие с ней совершенные консонансы: октаву (l_2), квинту (l_3) и кварту (l_4) и соотношения между ними. Интервалы, которые целая струна монохорда образует со своими частями, показаны красными стрелками.

начала, интервальный коэффициент — *высотное расстояние* — определен как отношение составляющих его тонов $I_{21} = \frac{f_2}{f_1}$. Тогда три тона $f_1 < f_2 < f_3$, отстоящих друг от друга на равных интервалах I, образуют геометрическую прогрессию

$$f_1,\ f_2 = f_1 I,\ f_3 = f_1 I^2$$

в отличие от трех точек на прямой $x_1 < x_2 < x_3$, расположенных на равных расстояниях r и образующих арифметическую прогрессию

$$x_1,\ x_2 = x_1 + r,\ x_3 = x_1 + 2r.$$

Поэтому интервальные коэффициенты складываются и вычитаются «геометрически», а сами интервалы — «арифметически», как обычные расстояния, а именно:

сумма двух интервалов равна произведению их интервальных коэффициентов:

$$I_{31} = I_{32} I_{21}, \qquad (8.10)$$

разность двух интервалов равна частному их интервальных коэффициентов:

$$I_{21} = I_{31} : I_{32}, \qquad (8.11)$$

разделить интервал I на n равных частей означает извлечь корень степени n из его интервального коэффициента:

$$I^* = \sqrt[n]{I} \qquad (8.12)$$

и т. д.

Чтобы перейти от интервальных коэффициентов к интервалам-расстояниям, достаточно ввести логарифмический интервал $L = \log_a I$ и логарифмическую частоту $F = \log_a f$. Тогда, логарифмируя определение (8.1) и равенства (8.10) — (8.12), получаем привычное определение и правила действия с расстояниями:

$$I_{21} = \frac{f_2}{f_1} \Rightarrow \log_a I_{21} = \log_a f_2 - \log_a f_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L_{21} = F_2 - F_1, \qquad (8.13)$$

$$L_{31} = L_{32} + L_{21},\ L_{21} = L_{31} - L_{32},\ L^* = L : n.$$

В главе 11 при построении равномерно-темперированного строя особенно удобно будет взять логарифмы по основанию 2. Тогда интервал октавы $f_1=1$, $f_2=2$ перейдет в логарифмический интервал $0 \leqslant L \leqslant 1$ ($\log_2 1=0$, $\log_2 2=1$).

Решение проблемы деления октавы подсказало Архиту сразу два доказательства иррациональности $\sqrt{2}$. В самом деле, если попытаться разделить октаву на два равных интервала I, то, полагая в (8.8) $I_{23}=I_{31}=I$, имеем

$$2=I^2 \Rightarrow I=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{l_3}{l_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Но при таком соотношении длин струн прослушивается явный диссонанс. Поскольку же консонанс определяется отношением целых чисел вида $(n+1)/n$, то напрашивается мысль, что число $\sqrt{2}$ не может быть выражено отношением двух целых чисел, т. е. является иррациональным.

Второе доказательство иррациональности $\sqrt{2}$ менее музыкально, но более математично. Чтобы найти квадратный корень числа, не являющегося полным квадратом, Архит разлагает его на два неравных сомножителя ($2=1\cdot 2$), затем образует из этих сомножителей среднее арифметическое $\frac{3}{2}$ и среднее гармоническое $\frac{4}{3}$ и составляет из этих чисел музыкальную пропорцию (8.7):

$$2:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}:1 \Rightarrow 2=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}.$$

Произведение средних членов этой пропорции равно данному числу 2, а их разность $\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$ меньше, чем разность нулевого приближения $2-1=1$. Следовательно, $\frac{3}{2}$ и $\frac{4}{3}$ можно рассматривать как приближенные значения $\sqrt{2}$ $\left(\frac{3}{2}\right.$ — с избытком, $\frac{4}{3}$ — с недостатком$\left.\right)$.

Проделав ту же процедуру над первыми приближениями, получим вторые приближения:

$$\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{17}{12}\approx 1{,}4167;$$

$$\frac{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}=\frac{24}{17}\approx 1{,}4118;\quad \frac{17}{12}\cdot\frac{24}{17}=2,$$

причем

$$\frac{17}{12}-\frac{24}{17}=\frac{1}{204},$$

а затем — и третьи приближения:

$$\frac{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}{2}=\frac{577}{408}\approx 1{,}414216;$$

$$\frac{2\cdot\frac{17}{12}\cdot\frac{24}{17}}{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}=\frac{816}{577}\approx 1{,}414211;$$

$$\frac{577}{408}\cdot\frac{816}{577}=2,$$

причем

$$1{,}414216-1{,}414211=0{,}000005.$$

Поскольку данную процедуру можно повторять неограниченно, то ясно, что число $\sqrt{2}$ иррациональное. Попутно мы убеждаемся в справедливости пифагорейской мысли о том, что чем больше целые числа в отношении, тем точнее они выражают иррациональное число (см. с. 123). Наконец, вспоминая, что значение $\sqrt{2}$ равно 1,414213..., мы видим, что «музыкальный» метод Архита очень быстро сходится к точному значению $\sqrt{2}$ и уже третье приближение дает пять верных знаков после запятой!

Но вернемся к нашим интервалам. Итак, октава делится на два неравных консонанса квинту и кварту, а квинта — на консонанс кварту и диссонанс тон. Тон-интервал и был принят за интервал между соседними по высоте звуками (ступенями) при построении пифагоровой гаммы. Здесь и находится ключ к построению лада. По мнению музыковеда профессора Л. А. Мазеля, интервал квинты, разделенный на кварту и тон, является основным музыкальным элементом. Выбрав тон в качестве основной ладообразующей ступеньки, античным теоретикам осталось только отложить от основного звука ($f_1=1$) тон $\left(f_2=\frac{9}{8}\right)$, затем — еще один тон $\left(f_3=\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}=\frac{81}{64}\right)$, а оставшийся интервал между вторым тоном и тоном кварты $\left(f_4=\frac{4}{3}\right)$ назвать *полутоном*

$I_{43}=\frac{4}{3}:\frac{81}{64}=\frac{256}{243}$. Название это вполне оправданно, так как деление тона-интервала пополам по формуле (8.12) дает $\sqrt{\frac{9}{8}}\approx 1{,}0607$, а $\frac{256}{243}\approx 1{,}0545$, т. е. полутон практически равен половине тона. Так была получена основа всей древнегреческой музыки — *тетрахорд* — четырехструнный звукоряд в пределах кварты.

Ясно, что имеется только три возможности для положения полутона в пределах тетрахорда, что и определяло характер и название тетрахорда:

дорийский: *полутон* — тон — тон;
фригийский: тон — *полутон* — тон;
лидийский: тон — тон — *полутон*.

Названия тетрахордов указывают на соответствующие области Греции и Малой Азии, каждая из которых пела в своем ладу.

Конечно, четырех струн в пределах кварты было мало для ведения мелодии, поэтому тетрахорды соединялись. Мы уже выяснили, что октава состоит из двух кварт и тона; следовательно, в пределах октавы можно расположить два тетрахорда, разделенных интервалом в тон. Объединяя с помощью разделительного тона два одноименных тетрахорда, получили октаву, которую греки называли «гармония». Именно в античной теории музыки слово «гармония» обрело свое современное значение — согласие разногласного. Таких основных видов гармонии по числу тетрахордов получалось три:

дорийская: $\frac{1}{2}-1-1-1-\frac{1}{2}-1-1$;
фригийская: $1-\frac{1}{2}-1-1-1-\frac{1}{2}-1$;
лидийская: $1-1-\frac{1}{2}-1-1-1-\frac{1}{2}$.

Здесь 1 обозначает тон, 1/2 — полутон, разделительный тон обведен кружком. Эти античные гармонии сопоставимы с современными гаммами. В самом деле, каждый, знакомый с азами музыкальной грамоты, узнает в лидийской гармонии обычный натуральный мажор[1] (2 тона — полутон, 3 тона — полутон, или на белых клавишах фортепиано ДО-РЕ-МИ-ФА-СОЛЬ-ЛЯ-СИ-ДО$_1$), а в дорийской и фригийской — почти натуральный минор[2].

Зная размеры интервалов, образующих, например, лидийскую гармонию и правила действия с ними, легко получить математическое выражение этой гаммы, т. е. построить ее пифагоров строй. Приняв частоту нижнего тона за единицу $f_1=1$, находим первый тетрахорд: $f_1=1$, $f_2=\frac{9}{8}$, $f_3=\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}=\frac{81}{64}$, $f_4=\frac{4}{3}$. Второй тетрахорд получается сдвигом первого на квинту: $f_5=\frac{3}{2}f_1=\frac{3}{2}$, $f_6=\frac{3}{2}f_2=\frac{27}{16}$, $f_7=\frac{3}{2}f_3=\frac{243}{128}$, $f_8=\frac{3}{2}f_4=2$. Окончательно для интервальных коэффициентов имеем

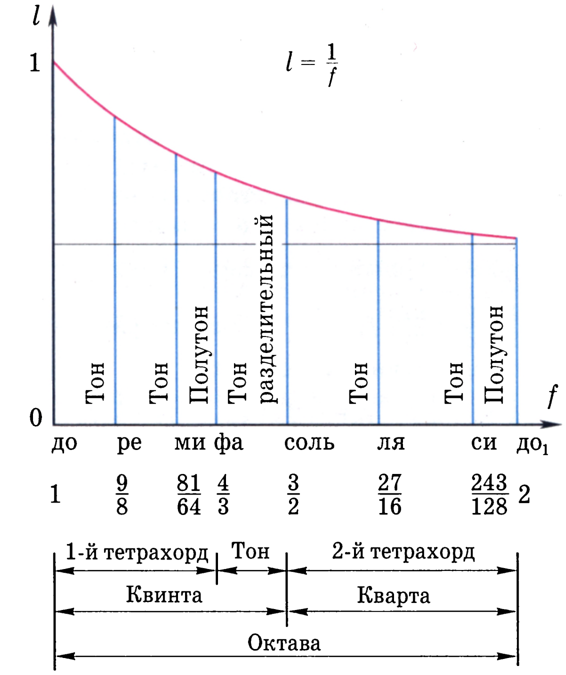
ДО	РЕ	МИ	ФА	СОЛЬ	ЛЯ	СИ	ДО$_1$	
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2	(8.14)

Это и есть канон Пифагора. По преданию, канон Пифагора впервые нашел практическое применение при настройке лиры легендарного Орфея.

Существовал и другой способ расположения тетрахордов в октаве. Античные теоретики «склеивали» тетрахорды так, что верхний звук одного тетрахорда являлся нижним звуком второго. Тогда дополняющий до октавы тон помещали внизу или наверху такой системы. Если этот тон помещался внизу, то к названию тетрахорда прибавляли приставку гипо- (под-), а если наверху — приставку гипер- (над-). Так получалось еще 6 гармоний, среди которых две пары (гипофригийская — гиперлидийская и гиподорийская — гиперфригийская) оказывались совершенно одинаковыми. Отбросив две лишние гаммы, оставалось семь основных ладов. Эти лады имели огромное значение не только в античной музыке, но

[1] Так как наши построения верны для любой октавы, мы не употребляем принятые в теории музыки обозначения нот, указывающие на конкретную октаву, а обозначаем ноты абстрактной октавы прописными буквами с добавлением индекса для последующих октав.

[2] «Почти» потому, что в сравнении с натуральным минором (1—1/2—1—1—1/2—1—1) у дорийской гаммы понижена вторая ступень, а у фригийской — повышена шестая.



$I_{43} = I_{87} = \frac{256}{243}$ – **ПОЛУТОН**

$I_{21} = I_{32} = I_{54} = I_{65} = I_{76} = \frac{9}{8}$ – **ТОН**

$I_{31} = I_{64} = I_{75} = \frac{81}{64}$ – **ПИФАГОРОВА ТЕРЦИЯ**

$I_{41} = I_{85} = \frac{4}{3}$ – **КВАРТА**

$I_{51} = I_{84} = \frac{3}{2}$ – **КВИНТА**

$I_{21} = 2$ – **ОКТАВА**

Пифагоров строй лидийской гаммы и его математические характеристики.

и через тысячу лет продолжали жить в средневековых ладах, а через две тысячи лет живут в современных натуральных ладах. Правда, средневековые монахи перепутали названия своих ладов в сравнении с античными, что часто порождает различные недоразумения. В таблице 1 собраны все основные античные лады, указан порядок следования в них интервалов, считая, что нижний звук расположен слева, а верхний — справа, приведены их древнегреческие и средневековые названия и указано их наклонение. Разделительный тон обведен кружком.

ТАБЛИЦА 1. Порядок следования интервалов тон (1) и полутон (1/2) в античных ладах (снизу вверх), древнегреческие и средневековые названия ладов и их наклонения

Порядок интервалов (снизу вверх)	Древнегреческое название лада	Средневековое название лада	Наклонение
1 1 1/2 ① 1 1 1/2	Лидийский	Ионийский	Натур. мажор
1 1/2 1 ① 1 1/2 1	Фригийский	Дорийский	Минорное
1/2 1 1 ① 1/2 1 1	Дорийский	Фригийский	Минорное
1/2 1 1 1/2 1 1 ①	Гипердорийский	Гипофригийский	Минорное
① 1 1 1/2 1 1 1/2	Гиполидийский	Лидийский	Мажорное
① 1 1/2 1 1 1/2 1	Гипофригийский (ионийский)	Миксолидийский	Мажорное
① 1/2 1 1 1/2 1 1	Гиподорийский (эолийский)	Эолийский	Натур. минор

Если вспомнить, что сейчас господствуют только два лада — мажор и минор, то остается только удивляться, насколько утонченным было античное музыкальное сознание. Каждый лад греки наполняли определенным этико-эстетическим содержанием, его «этосом», устанавливая ясную связь между музыкальными образами и состояниями души. Музыке приписывали магические и даже врачебные функции, но особенное значение придавалось музыке как средству воспитания.

Так, развивая в работе «Государство» теорию идеального государства, Платон исключительное значение придает воспитательной роли музыки. Примечательно, что здесь Платон перекликается с другим выдающимся мыслителем, жившим на другом конце Земли за двести лет до Платона,— древнекитайским философом Конфуцием (ок. 551—479 гг. до н. э.), сказавшим: «Если хотите знать, как страна управляется и какова ее нравственность — прислушайтесь к ее музыке». Платон для мирной жизни оставляет один строгий дорийский лад, считая его подлинно греческим, мужественным, деятельным. Для чрезвычайного события, каковым, например, является война, Платон оставляет фригийский лад как наиболее страстный. Лидийский же лад он называет печальным, погребальным, соответствующим женской, а не мужской психике и потому неуместным в идеальном государстве. Остальные лады как слишком утонченные Платон также отбрасывает, неукоснительно проводя в воспитании принцип строгости и простоты. Безусловно, это не означает, что Платон плохо разбирался в музыке. Напротив, в музыке он находил чистый и возвышенный, «платонический» идеал прекрасного, идеал, лишенный вычурности, размягченности, грубых и разнузданных страстей.

Аристотель в «Политике» судит о ладах, пожалуй, еще строже Платона, признавая только дорийский лад как лад, способный тренировать психику. Тем не менее Аристотель делает подробную «этическую» классификацию ладов, различая лады, которые вызывают психическое равновесие (дорийский), напротив, нарушают его (гипофригийский — «застольный» лад), возбуждают волю и стремление к действию (гиподорийский — лад греческой трагедии), вызывают восторженное и экстатическое состояние (фригийский, гиполидийский).

Прекрасное описание «этоса» греческих ладов мы находим в книге древнеримского писателя Апулея (ок. 124—?) «Флориды»: «Жил когда-то флейтист по имени Антигенид. Сладостен был каждый звук в игре этого музыканта, все лады были знакомы ему, и он мог воссоздать для тебя, по твоему выбору, и простоту эолийского лада, и богатство ионийского, и грусть лидийского, и приподнятость фригийского, и воинственность дорийского».

Впрочем, стоп! Нет ли здесь противоречия? Дорийский лад называется воинственным, а ведь это, по существу, наш минор! Поскольку именно дорийский лад считался истинно греческим, то получается, что основной характер греческой музыки печальный, минорный. Для греков же дорийский лад является выражением бодрости, жизнерадостности и даже воинственности. Вот как объясняет это кажущееся противоречие выдающийся современный знаток античности, последний философ русского Серебряного века профессор А. Ф. Лосев (1893—1988)[1]: «Греческое искусство — неизменное жизнеутверждение. Благородная сдержанность и даже печаль не оставляют грека и тогда, когда он веселится, когда он бодро строит жизнь, когда он воюет и погибает. «Веселые» же лады так или иначе тяготеют к этому прекрасному, благородному, бодрому, важному и в то же время величественно-печальному ладу — дорийскому. Дорийский лад — это скульптурный стиль греческой музыки... Так задумчи-

[1] Судьба Алексея Федоровича Лосева счастлива и трагична. Счастлива, потому что до последнего дня своей 95-летней жизни Лосев сохранил поразительную работоспособность и успел завершить главный труд — восьмитомную «Историю античной эстетики». Трагична, потому что другие восемь томов его сочинений, написанные на полвека ранее (1927—1930), были преданы анафеме, а сам автор продолжил свои философские изыскания на строительстве Беломорско-Балтийского канала, откуда он писал: «Я закован в цепи, когда в душе бурлят непочатые и неистощимые силы». И все-таки судьба А. Ф. Лосева счастлива, ибо рукописи не горят. Сегодня огромное философское наследие А. Ф. Лосева обретает свое второе рождение. И это весомее, чем титул академика, который Лосев так и не получил, как не получил его в свое время Гегель.

ПЛЯШУЩАЯ МЕНАДА. *Рельеф.*

ва, печальна и благородна вся греческая скульптура».

Ну а лидийский лад? Ведь это в точности наш мажор, тогда как Апулей называет его грустным, а Платон — погребальным! Что ж, в оценке лидийского лада с Платоном не соглашался уже Аристотель, находя в лидийском ладу наивную детскость и прелесть и относя его к ладам, вызывающим психическое равновесие. С течением времени лидийский лад утратил плачевный характер и античные теоретики стали чаще говорить о «сладкой лидийской мелодии» или о «разнообразной лидийской мелодии».

Таким образом, мы видим, что вопрос об «этосе» ладов не решается однозначно и во многом определяется *традицией применения* того или иного лада. И в наше время слушатель, воспитанный, например, на тонкой и своеобразной индийской музыке, вообще не отличит мажора от минора, не говоря уж об их «этосе». Конечно, мажорный лад отличается более светлыми и радостными тонами и тому есть объективные причины, о которых мы расскажем в главе 12. Но реализация этих возможностей зависит от массы других факторов (темп, ритм, мелодический рисунок и т. д.), и поэтому есть много веселых, энергичных произведений в миноре и грустных, задумчивых — в мажоре. Вспомним хотя бы «Патетическую сонату» до *минор* Бетховена, этот огненно-страстный монолог Героя, зовущего на яростную схватку и даже на смерть. Многие художники подобрали многие эпитеты к этой сонате (хотя, пожалуй, лучший из них — патетическая — принадлежит самому Бетховену), но только грустной — минорной — ее назвать никак нельзя. Напротив, Ноктюрн № 2 соч. 9 ми-бемоль *мажор* Шопена пронизан настроением нежной мечтательности. Это подернутые дымкой грусти воспоминания автора, но отнюдь не веселая — мажорная — пьеса.

В заключение попытаемся сказать несколько слов об «этосе интервалов», ибо именно анализу музыкальных интервалов и посвящена настоящая глава. Попытаемся, потому что данный вопрос еще более спорный и неразработанный, чем «этос ладов». И все-таки...

До сих пор мы ничего не говорили о «самом совершенном консонансе» — *приме (унисоне)* ($l_2 : l_1 = 1$, т. е. две струны издают звук одинаковой высоты), ибо с точки зрения математики этот интервал не представляет интереса. Однако в оркестре этот простейший интервал играет огромную роль, придавая звуку объемность и яркость. Вспомним хотя бы бесподобную игру в унисон ансамбля скрипачей Большого театра.

Следующий совершенный консонанс — октава. При одновременном звучании октава также дает впечатление объемности звука, а при последовательном — ощущение простора и широты. Прекрасной тому иллюстрацией является «Песня о Родине» композитора И. О. Дунаевского (1900—1955). В ее запеве («От Москвы до самых до окраин...») дважды звучит восходящая октава ($l_1 : l_2 = 2$), рисуя просторы России. Здесь же после двух октав идет восходящая квинта. Квинта ($l_1 : l_2 = 3 : 2$) также звучит широко, но более рельефно и динамично, чем октава.

Мелодии многих революционных песен и гимнов начинаются интервалом восходящей кварты ($l_1 : l_2 = 4 : 3$), например «Интернационал», «Марсельеза». Здесь интервал кварты звучит решительно и активно, как призыв к действию.

Особый «этос» у интервала секунды: при одновременном звучании он диссонирует и неприятен, но при последовательном предыдущий звук как бы переливается в последующий, образуя естественное течение мелодии от одного звука к другому. В мелодии интервалы между двумя опорными звуками часто заполняются последовательными секундовыми интервалами. Например, песня «Во поле береза стояла» начинается интервалом квинты, заполненным последовательными секундами, что создает впечатление спокойного и величавого течения мелодии, как величавы и спокойны картины русской природы.

А наиболее неприятным и неблагозвучным является интервал тритон или полуоктава ($l_1 : l_2 = \sqrt{2}$). Своей неблагозвучностью этот интервал подсказал Архиту «музыкальное доказательство» иррациональности $\sqrt{2}$ (см. с. 130).

Не правда ли, удивительные открытия сделали мы в этой главе? В музыкальной гамме мы обнаружили все математические пропорции, а для доказательства иррациональности $\sqrt{2}$ использовали музыкальную гамму.

Мы нашли математический скелет музыкальной гаммы и увидели, насколько тонко (задолго до нашей эры!) древние греки чувствовали музыку.

Но безудержный полет фантазии увлекал античных мыслителей все дальше, в заоблачные дали, в поиски всемирной «космической музыки». И хотя поиски эти оказались бесплодными, а античная космология с современной точки зрения кажется слишком наивной, не нужно спешить смеяться над нашими предшественниками; гораздо полезнее извлечь уроки из их опыта, о чем и говорится в эпиграфе к следующей главе.

9. «КОСМИЧЕСКАЯ МУЗЫКА»: ОТ ПЛАТОНА ДО КЕПЛЕРА

Современник, даже когда его влечет старина, склонен считать своих предков людьми простодушными и недалекими. Он замечает в них прежде всего то, чего им не хватало с современной точки зрения, и обычно не замечает того, чего ему самому не хватает по сравнению с ними.

М. АЛПАТОВ

В наш бурный век космической тематикой вряд ли кого удивишь, тем более читателей, родившихся во время полетов человека в космос. «Космическая музыка» — это нечто вибрирующее, электронное из фильмов о летающих тарелках и инопланетянах — тоже стала привычной. Но вот то, что задолго до нашей эры, во времена, когда человечество «летало» только на восковых крыльях в мифах о Дедале и Икаре, была своя «космическая музыка», многим покажется удивительным.

По преданию, слово «космос», означавшее «порядок», «прекрасное построение», ввел в обиход Пифагор. «Скажи мне, ...разве есть что-либо стройное и прекрасное, что не было бы подражанием миру. Отсюда имя «Космос», которое греки дали ему»,— вторил Пифагору через полтысячелетия Апулей. Из античности термин «космос» перешел в современную науку как синоним слова «вселенная».

Итак, космос для пифагорейцев — это гармоничное, пропорциональное строение мира. Сами же пропорции, как мы уже видели, мыслились греками музыкально, поэтому и весь космос оказывался гармонично устроенным и музыкально звучащим телом. Согласно пифагорейским представлениям, планеты располагались на небесных сферах и совершали вместе с ними круговое вращение. Тогда, как и все движущиеся тела, вследствие трения об эфир они издавали звуки, которые соединялись в музыкальные созвучия. Так рождалась чудесная музыка — «мировая музыка», или «гармония сфер», без которой мир бы распался. Сама же музыка — это первое из искусств, доставляющих людям радость,— являлась, по их мнению, отражением гармонии, царящей среди небесных сфер.

Учение о музыке сфер — самый туманный и вместе с тем поэтичный мотив пифагорейской эстетики. Он имел тысячи вариантов, оттенков и тысячелетнюю традицию, начиная от Пифагора и Платона и заканчивая «Гармонией мира» Иоганна Кеплера, написанной уже в XVII в. Разумеется, учение о «космической музыке» для нас не более чем красивая сказка, и расскажем мы эту сказку, чтобы показать, насколько сильным было музыкальное начало во всем античном мировоззрении. Кроме того, как и во всякой сказке, в этом учении рассыпаны зерна истины, позволяющие увидеть глубокие параллели в развитии человеческой мысли, протянувшиеся вплоть до наших дней (см. с. 148).

Первое письменное изложение пифагорейских идей появилось около 420 г. до н. э. в сочинении «О природе». «Природа, сущая в космосе, гармонично слажена из беспредельного и определяющих начал. Так устроен весь космос и все, что в нем» — так начинается эта книга, приписываемая Филолаю, ученику непосредственного ученика Пифагора — Гиппаса. Здесь же мы находим и первое письменное свидетельство о музыкально-числовом строении космоса.

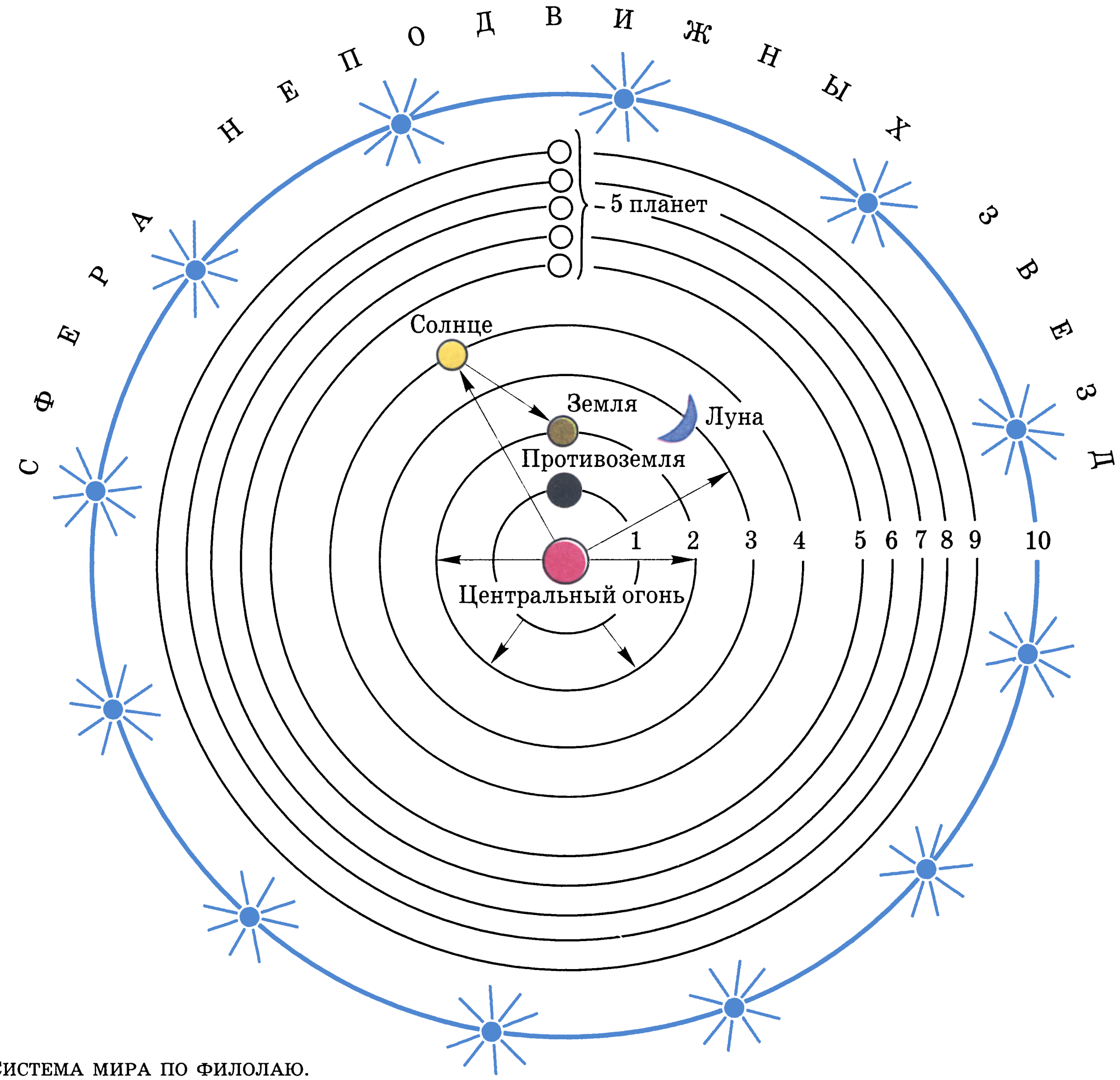
По Филолаю, центром мироздания является некий Центральный Огонь, вокруг которого на десяти концентрических сферах в порядке удаления от него вращаются так называемая Противоземля, затем Земля, Луна, Солнце, пять планет (Меркурий, Венера, Марс, Юпитер, Сатурн — их последовательность Филолаем не указана)[1] и, наконец, Сфера неподвижных звезд. Центральный Огонь и Противоземля невидимы, ибо заслонены поверхностью Земли. Солнце, по Филолаю, только отражает свет и тепло Центрального Огня. Противоземля же введена им отчасти для объяснения солнечных затмений, отчасти для достижения требуемой числовой мистикой «священной десятки» — вместе с Противоземлей сфер получается десять. В пифагорейской системе Земля не является центром мироздания, а вместе с другими планетами движется вокруг Центрального Огня — прообраза Солнца. Вот почему, когда в XVI в. церковь развернула борьбу с гелиоцентрическим учением Коперника, это учение именовалось пифагорейским.

Внутреннее устройство пифагорейского космоса напоминало своеобразную музыкальную шкатулку: каждая из десяти движущихся сфер издавала некоторый звук. «Когда несутся Солнце, Луна и еще столь великое множество таких огромных светил со столь великой быстротою, невозможно, чтобы не возникал некоторый необыкновенный по силе звук»,— утверждает неизвестный пифагорейский автор, возможно Филолай. Высота звука определялась скоростью движения сферы, зависящей от расстояний между сферами, а последние находились в той же пропорции, что и интервалы музыкальной гаммы. Таким образом, колеблемый движением сфер эфир издает чудесную мировую музыку. Однако человеческое ухо не слышит этой ни с чем не сравнимой музыки. Как рожденный на берегу моря человек перестает в конце концов различать беспрестанный рокот волн, так и слух человека привык и не замечает гармонического звучания небесных сфер.

Итак, согласно пифагорейцам, небесная музыка изначально незримо живет в человеке. Вот почему человеческая душа охотно откликается на обычную земную музыку, которая является лишь подражанием небесной; вот почему из всех искусств музыке в античности отводилась исключительная роль.

В «Лекциях по истории философии» по поводу пифагорейской гармонии сфер Гегель писал: «Мы должны признать грандиозность мысли, что в системе небесных сфер все определяется числовыми соотношениями, которые необходимо связаны

[1] Напомним, что остальные три планеты Солнечной системы — Уран, Нептун и Плутон — были открыты лишь в XVIII, XIX и XX вв. соответственно.



Система мира по Филолаю.

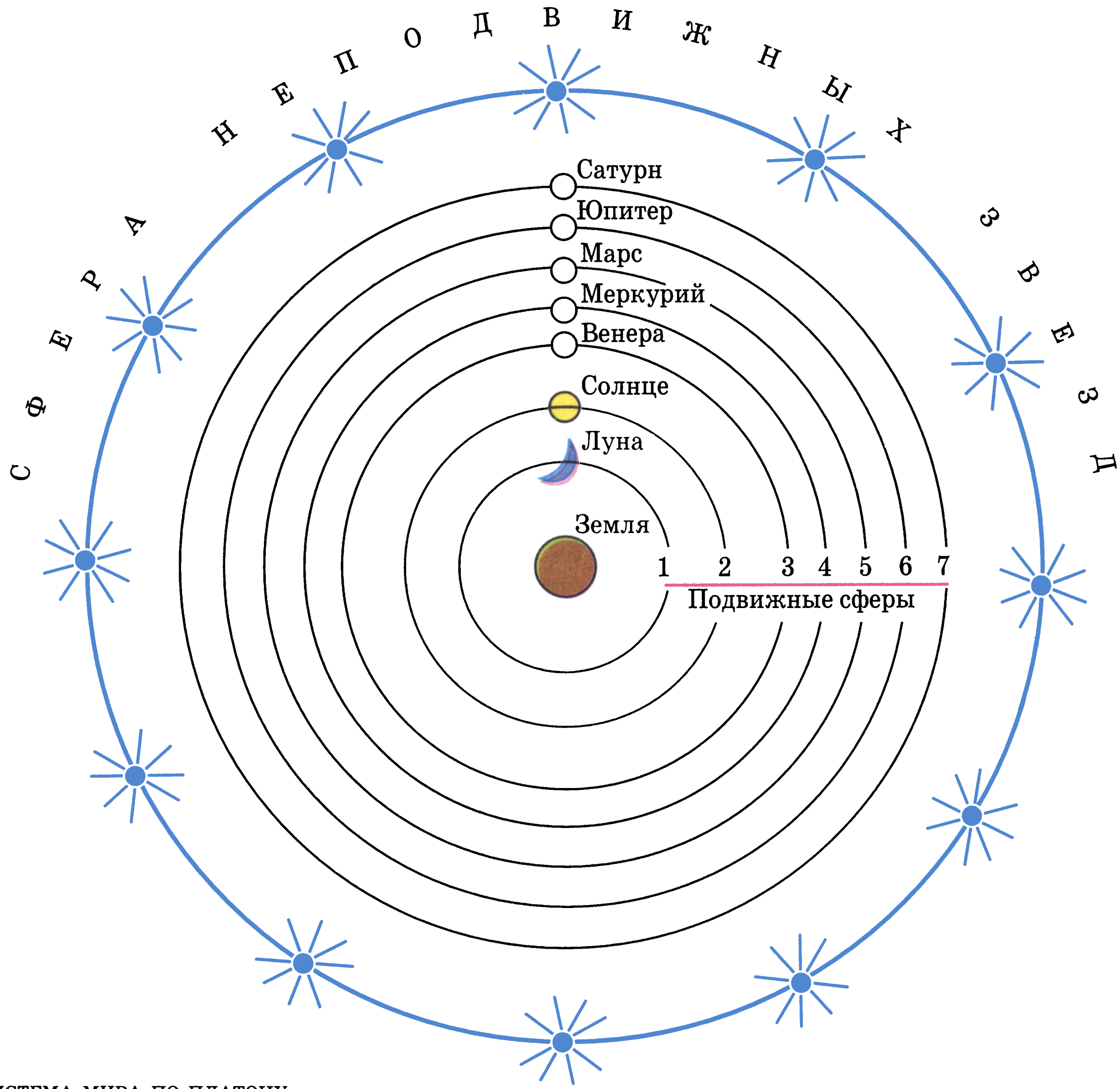
друг с другом и которые мы должны понимать как нечто необходимое... Здесь перед нами мысль о системе мироздания».

Дальнейшее развитие пифагорейское учение о гармонии сфер получило в трудах Платона. Платоновский диалог «Тимей», эта квинтэссенция древнего пифагорейства, является лучшим образцом античной космологии. Однако многое в «Тимее» изложено туманными и заумными намеками. Уже в древности эти места вызывали бесконечные споры, разночтения и комментарии, которые длятся и до сего времени.

Платон исходит из геоцентрической системы космоса: центром мироздания для него является неподвижная Земля, вокруг которой на семи сферах[1] вращаются Луна, Солнце, Венера, Меркурий, Марс, Юпитер, Сатурн. Далее следует сфера неподвижных звезд.

Как видим, несостоятельность Центрального Огня и Противоземли ко времени Платона была уже осознана.

[1] Отсюда пошло выражение «Быть на седьмом небе», обозначающее высшую степень блаженства.



СИСТЕМА МИРА ПО ПЛАТОНУ.

На базе этой системы мироздания Платон развивает теорию *небесного гептахорда — семиструнника*, т. е. теорию семи подвижных сфер, настроенных в музыкальных отношениях. Согласно Платону, творец Вселенной — Демиург, создав вещество Вселенной, разделил его на две части: одна часть пошла на построение сферы неподвижных звезд, а вторая была математически строго разделена на семь частей для образования сфер Луны, Солнца и пяти планет. По этому поводу в «Тимее» Платона мы читаем: «Делить же он начал следующим образом: прежде всего отнял от целого одну долю, затем вторую — вдвое большую, третью — в полтора раза больше второй и в три раза больше первой, четвертую — вдвое больше второй, пятую — втрое больше третьей, шестую — в восемь раз больше первой, а седьмую — больше первой в двадцать семь раз». В результате получился ряд чисел

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 9 \quad 8 \quad 27, \qquad (9.1)$$

описывающий гармонию небесных сфер, или небесный гептахорд. Однако ни порядок расположения сфер, несущих светила, ни порядок отсчета чисел в ряде (9.1) Платоном указан не был. Поэтому на протяжении последующих двух тысячелетий члены платонова гептахорда имели разнообразную физическую интерпретацию.

Самым простым и соблазнительным было трактовать числа (9.1) как относительные расстояния от Земли до Луны, Солнца, Венеры, Меркурия, Марса, Юпитера и Сатурна соответственно. Тогда эти числа представляли и относительные высоты тонов, так как высота тона, издаваемого сферой, мыслилась пропорциональной скорости вращения сферы, а скорость вращения — пропорциональной расстоянию до неподвижной Земли. Таким образом, чем дальше находилась планета от Земли, тем больше была ее скорость и тем выше издаваемый ею тон. Скорее всего, эти рассуждения были навеяны простым опытом: камень, раскручиваемый на веревке, со свистом разрезает воздух и прекрасно демонстрирует все описанные закономерности. Правда, при такой трактовке относительное расстояние до Марса (9) получалось больше, чем до Юпитера (8), и, чтобы «исправить» эту ошибку, числа 9 и 8 в (9.1) просто переставили. Вот почему во многих текстах платонов гептахорд фигурирует в искаженном виде: 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27.

И все-таки оставалось непонятным: откуда вообще взялся этот странный ряд чисел? Это загадка, которую исследователи, начиная с Аристотеля, чаще всего трактовали как некий курьез, если не просто глупость, не требующую даже разъяснений. «Однако,— как справедливо замечал А. Ф. Лосев,— такой антиисторический подход не может быть у современного исследователя, который, конечно, настолько далек от древнего пифагорейства, что даже не испытывает потребности его критиковать, а должен рассмотреть его со всеми объективно-историческими причинами, делающими его существование понятным».

Ключ к платонову гептахорду, по-видимому, спрятан в самом пифагорейском понимании числа, а именно: единицы — как символа неделимого начала, двойки — как символа неопределенной бесконечности и тройки — как символа определенности. Но для Платона это слишком просто, и в качестве символа беспредельности он берет куб со стороной 2. Тогда его геометрические параметры (длина, площадь грани и объем) дают числа 2, 4, 8. А в качестве символа определенности Платон берет куб со стороной 3 и параметрами 3, 9, 27. Тогда взаимное переплетение этих двух троек чисел плюс начало всего — единица — и дают то единство «беспредельного и определяющих начал», о которых говорил Филолай.

Интересную реконструкцию платонова космоса предложил С. В. Житомирский. Учитывая, что небесные сферы мыслились Платоном материально, т. е. обладали некоторой толщиной (такое представление сохранилось вплоть до Кеплера), Житомирский трактует числа (9.1) как толщины соответствующих сфер, причем отсчет начинает не от Земли, как это всегда было принято, а от сферы неподвижных звезд. Далее, вспоминая, что на изготовление последней сферы пошло столько же материала, сколько и на все остальные, он полагает толщину сферы неподвижных звезд равной толщинам всех остальных сфер, т. е. $54=1+2+3+4+9+8+27$. Таким образом получается реконструкция картины платонова космоса, которая согласуется с другими космологическими текстами Платона, а числа гептахорда (9.1) наполняются конкретным геометрическим содержанием:

Земля – Луна – Солнце – Венера – Меркурий – Марс – Юпитер – Сатурн – Небо звезд

$$\underbrace{27 \;\big|\; 8 \;\big|\; 9 \;\big|\; 4 \;\big|\; 3 \;\big|\; 2 \;\big|\; 1}_{54} \;\big|\; 54$$

Заметим, что и реконструкция Житомирского также страдает изъяном, так как Земля теперь растворилась в сфере Луны.

Перейдем к музыкальной стороне учения Платона. Легко видеть, что платонов гептахорд содержит в себе все основные музыкальные интервалы: октаву (2/1), квинту (3/2), кварту (4/3), тон (9/8) и полутон $\left(\frac{256}{243}=\frac{8}{27}\cdot\frac{8}{9}\cdot 2\cdot 2\right)$. Объясняется это просто, ибо, как мы увидим в следующей главе, все тона пифагоровой гаммы получаются ходами вверх или вниз по квинтам (3/2), а квинта составлена из отношения тройки и двойки, т. е. из тех чисел, что и платонов гептахорд. С помощью полученных интервалов можно рассчитать строй любого лада. Неудивительно, что Платон утверждает, будто космос настроен в дорийском ладу, этом истинно национальном ладу древних греков, хотя остается непонятным, как получить строй дорийского лада из платонова гептахорда. Не очень ясно также и то, что на самом деле представляет собой звучание платонова гептахорда: гармонию или дисгармонию или даже какофонию сфер. Попробуйте решить для себя этот вопрос сами, сыграв гептахорд (9.1), скажем, от ноты До большой октавы:

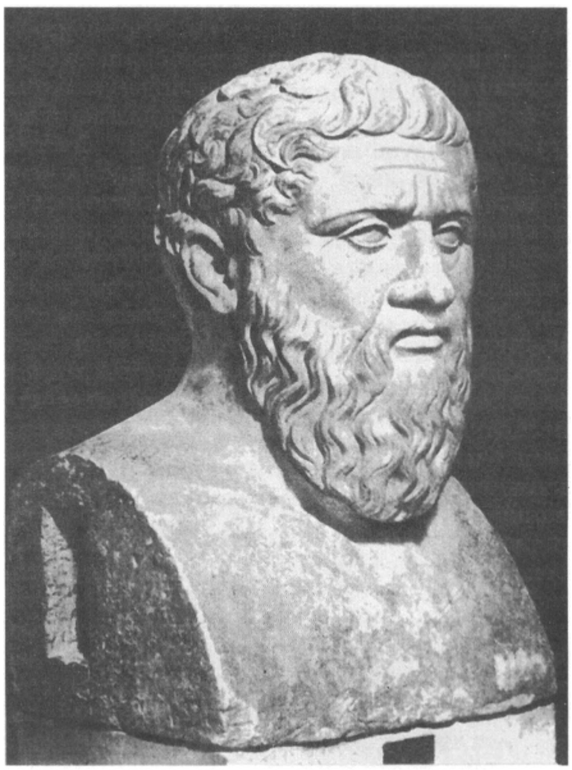
До-до-соль-до$_1$-ре$_2$-до$_2$-ля$_3$.

Впрочем, все это сегодня уже неважно. Для нас важно другое: *Платон мыслит мировое пространство неоднородным*, как неодинаково натянуты струны единого музыкального инструмента. Но ведь эта мысль о неоднородности мирового пространства созвучна выводам из общей теории относительности Альберта Эйнштейна об искривленности пространства — времени и его неоднородности! Более двух тысячелетий, от Платона до Эйнштейна, мировое пространство мыслилось абсолютным и однородным. И вот за этот огромный промежуток времени, практически равный всей истории европейской цивилизации, наука совершает огромный виток по спирали, и прежний вывод делается на базе современных научных знаний. Сколько еще таких витков предстоит сделать науке?!

От внешнего строения космоса Платон в «Тимее» переходит к внутреннему его строению, т. е. строению материи. Это знаменитое учение Платона о *четырех стихиях* — основных компонентах мира и их атомах — *платоновых телах*. Менее известно, что это учение также «музыкально», но, прежде чем остановиться на нем, следует сказать несколько слов о самом Платоне и его научных взглядах, что, видимо, поможет понять истоки этого экзотического учения.

Платон (427—347 гг. до н. э.) — величайший философ античности, оказавший огромное влияние на развитие всей мировой культуры. Однако Платон был не только философом, создателем первой в истории человечества системы объективного идеализма, но также и блестящим художником слова, организатором и теоретиком науки, ученым и гражданином города-государства Афины. После казни своего любимого учителя Сократа, болезненно переживая кризис афинской демократии, Платон покинул Афины и около двенадцати лет провел в путешествиях. Вернувшись на родину, Платон основал научную школу — Академию, которая разместилась на купленном для этой цели Платоном участке в роще близ Афин. Роща носила имя древнеаттического героя Академа, откуда и пошло название первой в истории человечества научной школы — Академии.

Платон и его ученики, платоники, были самой влиятельной после пифагорейцев



ПЛАТОН (427—347). *Римская мраморная копия с греческого оригинала. Ок. 370 до н. э.*

группой мыслителей, а Платонова Академия в течение девяти столетий оставалась центром, влекущим к себе лучшие умы античности. Платон направлял и воодушевлял научную работу. Великие математики Теэтет и Евдокс были друзьями Платона, его учителями в математике и учениками в философии. Великий ученик Платона — Аристотель, будущий учитель и воспитатель Александра Македонского, двадцать лет жизни провел в благотворной атмосфере Академии. Хотя сам Платон и не был математиком, он придавал огромное значение изучению математики, живо интересовался ею и требовал от своих учеников основательных знаний математики, прежде чем посвятить их в свою философию. По преданию, на вратах Академии Платона было начертано: «Негеометр да не войдет!», а одному из начинающих философов, не знавшему математики, Платон сказал: «Уйди прочь! У тебя нет орудия для изучения философии...»

Не останавливаясь на философской системе Платона, отметим только, что, согласно Платону, существует два мира: материальный несовершенный мир вещей и совершенный мир идей. Законы мира вещей несовершенны и преходящи, тогда как в мире идей господствуют абсолютные и неизменные истины, которые и надлежит изучать философу. Материальный мир есть не более как одна из несовершенных реализаций мира идей, и постигнуть реальный мир можно только с помощью математики идеального мира. То, что идеальный мир основан на математике, сомнений не вызывало. «Знание, к которому стремятся геометры, есть знание вечного, а не того, что тленно и преходяще»,— утверждал Платон.

Таким образом, Платон ясно осознавал значение математизации науки, и это именно тот путь, по которому пошло развитие науки в античности и по которому оно продолжает идти сегодня. В наш век стремительной математизации и широчайшего применения компьютеров, когда стало возможным физический эксперимент заменить экспериментом вычислительным и буквально «увидеть» на экране дисплея то или иное физическое явление, мысли Платона об идеальных (читай — математических) структурах и их воплощении в реальном мире обретают свое второе рождение.

Исторически учение Платона о непреходящем мире идей было реакцией на релятивизм Гераклита, утверждавшего, что «все течет, все изменяется». Но если реальный мир течет и изменяется каждое мгновение, то как можно добыть знание об этом мире? возможно ли вообще в таком случае научное знание?

В попытках выйти из указанного Гераклитом затруднения (а ведь реальный мир и в самом деле изменчив!) и родились две грандиозные трансэпохальные научные программы — программа Демокрита и программа Платона. Демокрит предложил искать устойчивые основы реального мира в неизменных неделимых первоэлементах, которые он назвал атомами, а Платон — в нетленных идеях, названных им эйдосами.

Свою идею двух миров — идеального и материального — Платон выразил в знаменитой метафоре о пещере.

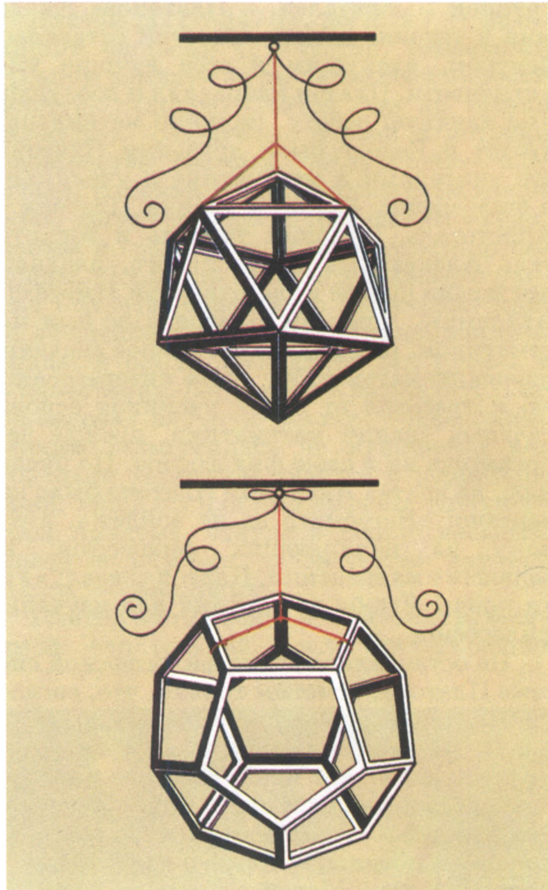
Знания человека о мире Платон уподобляет рассмотрению теней на стенах пещеры, которые отбрасывают проходящие снаружи люди и которых мы не видим, сидя спиной ко входу в пещеру. Таким образом, созерцаемые нами явления материального мира есть не более чем тени другого идеального мира. В постижении неизменных эйдосов идеального мира и состоит истинное знание. Сами же эйдосы Платон, следуя Пифагору, отождествляет с их математическими структурами. Познать явление по Платону — значит познать его математическую структуру. Современное естествознание лишь обратило образ платоновой пещеры, рассматривая математические модели как идеальные тени изучаемого материального мира.

Но вернемся в Древнюю Грецию. Теперь нам будет понятно, откуда Платону пришла мысль отождествлять физические элементы (атомы четырех стихий) с геометрическими телами — правильными многогранниками: в геометрии Платон видел ключ к познанию природы. Впрочем, по порядку...

Многогранник называется правильным, если он лежит по одну сторону от плоскости любой его грани, т. е. является выпуклым, и все его грани есть равные правильные многоугольники. Простой подсчет суммы углов при вершине правильного многогранника показывает, что *существует только* *пять правильных многогранников*[1]. Доказательство этого факта имеется в XIII книге «Начал» Евклида, но сам факт был, безусловно, известен Платону, а правильные многогранники знали пифагорейцы задолго до Платона. Форму правильных тел, повидимому, подсказала древним грекам сама природа: кристаллы поваренной соли имеют форму куба, кристаллы квасцов — октаэдра, а кристаллы пирита — додекаэдра. Последний, как показали раскопки в итальянских Альпах, был любимой игрушкой этрусских детей задолго до нашей эры.

Правильные многогранники всегда восхищали пытливые умы симметрией, простотой и мудростью своих форм. Леонардо да Винчи любил изготовлять из дерева каркасы правильных тел и преподносить их в виде подарка различным знаменитостям. К сожалению, мы не можем подробнее остановиться на массе любопытных геометрических свойств и физических приложений правильных тел и тем, кто заинтересуется ими, рекомендуем книгу К. Левитина «Геометрическая рапсодия».

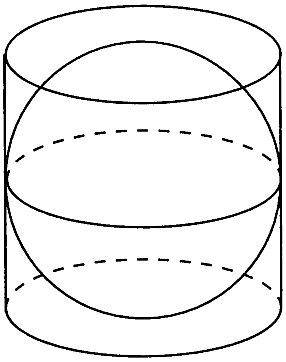
Ко времени Платона в античной философии уже созрела концепция четырех элементов (стихий) — первооснов материального мира: огня, воздуха, воды и земли.



ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ. Рисунки тел Платона в книге Луки Пачоли «О божественной пропорции». *Венеция. 1509 г.*

Огонь и землю Платон считает основными компонентами для образования космоса: «...всему, что имело произойти, надлежало, конечно, быть телесным, видимым и осязаемым. Но быть видимым ничто не может без посредства огня, точно так же и осязаемым ничто не может быть без чего-нибудь твердого, твердым же ничто не может быть без земли (Тимей)». Между основными стихиями помещаются две средние — вода и воздух, и все они связываются музыкальными отношениями. Атомам земли Платон придает форму куба, так как и земля, и куб отличаются неподвижностью и устойчивостью. Атомам воды — форму икосаэдра, так как вода отличается текучестью, а из всех правильных тел ико-

[1] В самом деле, сумма плоских углов s при вершине выпуклого многогранника должна быть строго меньше 360°, а число граней при вершине $m \geqslant 3$. Тогда гранями правильного многогранника могут быть только три плоские фигуры: правильные треугольник, четырехугольник (квадрат) и пятиугольник, ибо уже для шестиугольников $s=120° \cdot 3=360°$. Название правильному многограннику дается по общему числу граней M. Таким образом, из равносторонних треугольников можно составить три правильных многогранника при $m=3$, 4, 5 (при $m=6$ $s=60° \cdot 6=360°$):
1. Тетраэдр (четырехгранник): $m=3$, $M=4$.
2. Октаэдр (восьмигранник): $m=4$, $M=8$.
3. Икосаэдр (двадцатигранник): $m=5$, $M=20$, а из квадратов и правильных пятиугольников — только по одному при $m=3$ (при $m=4$ $s=90° \cdot 4=360°$ — для квадратов и $s=108° \cdot 4=432°$ — для пятиугольников).
4. Гексаэдр (шестигранник), или куб: $m=3$, $M=6$.
5. Додекаэдр (двенадцатигранник): $m=3$, $M=12$.
В любом выпуклом многограннике числа вершин L, граней M и ребер N связаны формулой Эйлера $L+M-N=2$.



$V_ц = 2\pi R^3$

$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$

$S_ц = 6\pi R^2$

$S_ш = 4\pi R^2$

$\frac{V_ц}{V_ш} = \frac{S_ц}{S_ш} = \frac{3}{2}$ (квинта)

Теорему об отношении объемов и площадей поверхности цилиндра и вписанного в него шара Архимед считал своим высшим достижением. По завещанию Архимеда чертеж этих фигур был выполнен на его могильном камне.

саэдр — наиболее «катящийся». Атомам воздуха — форму октаэдра, ибо воздух движется взад и вперед и октаэдр как бы направлен одновременно в разные стороны. Атомам огня — форму тетраэдра как наиболее острого, мечущегося в разные стороны. Не у дел остался пятый правильный многогранник — додекаэдр. Для него Платон вводит пятый элемент — «пятую сущность»[1] — мировой эфир, атомам которого придается форма додекаэдра как наиболее близкого к шару — самому совершенному по форме телу. С тех пор правильные многогранники называются также *платоновыми телами*.

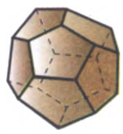
Далее, поскольку в музыкальных отношениях греки видели основу «всеобщей гармонии», Платон устанавливает эти отношения не только для космических тел (гармония сфер), но и для самих элементов, из которых состоит космос. По Платону, отношение основных элементов — атомов земли к атомам огня — равно октаве (2 : 1), отношение атомов земли и воды, а также воздуха и огня равно кварте (4 : 3) и т. д. Несмотря на любовь Платона к геометрии, эти отношения не имеют никакой математической базы. Ими не связаны ни число вершин платоновых тел, ни объемы этих тел, вписанных одно в другое, ни число ребер или граней.

Заметим, что поиск музыкальных отношений в геометрических образах сильно увлекал античных исследователей. Не случайно из множества первоклассных открытий Архимед больше всего ценил открытие отношения объемов и площадей поверхностей цилиндра и вписанного в него шара, равного 3 : 2, т. е. квинте.

Но и в отжившем учении Платона об атомах четырех стихий есть своя внутренняя мудрость. Стремление свести сложные природные явления к простым неразложи-

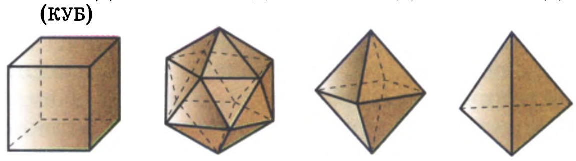
ТЕЛО ПЛАТОНА	ЧИСЛО граней	ЧИСЛО вершин	ГЕОМЕТРИЯ ГРАНИ	m
Тетраэдр	4 (тетра)	4	△	3
Октаэдр	8 (окта)	6	△	4
Икосаэдр	20 (икоси)	12	△	5
Гексаэдр	6 (гекса)	8	□	3
Додекаэдр	12 (додека)	20	⬠	3

ДОДЕКАЭДР

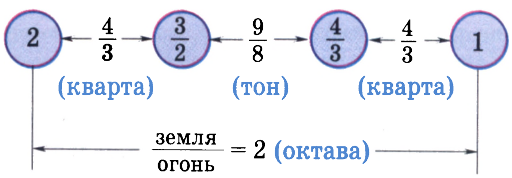


Атом эфира

ГЕКСАЭДР (КУБ) ИКОСАЭДР ОКТАЭДР ТЕТРАЭДР



Атом земли Атом воды Атом воздуха Атом огня



Непреходящие математические свойства правильных многогранников (таблица) и их наивная физическая интерпретация по Платону.

[1] *Пятая сущность* — по-латыни квинтэссенция — у средневековых алхимиков стала означать тончайший элемент, составляющий якобы сущность вещей. В настоящее время квинтэссенция — синоним самого главного, наиболее существенного.

мым компонентам остается содержанием и современного естествознания. Сейчас известно чуть более ста атомов элементов, из которых состоят все встречающиеся в природе вещества.

Сверхзадачей современной физики является выявление «кирпичиков мироздания» — *элементарных частиц* — первичных, неразложимых далее частиц, из которых состоит вся материя. Еще в начале XX в. считалось, что таких частиц три: электрон, протон и нейтрон. Однако катастрофический рост числа открываемых элементарных частиц привел во второй половине XX в. к пересмотру воззрений об их элементарности.

Сегодня есть основания считать, что такие «экс-элементарные» частицы, как протоны, нейтроны, мезоны, гипероны и др., состоят из различных комбинаций трех типов *кварков*[1] (либо пар кварк — антикварк) — новых «кирпичиков мироздания». Не вдаваясь в дебри современной ядерной физики, отметим только, что, как и во времена Платона, принцип простоты является той нитью Ариадны, которая ведет сегодня физиков по темным лабиринтам микромира.

Еще более современным выглядит стремление Платона видеть элементы материи в виде *правильных симметричных тел*. Современная наука все глубже проникает в тайну того, что внешние проявления симметрии — от симметрии кристаллов и снежинок до симметрии молекул ДНК — есть следствие симметрии тех фундаментальных законов, которые управляют всеми процессами физического мира. Таким образом, то, что на заре цивилизации античные философы видели атомы в виде симметричных геометрических тел, должно вызывать не саркастическую усмешку, а, скорее, удивление.

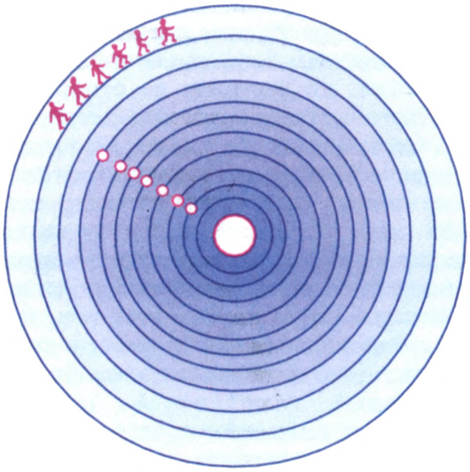
Учения о четырех стихиях и гармонии сфер из античности перешли в средневековье. Народное творчество, фантазия средневековых алхимиков и воображение поэтов населили четыре платоновы стихии мифическими существами — духами. Так появились подземные человечки — *гномы* или *кобольды* — духи земли; златокудрые русалки — *ундины* — с рыбьим хвостом вместо ног — духи воды; прекрасные существа, населяющие атмосферу, ростом не более дюйма с шапочкой из цветка на голове — *сильфы* или *эльфы* — духи воздуха; наконец, духи огня — *саламандры*, пляшущие в огне в виде ящериц. Страшные карлики-гномы охраняют подземные богатства, они сказочно богаты, любят дразнить людей, но чаще помогают им. Красавицы-ундины вечерами расчесывают на берегу свои пышные волосы. Однако они опасны, так как могут очаровать своей красотой и пением пылкого юношу и увлечь его в подводное царство. Танцы и музыка — любимое занятие эльфов, а если музыкант начнет играть мелодию эльфов, то он не сможет остановиться, пока не доиграет ее до конца.

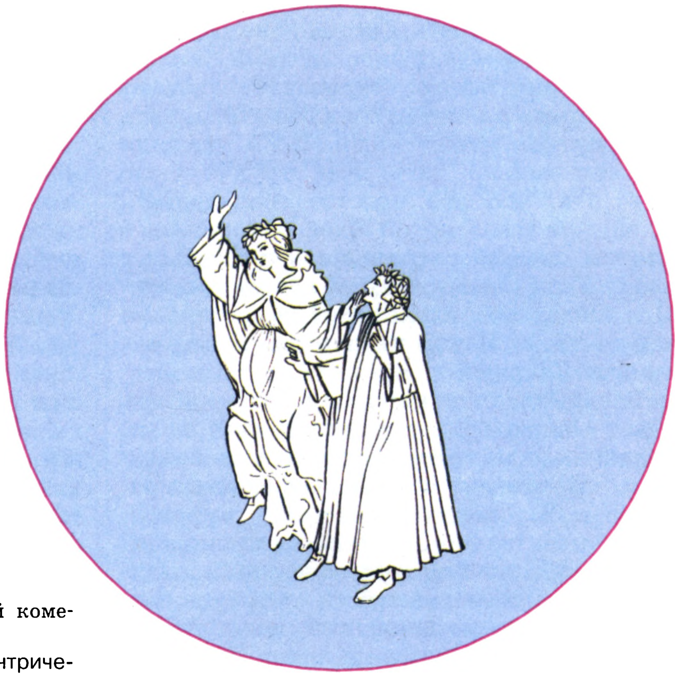
Знакомые с детства сказки Андерсена «Дюймовочка» и «Русалочка», сказка братьев Гримм «Белоснежка и семь гномов», комедия Шекспира «Сон в летнюю ночь», баллада Гёте «Лесной царь», поэма Жуковского «Ундина» и многие стихотворения многих авторов навеяны этими легендами. Так отжившая научная теория превращалась в красивую сказку.

> Саламандра, жгись,
> Ундина, вейся,
> Сильф, рассейся,
> Кобольд, трудись!
> Кто слышит впервые
> Про эти стихии,
> Их свойства и строй,
> Какой заклинатель?
> Кропатель пустой!
>
> (Гёте. «Фауст»)

Не менее популярным оставалось в средние века и учение о гармонии сфер. Вообще, считалось, что законы мироздания в основе своей являются музыкальными законами. Мысль эта прочно вошла в сознание не только средневековых ученых-схоластов, но и

[1] Любопытна история возникновения термина. Это название заимствовано американским физиком М. Гелл-Маном, высказавшим в 1964 г. гипотезу о существовании трех неизвестных частиц, из романа современного английского писателя Дж. Джойса «Поминки по Финегану». Хотя по-немецки «кварк» — это «творог», в романе слово означает нечто таинственное и непонятное. Герою романа снится сон, где чайки кричат: «Три кварка для мастера Марка». Так слово, изобретенное писателем Джойсом, стало едва ли не важнейшим термином современной ядерной физики. Вот они, узы науки и искусства!





БОТТИЧЕЛЛИ. Иллюстрация к «Божественной комедии» Данте. *1492—1497 гг.*
Данте, влекомый Беатриче, взирает на геоцентрическую систему мироздания.

поэтов. Гармония сфер звучит в «Божественной комедии» великого Данте, написанной в начале XIV в.:

Когда круги, которых вечный ход
Стремишь, желанный, ты, мой дух призвали
Гармонией, чей строй тобой живет,

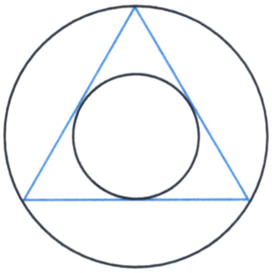
Я видел — солнцем загорелись дали
Так мощно, что ни ливень, ни поток
Таких озер вовек не расстилали.

(«Рай», песнь I)

Пифагорейское увлечение Данте числовой символикой сделало архитектуру его бессмертной поэмы непревзойденным образцом математической строгости (см. гл. 29.2).

Заключительные аккорды «космической музыки» прозвучали в работах Иоганна Кеплера (1571—1630) — выдающегося немецкого математика, физика, астронома. Следуя пифагорейско-платоновской традиции, Кеплер верил, что в основе мироздания лежат простые числовые соотношения и совершенные геометрические формы. Но Кеплер поставил и вопросы, достойные отца современного естествознания: почему планет (известных в то время) только шесть? Почему их орбиты имеют те, а не иные параметры?

Сначала молодой учитель математики Иоганн Кеплер тщетно ищет между параметрами планетных орбит простые числовые отношения. Но вдруг... Решая с учениками какую-то геометрическую задачу, он начертил на классной доске равносторонний треугольник со вписанной и опи-

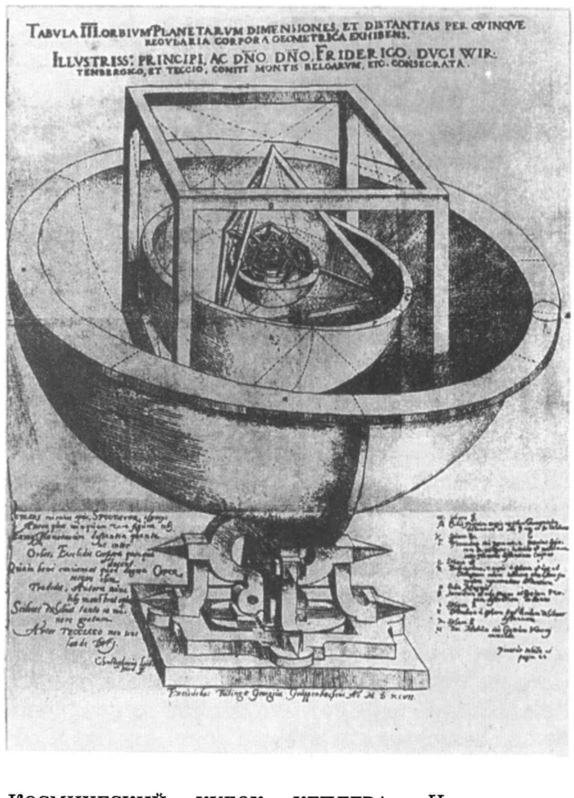


санной окружностями. Внезапно его озарила мысль, что планетные орбиты связаны между собой посредством геометрических фигур. Однако расчеты показали, что плоские геометрические фигуры не удовлетворяли этой идее. Новые разочарования... «И вот я снова устремился вперед. Зачем рассматривать фигуры двух измерений для пригонки орбит в пространстве? Следует рассмотреть формы трех измерений...», — вспоминал впоследствии Кеплер. Новые поиски и новое озарение: существует только шесть планет и, следовательно, пять промежутков между ними. Но и платоновых тел только пять! Как трудно было допустить, что это простое совпадение!.. «Я еще не имел ясной идеи о порядке, в котором следует расположить правильные тела... День и ночь я проводил за расчетами... Через несколько дней все стало на свои места...» Какой накал страстей в этих записях Кеплера!

Вскоре двадцатичетырехлетний учитель издает маленькую книжку с вычурным названием, как требовала мода того времени, — «Предвестник космографических исследований, содержащий тайну мироздания относительно чудесных пропорций между небесными кругами и истинных причин числа и размеров небесных сфер, а также периодических движений, изложенный с помощью пяти правильных тел Иоганном Кеплером из Вюртемберга, математиком достославной провинции Штирии», или «Mysterium Cosmographicum» («Тайна мироздания»), как любил называть ее сам Кеплер. Книга эта содержала формулу открытия Кеплера: в сферу орбиты Сатурна Кеплер вписывает куб, в куб — сферу Юпитера, в сферу Юпитера — тетраэдр, и так далее последовательно вписываются друг в друга сферы Марса — додекаэдр, сфера Земли — икосаэдр, сфера Венеры — октаэдр и сфера Меркурия. В центре всей системы коперниканец Кеплер помещает Солнце[1]. Тайна мироздания кажется раскрытой! Вселенная устроена на основе единого геометрического принципа!

Что же показали математические расчеты? Конечно, совпадение с данными Коперника по радиусам планетных орбит было поразительным, но все-таки не столь точным, как того хотелось бы педантичному Кеплеру[2]. Особенно много хлопот доставила Кеплеру сфера Меркурия, которую в конце концов пришлось вписать в октаэдр так, чтобы она касалась не граней, а середины ребер последнего. Остальные незначительные расхождения между теорией и опытными данными Кеплер объяснил тем, что реальные планетные сферы имеют некоторую толщину, что и позволило «выбрать» эти расхождения.

Однако червь сомнения поселился в душе Кеплера. Можно сказать, что оставшиеся тридцать лет жизни Кеплер посвятил «спасению» своей теории от самого себя. Эта работа привела к открытию истинных астрономических законов — трех знаменитых законов Кеплера, на базе которых Ньютон построил свою теорию тяготе-



КОСМИЧЕСКИЙ КУБОК КЕПЛЕРА. *Иллюстрация Иоганна Кеплера из его книги «Тайна мироздания». Тюбинген. 1596.*

---

[1] Для каждого правильного многогранника существует вписанная сфера, касающаяся центров каждой грани, и описанная сфера, проходящая через все вершины, причем центры этих сфер совпадают. Таким образом, все построенные Кеплером сферы имеют общий центр.

[2] Заинтересовавшийся читатель может легко воспроизвести эти расчеты. Например, для куба с ребром a имеем $R=a\sqrt{3}/2$, $r=a/2$, откуда $R/r=\sqrt{3}\approx1{,}732$. Современные усредненные радиусы орбит Сатурна и Юпитера соответственно равны $R_С=1{,}427\cdot10^9$ км и $R_Ю=0{,}788\cdot10^9$ км, откуда $R_С/R_Ю=1{,}834$. По Копернику, $R_С/R_Ю=1{,}758$.

ния. Сам же Кеплер в полной мере не осознал своих настоящих открытий и до конца жизни более всего любил свою первую работу.

Не забыл Кеплер и о самой «музыке» сфер. Поискам гармонических соотношений посвящена одна из глав книги «Гармония мира» (1619), которую он считал своей вершиной: «Жребий брошен. Я написал книгу либо для современников, либо для потомков...» Кеплер установил семь основных гармонических интервалов (консонансов): октаву (2 : 1), большую сексту (5 : 3), малую сексту (8 : 5), чистую квинту (3 : 2), чистую кварту (4 : 3), большую терцию (5 : 4) и малую терцию (6 : 5), из которых он выводит весь звукоряд как мажорного, так и минорного наклонения. После долгих поисков гармонических соотношений «на небе», проделав огромную вычислительную работу, Кеплер наконец установил, что отношения экстремальных (наибольших и наименьших) угловых скоростей[1] для некоторых планет близки к гармоническим: Марс — 3 : 2, Юпитер — 6 : 5, Сатурн — 5 : 4. «Солнце гармонии засияло во всем блеске... Небесные движения есть не что иное, как ни на миг не прекращающаяся многоголосая музыка»,— восторженно пишет Кеплер в «Гармонии мира».

И здесь Кеплера не оставляет буйная фантазия. Небольшие расхождения теории и эксперимента он объясняет тем, что небесный секстет должен звучать одинаково согласованно и в миноре, и в мажоре, а для этого ему необходимо иметь возможность перестраивать свои инструменты. Далее Кеплер утверждает, что Сатурн и Юпитер «поют» басом, Марс — тенором, Земля и Венера — альтом, а Меркурий — дискантом. Никаких математических «доказательств» здесь он не приводит. Да и сам Кеплер устал в поисках всеобщей гармонии: «Мой мозг устает, когда я пытаюсь понять, что я написал, и мне уже трудно восстановить связь между рисунками и текстом, которую я сам когда-то нашел...» Занималась заря нового естествознания: на смену фантазиям Кеплера шли уравнения Ньютона. Красивая сказка о музыке сфер доживала свой век, и работы Кеплера были ее лебединой песней.

Я, как древний Коперник, разрушил
Пифагорово пенье светил
И в основе его обнаружил
Только лепет и музыку крыл.
(Н. Заболоцкий)

Не следует спешить обвинять Кеплера в мистицизме, богоискательстве, числовых спекуляциях и увлечении отжившими античными теориями. Правильнее, видимо, вспомнить о времени, в котором он жил и творил: XVI в. закончился костром на площади Цветов в Риме, где 17 февраля 1600 г. был сожжен Джордано Бруно. Следует вспомнить трагическую историю матери Кеплера, Катерины Кеплер, которую публично объявили ведьмой и процесс над которой тянулся долгие 6 лет. Обвиняемую заковывали в цепи, ставили перед палачом с орудиями пыток, и только искусные действия ее сына Иоганна, который сам вел защиту, позволили выиграть процесс у церковных мракобесов. «Арестованную, к сожалению, защищает ее сын, господин Иоганн Кеплер, математик», —свидетельствовал судебный писец. Только в родном городе Кеплера Вейле за 14 лет с 1615 по 1629 г. ужасная смерть постигла 38 «колдуний» — по три казни за год! Вот в какое время рождалось современное естествознание!

«Мы имели дело с человеком тонких чувств, всецело и страстно увлеченным поиском пути к более глубокому проникновению в сущность явлений природы, с человеком, который, несмотря на внутренние и внешние трудности, сумел достичь поставленной перед собой возвышенной цели» — так характеризовал личность Кеплера Альберт Эйнштейн, Кеплер XX в., по справедливому определению физиков наших дней.

Заканчивая наше необычное «музыкальное обозрение», перенесемся в 20-е гг. XX в., когда вновь неожиданно зазвучало «пифагорово пенье светил». Согласно теории Нильса Бора, развитой им в 1913 г., движение электрона вокруг атомного ядра возможно только по избранным «разрешенным» орбитам, двигаясь по которым электрон вопреки законам классической элек-

[1] Из второго закона Кеплера следует, что угловые скорости планет непостоянны и имеют наименьшее значение в алфелии и наибольшее — в перигелии.

тродинамики не излучает энергии, но может скачком переходить с одной орбиты с энергией E_i на другую «дозволенную» орбиту с энергией E_k, испуская ($i>k$) или поглощая ($i<k$) при этом порцию (квант) электромагнитной энергии с частотой

$$\nu_{ik}=\frac{E_i-E_k}{h}, \qquad (9.2)$$

h — постоянная Планка.

В простейшем случае атома водорода, содержащего один электрон, энергия n-го энергетического уровня равна

$$E_n=-\frac{R}{n^2}, \qquad (9.3)$$

R — постоянная Ридберга.

Здесь n=1, 2, 3, ... называется главным квантовым числом. Тогда совокупность частот, излучаемых атомом водорода при переходе с верхнего энергетического уровня на нижний ($i>k$), определяет спектр испускания данного атома и каждому такому переходу соответствует своя спектральная линия.

Для атома водорода согласно формулам (9.2, 9.3) получаем совокупность спектральных линий с частотами

$$\nu_{ik}=\frac{E_i-E_k}{h}=\frac{R}{h}\left(\frac{1}{n_k^2}-\frac{1}{n_i^2}\right)=\frac{R}{h}\,\alpha_{ik}.$$

При переходе со второго, третьего и т. д. энергетических уровней n_i=2, 3, 4... на первый n_k=1 получается так называемая «спектральная серия Лаймана», для которой

$$\alpha_{21}=\frac{3}{4},\ \alpha_{31}=\frac{8}{9},\ \alpha_{41}=\frac{15}{16}.$$

Но ведь это кварта (3 : 4), тон (8 : 9) и полутон в чистом строе (15 : 16)! «Таким образом,— писал А. Эйнштейн,— мы открыли некоторое подобие между колебаниями струны и атомом, испускающим излучение».

«То, что нам сегодня удается понять на языке спектров,— это истинная музыка атомных сфер, созвучие целочисленных отношений, все возрастающие порядок и гармония при всем их многообразии — так восторженно отзывался о квантовой теории немецкий физик и математик Арнольд Зоммерфельд (1868—1951).— ...Она представляет собой тот полный таинства инструмент, на котором природа исполняет спектральную музыку и ритмом которого она управляет строением атома и атомных ядер».

А «пифагорово пенье светил» продолжает звучать и на пороге XXI в. Сегодня московский физик и философ Владимир Буданов построил *синергетическую апологию* музыки сфер. Рассматривая отношения сидерических[1] периодов обращения элементов Солнечной системы и приводя эти отношения к одной октаве, Буданов подсчитал так называемую *гелиоматрицу*, содержащую массу удивительной информации. Как оказалось, «супружеские» пары планет Земля—Уран, Венера—Марс и другие находятся в отношении самого призывного консонанса квинты. Земля—Марс пребывают в отношении самого сильного диссонанса малой секунды, подтверждая давно замеченное «дурное» влияние Марса на Землю. А вот Солнце и Земля связаны с другими планетами точными золотыми пропорциями, что, безусловно, указывает на особое положение Земли в Солнечной системе. Как полагает Буданов, часть данных гелиоматрицы могла быть известна древним еще в крито-микенскую эпоху, и они легли в основу древнегреческой космологии и пифагорейского учения о музыке сфер.

Итак, обыкновенная музыкальная гамма увлекла нас вслед за Пифагором, Платоном и Кеплером в путешествие по просторам космоса. Мы узнали, что «пифагорово пенье» услышали и физики XX в., но уже не в космосе, а в противоположной стихии — микромире. Но нам пора от «физических приложений» вновь вернуться к математическому содержанию музыкальной гаммы, которая таит в себе еще немало секретов.

[1] *Сидерический период обращения* (от лат. *sidus (sideris)* — небесное светило) — промежуток времени, в течение которого небесное тело-спутник совершает вокруг главного тела полный оборот относительно звезд.

10. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СТРОЙ МУЗЫКИ

Настоящая наука и настоящая музыка требуют однородного мыслительного процесса.

А. ЭЙНШТЕЙН

В главе 8 мы получили пифагоров строй, т. е. математическое выражение интервальных коэффициентов, лидийской гаммы (8.14), или, в современной терминологии, пифагоров строй натурального мажора:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & \frac{9}{8} & & \frac{81}{64} & & \frac{4}{3} & & \frac{3}{2} & & \frac{27}{16} & & \frac{243}{128} & & 2 \\
\text{ДО} & & \text{РЕ} & & \text{МИ} & & \text{ФА} & & \text{СОЛЬ} & & \text{ЛЯ} & & \text{СИ} & & \text{ДО}_1 \\
 & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & & \frac{256}{243} & & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & & \frac{9}{8} & & \frac{256}{243} &
\end{array} \qquad (10.1)$$

Здесь цифры внизу обозначают интервальные коэффициенты соседних ступеней гаммы; напомним, что 9/8 есть тон, а 256/243 — полутон. Мы обнаружили также, что основные консонансные интервалы в пределах октавы — квинта и кварта — являются соответственно средним арифметическим и средним гармоническим частот основного тона и октавы. Кроме того, октава, квинта, кварта и тон образуют геометрическую пропорцию:

октава : квинта = кварта : тон.

Таким образом, музыкальная гамма разделена на пропорциональные части; она буквально пронизана пропорциями, а пропорциональность, как мы знаем, является одним из объективных критериев красоты. Однако на этом математика музыкальной гаммы не кончается, а, скорее, только начинается.

Прежде всего из (10.1) видно, что расстояния между соседними ступенями пифагорова строя неодинаковы. Поэтому, во-первых, от ноты ДО можно было играть только в лидийском ладу, а чтобы сыграть от этой ноты, скажем, в дорийском ладу, необходимо было перестраивать почти все струны лиры. Во-вторых, от ноты РЕ получался уже не лидийский, а фригийский лад и, вообще, от каждой новой ноты начинался новый лад (не случайно в таблице 1 на с. 132 имеется семь ладов — по одному на каждую из семи нот октавы). Поэтому, чтобы сыграть мелодию в лидийском ладу от другой ноты (чего, безусловно, требовали ограниченные возможности человеческого голоса: один поет выше, другой — ниже), лиру также следовало перестраивать. (Конечно, если всю жизнь играть в одном ладу и одной тональности, то семи нот в октаве будет вполне достаточно. До сих пор прекрасно обходятся семью звуками некоторые гармошки и другие народные инструменты.)

Итак, для того чтобы иметь возможность переходить из лада в лад и из тональности в тональность, строй должен быть равномерным, т. е. иметь одинаковые высотные расстояния (интервальные коэффициенты) между звуками. Казалось бы, что проще: нужно разделить каждый тон-интервал пополам на два полутона, т. е. получить еще пять дополнительных звуков, и шкала пифагорова строя станет равномерной. Но вот тут-то и таилась основная трудность.

Дело в том, что половина тона ($\sqrt{9/8} \approx$ $\approx 1{,}0607$) в точности не равна полутону ($256/243 \approx 1{,}0545$) (см. с. 131). Поэтому если в качестве единого масштаба строя взять полутон $\sqrt{9/8}$, т. е. заменить на него имеющиеся в (8.1) два полутона 256/243, то эти 12 новых полутонов приведут нас не точно в октаву (2), а чуточку выше: $(\sqrt{9/8})^{12}=(9/8)^6\approx 2{,}0273$. Интервал между октавой, полученной шагами по 12-равномерным полутонам $\sqrt{9/8}$, и чистой октавой равен $(9/8)^6:2\approx 1{,}0136$ называется *пифагоровой коммой*[1].

Представляя пифагорову комму в виде

$$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{8}\right)^6=\frac{3^{12}}{2^{19}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{12}:2^7=1{,}0136,$$

мы получим еще один важный результат: *12 квинт с точностью до пифагоровой коммы равны 7 октавам.*

Но $\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$, т. е. новый полутон содержал иррациональное число $\sqrt{2}$, которого пифагорейцы боялись как огня и просто не хотели знать. Взять столь «некрасивое» число в качестве единицы измерения музыкальной гаммы было немыслимым для пифагорейцев: это противоречило всей философии целочисленных отношений. Поэтому пифагорейцы пошли другим путем: в качестве основы музыкальной гаммы они взяли квинту, «красивое» число 3/2.

Рассмотрим ряд, составленный из степеней числа 3/2:

$$\ldots,\ \left(\frac{3}{2}\right)^{-5},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{-4},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{-3},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{-2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{1},$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{0},\ \frac{3}{2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{3},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{4},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{5},\ \ldots$$

Оказывается, с помощью этого красивого симметричного ряда можно получить все интервальные коэффициенты пифагорова строя. Начнем с середины ряда $\left(\frac{3}{2}\right)^0=1$ и все получаемые звуки будем сводить в одну октаву, умножая или деля их интервальные коэффициенты на нужные степени числа 2 (интервальный коэффициент октавы). Новые звуки будем обозначать либо ближайшим снизу основным звуком с добавлением слова «диез» (♯) при движении по квинтам вверх, либо ближайшим сверху основным звуком с добавлением слова «бемоль» (♭) при движении по квинтам вниз. Это означает соответственно повышение или понижение основного звука. Итак,

$\left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{3}{2}=1{,}5000$	соль	$\left(\frac{3}{2}\right)^0=1$	до	
$\left(\frac{3}{2}\right)^2:2=\frac{9}{8}=1{,}1250$	ре	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot 2=\frac{4}{3}\approx 1{,}3333$	фа	
$\left(\frac{3}{2}\right)^3:2=\frac{27}{16}=1{,}6875$	ля	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot 2^2=\frac{16}{9}\approx 1{,}7778$	си-бемоль	
$\left(\frac{3}{2}\right)^4:2^2=\frac{81}{64}\approx 1{,}2656$	ми	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\cdot 2^2=\frac{32}{27}\approx 1{,}1852$	ми-бемоль	(10.2)
$\left(\frac{3}{2}\right)^5:2^2=\frac{243}{128}\approx 1{,}8984$	си	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}\cdot 2^3=\frac{128}{81}\approx 1{,}5802$	ля-бемоль	
$\left(\frac{3}{2}\right)^6:2^3=\frac{729}{512}\approx 1{,}4238$	фа-диез	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\cdot 2^3=\frac{256}{243}\approx 1{,}0535$	ре-бемоль	
. . . .		. . . .		
$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}:2^7\approx 1{,}0136$	си-диез	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-12}\cdot 2^7\approx 0{,}9865$	ре-бемоль-бемоль	

Как видим, двигаясь по квинтам вверх и вниз от основного тона, мы получили все ступени пифагорова строя (10.1), каждая из которых в свою очередь может быть повышена, понижена, дважды повышена или понижена и т. д. Процесс этот, к сожалению, бесконечен. Точного октавного повторения основного тона (до) мы так и не получим. (си-диез и ре-бемоль-бемоль совпадают с основным тоном до опять же с точностью до пифагоровой коммы.) Следовательно, и точно разделить октаву на целое число частей этим методом мы не сможем.

[1] *Коммой* (от греч. χομμα — знак) в музыкальной акустике называется интервал, не превышающий 1/9 целого тона. Пифагорова комма приблизительно равна 1/9 тона ($\sqrt[9]{9/8}\approx 1{,}0132$).

Таким образом, желая разделить пять тонов в (10.1) на полутона, мы получили, по крайней мере, 10 промежуточных звуков. Новый пифагоров строй примет вид (интервальные коэффициенты новых звуков для краткости опущены):

ДО		РЕ		МИ	ФА		СОЛЬ		ЛЯ		СИ	$ДО_1$
1		$\frac{9}{8}$		$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{27}{16}$		$\frac{243}{128}$	2
	ре♭≈ до#		ми♭≈ ре#			соль♭≈ фа#		ля♭≈ соль#		си♭ ≈ ля#		

Какие из этих дополнительных звуков взять: с бемолями или диезами? Для музыкантов, играющих на инструментах с нефиксированной высотой звуков (скрипачей, например), эта проблема не стоит. Они берут и те и другие. В результате звучание скрипки становится более выразительным и контрастным, так как в ладе обостряются тяготения неустойчивых звуков к устойчивым. Этим во многом объясняется то «волшебное пение» скрипки, которое доступно только ей одной[1].

Что касается инструментов с фиксированной высотой звуков, то введение десяти дополнительных звуков на семь основных слишком усложнило бы и сами инструменты, и игру на них. Тем более что и это не решало окончательно проблему и более тонкие построения требовали все новых и новых звуков. На сегодня в теории музыки известна масса строев с числом ступеней от 17 до 84! Но все они так и остались в кабинетах теоретиков. Практика же, руководствуясь мудрым критерием простоты (и красоты), оставила только пять дополнительных звуков: по одному в каждом из целых тонов. Они и стали черными клавишами фортепиано.

Так в октаве стало 12 звуков. Поскольку каждая пара дополнительных звуков отличалась лишь на пифагорову комму (это легко проверить самостоятельно), то их попросту приравняли между собой (ДО-диез стал равен РЕ-бемолю и т. д.). Такое приравнивание звуков с одинаковой высотой, но разными названиями в теории музыки называется *энгармонизмом*. Тонкости ладового звучания были принесены в жертву простоте. Инструменты же с числом звуков в октаве, превышающим 12, можно увидеть только в музеях. В московском Музее музыкальной культуры имени М. И. Глинки хранится рояль русского писателя, музыканта и музыковеда В. Ф. Одоевского (1804—1869), в каждой октаве которого имеется не 12, а 17 клавиш, настроенных согласно (10.2).

Квинтовая цепь пифагорова строя дала простой способ настройки инструментов с фиксированной высотой звуков: органов, клавесинов, фортепиано. От основного тона (сегодня по общему признанию им является звук ЛЯ первой октавы) откладывались семь октав — скелет музыкальной шкалы. Эти октавы заполнялись 12 звуками, полученными ходами по квинтам вверх и вниз. Какие из звуков взять за дополнительные — повышенные или пониженные, особого значения не имело. Важно было другое: *пифагорова комма оставалась внутри октавы*. Ее можно было переместить в любое место октавы, но нельзя было сделать только одного: нельзя было от нее избавиться! И она продолжала портить кровь музыкантам на протяжении столетий. Почему?

Если взять пифагоров строй с пониженными дополнительными звуками:

---

[1] Каким тонким является инструмент скрипка, убеждает простой пример из книги известного венгерского скрипача Карла Флеша «Искусство скрипичной игры»: «Пусть на струне ЛЯ необходимо сыграть два звука ЛЯ и СИ-бемоль второй октавы. Разница между этими звуками равна 60 Гц. Расстояние на грифе — 2 мм, следовательно, на одно колебание струны приходится 1/30 мм. Предполагая, что ЛЯ взято чисто, и желая сыграть математически чисто СИ-бемоль, мы должны поставить палец в нужное место струны с точностью до 1/30 мм». Насколько же чувствительными должны быть слух и пальцы скрипача, чтобы отмерить расстояние с точностью до 1/30 мм (это 33 микрона)!

	СИ	ДО		РЕ		МИ	ФА		СОЛЬ		ЛЯ		СИ	ДО$_1$		
…	$\frac{243}{256}$	1	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1024}{729}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{243}{128}$	2	$\frac{512}{243}$	…

«волчья квинта» «волчья кварта»

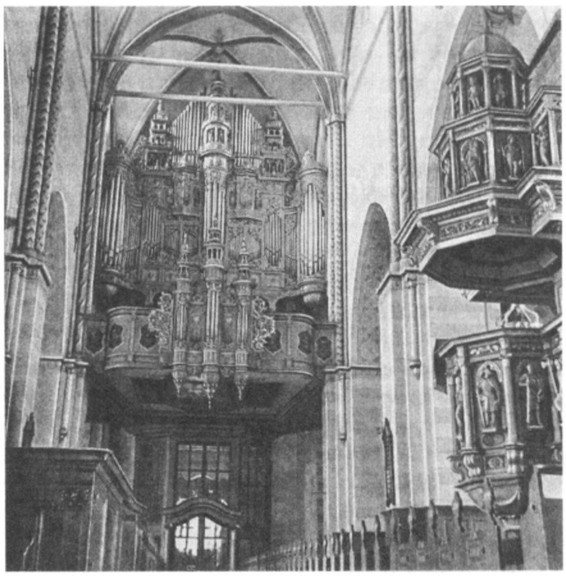
то в таком строе все квинты будут звучать чисто (иметь интервальный коэффициент 3/2), кроме одной. Квинта СИ — СОЛЬ-бемоль будет иметь интервальный коэффициент $\frac{1024}{729}:\frac{243}{256}\approx 1{,}4798$, а не 1,5! От чистой квинты она, разумеется, отличается на пифагорову комму: $1{,}5/1{,}4798\approx 1{,}0136$. Такая квинта на органе издавала пронзительный, неприятный звук, похожий на завывание волка, за что и была прозвана «волчьей квинтой» или просто «волком». Обращением «волчьей квинты» является «волчья кварта» СОЛЬ-бемоль — СИ, которая также отличается от чистой кварты ($4/3=1{,}333...$) на пифагорову комму: $\frac{243}{127}:\frac{1024}{729}\approx 1{,}3515$; $1{,}3515/1{,}3333\approx 1{,}0136$. Можно сказать, что вся история развития музыкальных строев была историей борьбы с «волками». Но об этом — чуть позже.

А сейчас обратим внимание на второй существенный недостаток пифагорова строя. Его заметил еще во II в. древнегреческий ученый пифагореец Дидим. Дело в том, что пифагорова терция (81/64) при гармоническом, т. е. одновременном, исполнении обоих тонов, образующих терцию, звучит слишком напряженно. Дидим предложил заменить пифагорову терцию (81/64) так называемой «чистой терцией» ($5/4=80/64$), которая гармонически звучит значительно приятнее, хотя, как видим, лишь чуть-чуть отличается от пифагоровой терции. Разность пифагоровой и чистой терций ($81/64 : 80/64=81/80\approx 1{,}0125$) называется *дидимовой коммой* и приблизительно равна 1/10 целого тона.

Однако идеи Дидима, как это не раз случалось с учеными Древней Греции, опередили историю почти на полторы тысячи лет. Они не нашли подходящей почвы для развития, увяли, умерли и были воскрешены только в конце XV в. …

…В XIV в. в Европе получает широкое распространение орган, ставший официальным инструментом католической церкви. С развитием органа развивается и многоголосие, которого не знала ни Древняя Греция, ни раннее средневековье. В течение столетий орган настраивался в пифагоровом строе. Но пифагоровы терции звучали на органе особенно жестко и не давали покоя музыкантам.

В XVI в. выдающийся итальянский композитор и музыкальный теоретик Джозеффо Царлино (1517—1590) воскресил идеи Дидима. Так родился новый квинтово-терцовый строй, названный *чистым строем*. Новое всегда с трудом пробивает себе дорогу. Учение Царлино подверглось резким нападкам. Любопытно, что среди тех, кто не признавал учения Царлино и вел с ним непримиримую борьбу, был Винченцо Галилей — выдающийся итальянский лютнист и отец великого революционера в науке Галилео Галилея.



ОРГАН ДОМСКОГО СОБОРА. *Рига.*
«... У него одного существуют те потрясающие звуки, те громы, тот величественный, говорящий будто из вечности голос, которого выражение невозможно никакому другому инструменту, никакому оркестру»,— писал об органе В. Стасов.

Почему чистая терция (5/4), ставшая наравне с квинтой полноправной хозяйкой нового строя, звучит приятнее пифагоровой, мы объясним в главе 12. Пока же отметим одну поразительную закономерность: интервальный коэффициент чистой терции (ее называют также большой терцией) есть среднее арифметическое интервальных коэффициентов основного тона (1) и квинты (3/2):

$$\frac{1+3/2}{2}=\frac{5}{4}. \qquad (10.3)$$

А дополнение большой терции (5/4) до квинты (3/2) — малая терция (3/2:5/4= =6/5) — является средним гармоническим основного тона и квинты:

$$\frac{2\;1\;3/2}{1+3/2}=\frac{6}{5}. \qquad (10.4)$$

Оба этих интервала дают приятное звучание; таким образом, закон целочисленных отношений Пифагора расширяется, а внутри музыкальной гаммы появляются еще две пропорции!

Предполагают, что еще Архит умел выражать большую и малую терции как среднее арифметическое и гармоническое тона и квинты. Однако письменное свидетельство этому мы находим лишь в объемном труде «Универсальная гармония» Марена Мерсенна (1588—1648) — монаха францисканского ордена, французского математика, теоретика музыки и философа, учившегося в иезуитском колледже Ла Флеш вместе с Рене Декартом. Труд Мерсенна — нескончаемое исследование об интервалах, полное всеобъемлющих умозрений. На десяти страницах огромного формата автор глубокомысленно обсуждает, например, является ли унисон консонансом, и попутно решает вопрос, как бы человек мог поднять землю и т. д. Однако, несмотря на чрезвычайную напыщенность, которая, впрочем, была неотъемлемой чертой всех сочинений того времени, работа Мерсенна содержала интересные идеи и прозрения. В частности, это касалось консонантности пропорций большой и малой терций. Сегодня большую и малую терции относят к группе несовершенных консонансов.

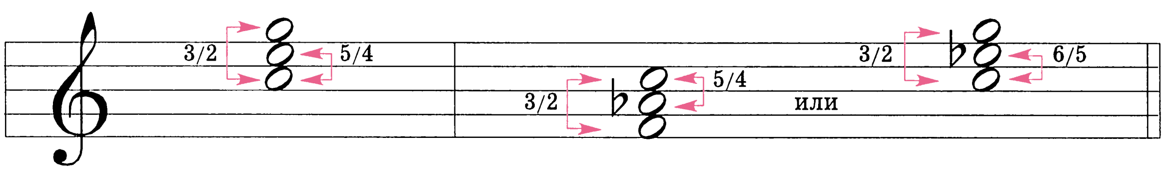
Но вернемся к работам Царлино. Выдающейся заслугой Царлино было не только выявление консонантности большой терции (5/4), но и построение «совершенной гармонии» — объединение большой терции и квинты в гармоническое трезвучие. Это был первый в истории музыки аккорд, а само трезвучие

$$1\div5/4\div3/2,\ \text{или}\ 4\div5\div6, \qquad (10.5)$$

ныне именуется мажорным и является основой всего гармонического языка музыки. Кроме того, Царлино обнаружил, что если отложить те же большую терцию и квинту вниз от основного тона, то окраска звучания аккорда существенно изменится. Светлые тона мажора подергиваются пасмурной дымкой иного звучания — минора. Приводя аккорд 2/3÷4/5÷1 к основному тону (умножая на 3/2, т. е. сдвигая вверх на квинту), получаем минорное трезвучие

$$1\div6/5\div3/2,\ \text{или}\ 10\div12\div15. \qquad (10.6)$$

Так был открыт закон, известный сегодня каждому юному музыканту: *смена большой терции на малую переводит мажорное трезвучие в минорное:*



Мажорное трезвучие было взято за основу чистого строя. Обрамляя мажорное трезвучие 1÷5/4÷3/2 такими же трезвучиями сверху и снизу

$$\frac{2}{3}\quad\frac{5}{6}\quad 1\quad\frac{5}{4}\quad\frac{3}{2}\quad\frac{15}{8}\quad\frac{9}{4}$$

$$4\div5\div6\qquad 4\div5\div6\qquad 4\div5\div6$$

и сводя умножением и делением на 2 построенные звуки в одну октаву, получаем чистый строй лидийской гаммы (натурального мажора):

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
\text{ДО} & & \text{РЕ} & & \text{МИ} & & \text{ФА} & & \text{СОЛЬ} & & \text{ЛЯ} & & \text{СИ} & & \text{ДО}_1 \\
1 & & \frac{9}{8} & & \frac{5}{4} & & \frac{4}{3} & & \frac{3}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{15}{8} & & 2 \\
 & \frac{9}{8} & & \frac{10}{9} & & \frac{16}{15} & & \frac{9}{8} & & \frac{10}{9} & & \frac{9}{8} & & \frac{16}{15} &
\end{array}
\qquad (10.7)
$$

Здесь кружками отмечены тоны, изменившиеся по сравнению с пифагоровым строем (10.1), цифры внизу обозначают интервалы между ступенями. Как видим, числовые характеристики чистого строя более простые. Однако строй стал менее равномерным: в нем, кроме полутона 16/15, появились две разновидности целых тонов 9/8 и 10/9. Знакомые с музыкальной грамотой увидели, что мажорные трезвучия (4÷5÷6) чистого строя построены на тонике (ДО), субдоминанте (ФА) и доминанте (СОЛЬ).

С помощью целых тонов 9/8 и 10/9 и полутона 16/15 легко построить чистый строй фригийской гаммы (см. табл. 1, с. 132), который понадобится нам в части IV:

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{16}{9} \quad 2. \qquad (10.8)$$

Мы не будем останавливаться на проблеме деления целых тонов чистого строя, тем более что их теперь стало два. Отметим другое. Чистый строй в истории музыки сыграл короткую, но заметную роль. Его звучание стало намного ярче и богаче по сравнению с пифагоровым строем. Чистый строй способствовал формированию мажорного и минорного ладов, развитию музыкальной гармонии. Но...

Вместе с достоинствами пришли и недостатки. Те же ненавистные музыкантам «волки» поселились теперь не на дополнительных, а на основных ступенях чистого строя! Квинта между II и VI ступенями (РЕ-ЛЯ) — самый настоящий «волк»: $\frac{5}{3} : \frac{9}{8} = \frac{40}{27} \approx 1{,}4815$. Соответственно «волком» является и ее обращение — кварта (ЛЯ-РЕ$_1$): $\frac{9}{4} : \frac{5}{3} = \frac{27}{20} = 1{,}35$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & \text{ДО} & \text{РЕ} & \text{МИ} & \text{ФА} & \text{СОЛЬ} & \text{ЛЯ} & \text{СИ} & \text{ДО}_1 & \text{РЕ}_1 & \\
\ldots & 1 & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{15}{8} & 2 & \frac{9}{4} & \ldots
\end{array}
$$

«волчья квинта» «волчья кварта»

Следовательно, настроив орган в чистом строе от ноты ДО, органист не мог уже перейти в тональности РЕ *мажор* и РЕ *минор*, т. е. в те тональности, где «волчья квинта» входит в тоническое трезвучие и встречается наиболее часто. Приходилось исключать и те тональности, где эта квинта входила в доминанту и субдоминанту, которые также являются основными ступенями лада. Таким образом, органист оказывался, что называется, связанным по рукам: модуляции, т. е. переходы, в другие тональности были крайне ограничены и опасны, и это лишало музыку значительной части ее выразительных средств.

«Волки» продолжали донимать органистов. На фоне «совершенной гармонии» чистого строя это было особенно невыносимо. Забавный случай рассказывают о знаменитом французском композиторе и теоретике музыки Жане Рамо (1683—1764). Однажды Рамо, желая отказаться от предлагаемой ему должности церковного органиста, «выпустил» из органа столько «волков», что своей игрой привел в ужас святых отцов и убедил их в своей «бесталанности».

Однако проблема оставалась. Найти закон построения нового музыкального строя, а значит, и рецепт новой настройки органа наряду с музыкантами безрезультатно пытались и математики: Кеплер, Декарт, Лейбниц, Эйлер. О теории гармонии Эйлера шутливо говорили, что она слишком музыкальна для математиков и слишком математична для музыкантов.

Но то, что не смог сделать изощренный ум математика, сделала обыкновенная смекалка простого органиста...

11. АЛГЕБРА ГАРМОНИИ — ТЕМПЕРАЦИЯ

...Звуки умертвив,
Музыку я разъял, как труп. Поверил
Я алгеброй гармонию...
А. ПУШКИН

XVIII в. в истории музыки начался решительной победой рационализма века Просвещения над антично-средневековым музыкальным целомудрием. К 1700 г. немецкий органист Андреас Веркмейстер (1645—1706) осуществил смелое и гениально простое решение: он отказался от совершенных и несовершенных консонансов — квинт, кварт и терций, оставив в первозданной консонантной красе лишь одну октаву, и попросту разделил ее (геометрически!) на 12 равных частей. В результате пифагорова комма, которую до того времени нетронутой передвигали с места на место, также разделилась на 12 равных частей и стала незаметной. Так в музыке восторжествовала *темперация* (лат. соразмерность), а новый двенадцатизвуковой строй был назван *равномерно-темперированным*. Но по порядку...

Вначале, разумеется, были попытки улучшить чистый строй, который сохранял главный недостаток пифагорова строя: невозможность безболезненного перехода из тональности в тональность. Естественным желанием при решении этой проблемы было увеличить количество звуков в октаве.

Посмотрим, что из этого выйдет.

Пусть мы настроили октаву в чистом строе от ноты ДО малой октавы (1) согласно (10.7). Затем повторим ту же процедуру от ноты РЕ (9/8), для чего 9/8 умножим последовательно на все интервальные коэффициенты чистого строя (нижние цифры в (10.7). Проделаем эти построения от всех 7 основных нот чистого строя; при этом новые ноты, которые мы будем получать в следующей (первой) октаве, также будем учитывать, ибо у них, разумеется, должны быть октавные повторения в исходной (малой) октаве.

В результате наших вычислений получим (новые ноты написаны красным, октавные повторения нот — синим):

ДО	РЕ	МИ	ФА	СОЛЬ	ЛЯ	СИ	ДО_1	РЕ_1	МИ_1	ФА_1	СОЛЬ_1	ЛЯ_1	СИ_1	ДО_2
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{15}{4}$	4
	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{135}{64}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{81}{32}$	$\frac{45}{16}$		$\frac{27}{8}$		
		$\frac{5}{4}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{75}{32}$	$\frac{5}{2}$		$\frac{25}{8}$			
			$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	2	$\frac{20}{9}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$			$\frac{32}{9}$	
				$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{45}{16}$	3			
					$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{10}{3}$		
						$\frac{15}{8}$	$\frac{135}{64}$	$\frac{75}{32}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{45}{16}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{225}{64}$	$\frac{15}{4}$	

Как видим, 7 основных нот дали нам 11 дополнительных! Итог не слишком радостный. Но процесс образования новых нот все-таки затухает: нота РЕ дала 4 новых ноты, МИ — 3, ФА — 2, СОЛЬ — ни одной, ЛЯ и СИ — по одной. Теперь ту же процедуру нужно проделать с новыми одиннадцатью нотами, ибо раз мы хотим сделать все ноты равноправными, то они не должны составлять исключение. Затем — с вновь полученными (самыми новыми) и т. д. К счастью, процесс все-таки замкнется, но какой ценой! В результате получим 84 ступени в октаве! Кто будет играть на столь сложном инструменте?!

Сейчас трудно сказать, кому первому пришла идея равномерно разделить октаву (а вместе с ней и пифагорову комму) на 12 равных частей. Идея эта была подготовлена самой логикой развития музыкального строя и, как говорят в таких случаях, носилась в воздухе. Но изложение этой идеи мы находим опять-таки в энциклопедическом труде Мерсенна «Универсальная гармония». Здесь Мерсенн дал математическое описание нового строя и рассчитал его интервальные коэффициенты. Суть нового метода заключалась в следующем.

Мы знаем, что и пифагоров, и чистый строй не замкнуты, т. е. звук, полученный в результате 12 ходов по квинтам вверх или вниз, не является точным октавным повторением исходного звука, а отличается от него на пифагорову комму. На протяжении столетий наибольшее, что позволяли себе теоретики музыки,— это перегонять комму по гамме с места на место. Комма нетронутой блуждала по гамме и время от времени заявляла о себе в завывании «волков». Так вот, Мерсенн предложил сузить полутона так, чтобы они точно укладывались в октаву. Тем самым он равномерно распределил пифагорову комму *по всем 12 полутонам*, и она как бы «растворилась» в гамме: стала незаметной.

Для того чтобы разделить октаву (2) на 12 равных частей, в качестве нового полутона необходимо взять по формуле (8.12) интервал $\sqrt[12]{2}$. Следовательно, математическое выражение равномерно-темперированного строя будет предельно простым:

$$(2)^{\frac{m}{12}}, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 12. \qquad (11.1)$$

Если воспользоваться логарифмическими частотами и логарифмическими интервалами (8.13), т. е. прологарифмировать (11.1) по основанию 2, то математический строй (11.1) примет наиболее простой вид (интервал логарифмической октавы $0 \leqslant L \leqslant 1$ будет арифметически разделен на 12 равных логарифмических полутонов (1/12):

$$\frac{m}{12}, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 12. \qquad (11.2)$$

Проверим, что будет в новом строе с консонансами и прежде всего с квинтой. Темперированная квинта имеет интервальный коэффициент $2^{7/12} \approx 1{,}4983$, который несущественно отличается от интервального коэффициента чистой квинты (3/2):

$$1{,}5/1{,}4983 \approx 1{,}0013.$$

То же справедливо и для кварты (4/3):

$$2^{5/12} \approx 1{,}3348; \ 1{,}3348/1{,}3333 \approx 1{,}0015.$$

Эти расхождения улавливает лишь изощренный слух профессионала. Несколько хуже обстоят дела с терциями. Сравнивая темперированную большую терцию $2^{4/12} = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$ с пифагоровой терцией ($81/64 = 1{,}2656$) и чистой терцией ($5/4 = 1{,}25$), имеем $1{,}2656/1{,}2599 \approx 1{,}0044$; $1{,}2599/1{,}25 \approx 1{,}008$. Как видим, здесь относительные ошибки соответственно в 4 и 8 раз больше, чем для квинты (примерно то же имеем для темперированной малой терции). Но и эти терции в музыкальном отношении вполне приемлемы.

Однако новая система Мерсенна была принята в штыки. Даже приятель Мерсенна по иезуитскому коллежу математик Декарт был возмущен надругательством над чистотой консонансов, а музыкантов, которые рискнут воспользоваться новой темперацией, назвал невеждами, не имеющими никакого представления о законах музыкальной науки. «Что касается Ваших музыкантов,— писал Мерсенну Декарт,— то какими умелыми Вы бы их ни делали, я должен сказать, что они или издеваются, или насмехаются, или никогда ничего не понимали в теории музыки». Чистота звучания и простота целочисленных отношений для консонансов, идущие от родоначальника европейской науки Пифагора, представлялись Декарту нерушимыми. Таким образом, потребовалось еще более полувека, чтобы новая система завоевала себе право на жизнь.

Путь Веркмейстера к равномерной темперации, разумеется, не был усыпан розами. К тому времени и в музыке сформировались два противоборствующих лагеря: теоретики, опиравшиеся в построении музыкальных систем на математику («разум»), и практики, предпочитавшие полагаться на собственный слух («ухо»). Любопытно, что среди сторонников «уха» были математики Декарт и Д'Аламбер, а среди сторонников «разума» — композитор Рамо. К счастью, Веркмейстер держался «золотой середины».

Как бы то ни было, но к концу XVII в. вышли две его книги, содержавшие практическое изложение равномерной темперации. Первая из них называлась «Музыкальная темперация, или ясное математически правильное изложение того, как при помощи монохорда следует настраивать по хорошей темперации клавиры — органы, позитивы, регали, спинеты, для того чтобы в соответствии с сегодняшней манерой исполнения музыки все тональности звучали в приятной и сносной гармонии. К этому добавлено предваряющее сочинение о преимуществах совершенных и несовершенных музыкальных исчислений, пропорций и консонансов, которые надо учитывать при установлении этой темперации. Наряду с этим приложено гравированное на меди ясное и полное обозначение этой темперации на монохорде. Обнародовано Андреасом Веркмейстером, соборным органистом в Кведлинбурге. 1691 год». Название второй книги мы лучше опустим.

Итак, к началу XVIII в. органы, настроенные Андреасом Веркмейстером, зазвучали в равномерно-темперированном строе. Преимущества нового строя были очевидны. Это был замкнутый энгармонический строй, состоящий из интервалов, вполне приемлемых для музыкального слуха и в гармоническом, и мелодическом исполнении. В новом строе стали совершенно безболезненными переходы из тональности в тональность (модуляции), «волки» навсегда покинули орган. Простота нового строя также была его неоспоримым преимуществом.

Конечно, и в век Просвещения новое не всеми воспринималось восторженно. Выдающийся немецкий композитор Георг Фридрих Гендель (1685—1759) не принял новшества. Отказ от совершенных консонансов возмущал его. К счастью, равномерная темперация нашла сторонника в лице сверстника Генделя, великого немецкого композитора и органиста Иоганна Себастьяна Баха (1685—1750). В простоте и математической строгости равномерной темперации Бах гениально предвидел подлинный путь развития музыки. Предвидения Баха сбылись: равномерная темперация сегодня лежит в основе всей мировой музыки.

Для демонстрации возможностей нового строя Бах написал свое бессмертное произведение «Хорошо темперированный клавир», основной целью которого было ознакомить играющих на клавире со всеми двадцатью четырьмя (12 — мажорными и 12 — минорными) тональностями хроматической гаммы нового «хорошо согласован-

БАХ Иоганн Себастьян *(1685—1750)*.
Последний прижизненный портрет И. С. Баха работы неизвестного художника.

ного» строя. Бах хотел показать равноценность всех тональностей при новой системе настройки клавира и вместе с тем выявить характерную окраску каждой тональности. На титульном листе «Хорошо темперированного клавира» значилось: «Для пользы и употребления жадного до учения музыкального юношества, как и для особого времяпрепровождения тех, кто уже преуспел в этом учении, составлено и изготовлено Иоганном Себастьяном Бахом — в настоящее время великокняжеским Ангальт-Кетенским капельмейстером и директором камерной музыки. В году 1722».

Разумеется, Бах слишком скромно оценивал свое произведение. Цикл прелюдий и фуг Баха занимает особое место в мире музыки. Это не просто один из бессмертных шедевров мировой музыки. Это настоящая энциклопедия полифонического искусства, его альфа и омега, настольная книга каждого мыслящего музыканта. Не случайно Бетховен называл «Хорошо темперированный клавир» своей «музыкальной библией», которую он изучал с раннего детства до глубокой старости. Да и сам Бах всю жизнь обращался к своему детищу и через 24 года написал вторую часть «Хорошо темперированного клавира», также состоящую из 24 прелюдий и фуг.

И все-таки является ли 12-звуковая равномерная темперация «абсолютной истиной» в музыке? Разумеется, нет! Спор Баха и Генделя продолжается. Музыкантов с особо тонким слухом раздражают «тупые» консонансы темперированного строя. Чайковский после отдыха на природе болезненно ощущал недостатки темперированной музыки, и прежде всего собственной. Известно, как мучился Скрябин, не находя в рояле чистых интервалов. В последние годы жизни он пытался сконструировать рояль с дополнительными тонами, но неожиданная смерть не позволила осуществить задуманное. Наш соотечественник и современник, крупнейший пианист XX в. Святослав Рихтер признавался, что он физически старался преодолеть темперацию рояля при помощи звукоизвлечения, придавая диезным и бемольным звукам, когда это нужно, различную тембровую окраску. Поиски новых равномерных темпераций продолжаются. Разработаны 24-, 48- и 53-звуковые равномерные темперации. На каждую из них специально написана музыка и сконструированы музыкальные инструменты. Но все они практического распространения не получили. Возможно, новые темперации ждут еще нового Веркмейстера и нового Баха...

На этом можно было бы поставить точку. Но мы поставили многоточие, ибо у вдумчивого читателя должен возникнуть еще один вопрос: почему все-таки октава разделена именно на 12 частей? Это вопрос из области математики, и ответ на него содержится в решении задачи, которую мы сформулируем так.

Требуется разделить интервал октавы $1 \leqslant f \leqslant 2$ на n геометрически равных частей $1 = f_0 < f_1 < f_2 < ... < f_n = 2$, так, чтобы k-я точка деления приходилась на главный консонанс октавы — квинту, т. е. $f_k = 3/2 (0 < k < n)$. Так как согласно (8.12) $f_k = 2^{k/n}$, то мы приходим к уравнению

$$2^{k/n} = 3/2, \text{ или } 2^{k+n} = 3^n. \qquad (11.3)$$

Но левая часть уравнения (11.3) есть число четное при любых n и k, тогда как правая — число нечетное. Таким образом, мы пришли к противоречию, которое доказывает, что уравнение (11.3) в целых числах решений не имеет. Одновременно мы можем сделать важный вывод: шкала равномерно-темперированного строя никогда *точно* не пройдет через квинту.

Будем искать в целых числах приближенные решения уравнения (11.3). Логарифмируя, представим это уравнение в виде

$$\frac{k}{n} = \log_2 \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{k}{n} = 0{,}58505... \qquad (11.4)$$

и, как говорят математики, найдем рациональные приближения иррационального числа 0,58505... Такие задачи в математике решаются с помощью *цепных дробей*, т. е. дробей вида

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}. \qquad (11.5)$$

Здесь a_1, a_2, a_3, ... — натуральные числа. Известно, что всякое число $a \in [0; 1]$ можно разложить в цепную дробь (11.5), которая будет бесконечной, если число a иррациональное. Рациональные выражения

$$\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}},\ \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}}\ \text{и т. д.}$$

называются *подходящими дробями* цепной дроби (11.5), т. е. являются рациональными приближениями числа a.

Разложим число $x=\log_2\frac{3}{2}$ в цепную дробь. По определению логарифма имеем

$$2^x=\frac{3}{2}. \qquad (11.6)$$

Ясно, что $x<1$. Положим $x=\frac{1}{y}$ $(y>1)$. Тогда (11.6) примет вид

$$2^{\frac{1}{y}}=\frac{3}{2}\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^y=2. \qquad (11.7)$$

Легко видеть, что $1<y<2$, так как при этом $\left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{3}{2}<2<\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$. Поэтому положим $y=1+\frac{1}{z}$ $(z>1)$. Уравнение (11.7) преобразуется к виду

$$\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}}=2\Rightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^z=\frac{3}{2}. \qquad (11.8)$$

Очевидно, что $1<z<2$, так как $\frac{4}{3}<\frac{3}{2}<\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$. Значит, полагаем $z=1+\frac{1}{u}$ $(u>1)$. Тогда уравнение (11.8) примет вид

$$\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}}=\frac{3}{2}\Rightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}}=\frac{9}{8}\Rightarrow\left(\frac{9}{8}\right)^u=\frac{4}{3}. \qquad (11.9)$$

Так как $\left(\frac{9}{8}\right)^2<\frac{4}{3}<\left(\frac{9}{8}\right)^3$, то для u получаем оценку $2<u<3$. Поэтому в (11.9) делаем подстановку $u=2+\frac{1}{v}$ $(v>1)$ и получаем

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{v}}=\frac{4}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{v}}=\frac{256}{243}\Rightarrow\left(\frac{256}{243}\right)^v=\frac{9}{8}. \qquad (11.10)$$

С помощью таблиц логарифмов или простой проверкой на микрокалькуляторе находим оценку для v: $2<v<3$. Наконец, сделаем еще одну замену $v=2+\frac{1}{w}$ $(w>1)$, отчего (11.10) примет вид

$$\left(\frac{256}{243}\right)^2\cdot\left(\frac{256}{243}\right)^{\frac{1}{w}}=\frac{9}{8}\Rightarrow\left(\frac{256}{243}\right)^{\frac{1}{w}}=\frac{531441}{524288}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{531441}{524288}\right)^w=\frac{256}{243},$$

$$\text{или}\quad\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{12}:2^7\right]^w=\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot 2^3. \qquad (11.11)$$

Для w справедлива оценка $3<w<4$, поэтому $w=3+\frac{1}{t}$.

Не будем испытывать терпение читателей (процесс разложения иррационального числа в цепную дробь все равно бесконечен). А в качестве компенсации за длинные выкладки обратим внимание на то, что в наших приближениях (11.6) — (11.11) все время фигурируют музыкальные интервалы: октава (2), квинта (3/2), кварта (4/3), тон (9/8), полутон (256/243) и даже пифагорова комма ($(3/2)^{12}:2^7$)!

Построим теперь соответствующую цепную дробь:

$$x=\frac{1}{y}=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{u}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{v}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{w}}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{t}}}}}}$$

и выпишем подходящие дроби:

$$\frac{1}{1}=1,\ \frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{3}{5},\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=\frac{7}{12},\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}}}=\frac{24}{41}.$$

Первые три дроби 1; 0,5; 0,6 дают слишком грубое приближение к числу x=0,58505... Четвертая дробь k/n=7/12=0,5833... является достаточно хорошим приближением. Она-то и положена в основу 12-звукового равномерно-темперированного строя (n==12, k=7, т. е. на седьмой ступени 12-звуковой гаммы находится темперированная квинта). Пятая дробь 24/41=0,58536 дает еще лучшее приближение. Таким образом, получаем еще одну равномерную темперацию, которая на 24-й ступени имеет практически идеальную квинту. Но ведь октава при этом делится на 41 ступень! Вряд ли кто отважится играть на столь сложном инструменте. Итак, именно 12-звуковая темперация является той «золотой серединой», которая обеспечивает достаточно чистое звучание консонансов при достаточной простоте музыкальной гаммы.

История создания равномерной темперации свидетельствует о том, как тесно порой переплетаются судьбы математики и музыки. Равномерная темперация в музыке появилась вслед за изобретением логарифмов и развитием алгебры иррациональных величин. Без знания логарифмов провести расчеты равномерно-темперированного строя (10.8) было бы попросту невозможно. Логарифмы стали той «алгеброй гармонии», на которой выросла темперация.

И в заключение скажем несколько слов об одном любопытном и пока загадочном свойстве равномерной темперации. Согласно логике построения темперированной шкалы (11.1) все 12 мажорных, равно как и все 12 минорных, тональностей равномерно-темперированного строя должны звучать одинаково. Однако музыканты считают, что каждая тональность темперированного строя обладает своей неповторимой окраской. Так, композиторы единодушно сходятся в том, что ДО *мажор* характерен для светлого, солнечного настроения. Очень любил ДО *мажор* за жизнерадостность и оптимизм Бетховен. Вспомним 1-ю Симфонию и 1-й Концерт для фортепиано с оркестром Бетховена, написанные в ДО *мажоре*, которые как бы радостно перекликаются друг с другом; или его же 21-ю Сонату ДО *мажор*, названную за светлые и прозрачные тона именем богини утренней зари Авроры. Считается, что МИ *мажор* выражает взволнованное, напряженное, мятущееся настроение. Поэтому именно МИ *мажор* был так созвучен восторженной, страстно ищущей и терзаемой противоречиями душе Листа; в МИ *мажоре* Листом написаны многие фортепианные произведения, транскрипции, «Фауст-симфония». В тональности ФА диез *мажор* композиторы находят легкое, радостно возвышенное, романтическое настроение, столь характерное для творчества Шопена («Баркарола», Экспромт соч. 36, Ноктюрн № 2 соч. 15). ДО *минор* считается тональностью мужественной печали, героико-трагических образов (вспомним огненный пафос «Патетической» сонаты Бетховена, знаменитый «революционный» этюд Шопена или шквальные кульминации 2-го Концерта для фортепиано с оркестром Рахманинова); МИ бемоль *минор* — тональность глубоко трагических состояний. Например, Полонез № 2 соч. 26 — одно из самых скорбных творений Шопена.

Мы не можем сказать, отражают ли такого рода суждения какие-либо неизвестные пока объективные закономерности, или это дань устоявшейся традиции. Если мы имеем дело с традицией, то ее корни следует искать в пифагоровом строе. Действительно, в пифагоровом строе энгармонические звуки не только нетождественны, но и принципиально отличаются друг от друга по своим качествам и выразительности. В пифагоровом строе СОЛЬ диез, например, находится на пифагорову комму выше, чем ЛЯ бемоль. Поэтому СОЛЬ диез тяготеет к верхнему звуку ЛЯ и воспринимается светлее, чем ЛЯ бемоль, который направлен к нижнему звуку СОЛЬ и потому кажется более мрачным. Следовательно, и все повышенные звуки восходящей линии квинтового ряда (диезные звуки) имеют светлый характер, тогда как пониженные (бемольные) звуки нисходящей линии квинтового ряда (см. (10.2)) несут мрачный оттенок. Итак, все та же пифагорова комма окрашивает бемольные и диезные звуки в противоположные цвета — темные и светлые. Теперь становится понятным, почему Шопен написал свой знаменитый траурный марш из 2-й Сонаты соч. 35 в СИ бемоль *миноре* — тональности с пятью бемолями, а «Баркаролу» — самое утонченное и поэтическое из своих произведений, ставшее символом интимной лирики в музыке, — в ФА диез *мажоре* — тональности с шестью диезами. Вот почему похоронный марш из 12-й Сонаты написан Бетховеном в ля бемоль *миноре* — тональности с наибольшим числом, семью бемолями, хотя, по мнению знатоков, эта находка Бетховена во многом теряет в равномерно-темперированном строе фортепиано.

Так что же такое есть индивидуальная окраска тональностей: традиция, идущая от пифагорова строя, или неизвестная объективная закономерность? Окончательного ответа на этот вопрос пока не существует.

Вот так, вместо обещанной точки в конце параграфа мы вновь пришли к вопросительному знаку. Но ведь это и хорошо, ибо новые вопросы зовут нас в новые пути в неизвестное! А впереди у нас, пожалуй, главный вопрос всей второй части: в чем секрет «закона Пифагора»? Почему приятные для «уха» консонансные интервалы математически выражаются такими приятными для «разума» простыми целочисленными соотношениями: 2 : 1, 3 : 2, 4 : 3, 5 : 4, 6 : 5?

12. МАТЕМАТИКА КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ: ТАЙНОЕ СТАНОВИТСЯ ЯВНЫМ

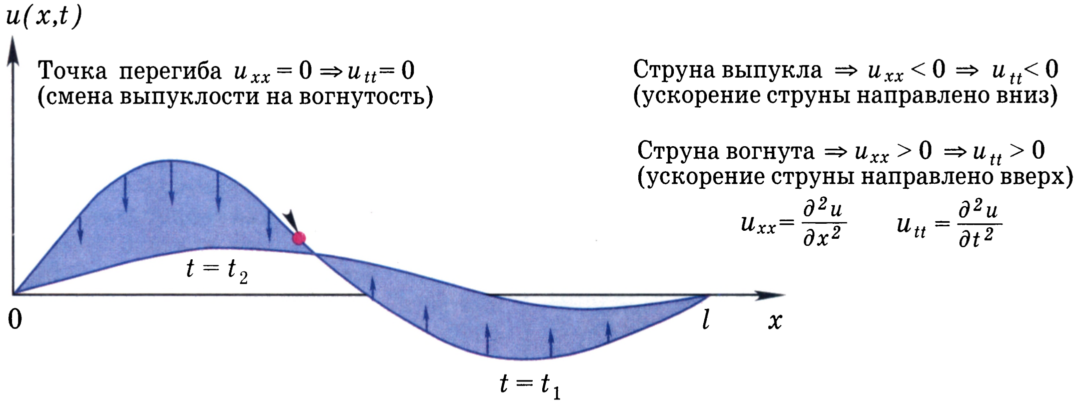
Музыка есть таинственная арифметика души, которая вычисляет себя, сама того не сознавая.

Г. ЛЕЙБНИЦ

Ноябрьским утром 1717 г. на ступенях парижской церкви св. Жана ле Рона был найден младенец. Его взяли на воспитание и в честь святого церкви окрестили Жаном ле Роном. Мальчик рано проявил блестящий ум и жадную любознательность и вскоре стал гордостью всей Франции. Это был Жан ле Рон Д'Аламбер (1717—1783) — выдающийся французский математик, философ, писатель, член Парижской, Петербургской и других академий.

Круг интересов Д'Аламбера был необычайно широк: механика (принцип Д'Аламбера), гидродинамика (парадокс Д'Аламбера), математика (признак сходимости Д'Аламбера), математическая физика (формула Д'Аламбера), философия, теория музыки. Такой широты требовала и работа вместе с Дени Дидро над созданием знаменитой «Энциклопедии наук, искусств и ремесел», да и сам дух эпохи Просвещения, когда к знаниям тянулись все, в том числе и «просвещенные деспоты» Фридрих II и Екатерина II. Последняя неоднократно приглашала Д'Аламбера быть воспитателем ее сына — цесаревича Павла, назначая при этом баснословное вознаграждение, но всегда получала деликатный, но твердый отказ.

В 1747 г. Д'Аламбер опубликовал статью «Исследования по вопросам о кривой, которую образует натянутая струна, приведенная в колебание», где впервые задача о колебании струны сводилась к решению дифференциального уравнения в частных производных. И хотя эта тема выходит за рамки школьной математики (но ведь в знаниях «держать себя в рамках» — значит погубить свою любознательность!), мы рассмотрим простое и поистине красивое уравнение, описывающее колебание струны, так называемое *волновое уравнение*, с которого началась



Колебания струны длины l. Показаны два момента времени $t_1<t_2$. Масштаб по ординате $U(x, t)$ сильно увеличен.

новая ветвь математики — математическая физика:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (12.1)$$

Здесь t — время, x — координата струны в положении равновесия; $u=u(x, t)$ — неизвестная функция, выражающая отклонение точки с координатой x в момент времени t от положения равновесия; a^2 — коэффициент пропорциональности, характеризующий упругие свойства струны ($a=\sqrt{T/\rho}$, T — сила натяжения струны, ρ — плотность однородной струны). Предполагается, что струна совершает малые колебания, происходящие в одной плоскости. Наконец, символы $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ обозначают частную производную второго порядка, которая определяется как производная от производной $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)$. Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$, как и обычная «школьная» производная $\frac{dy}{dx}$, характеризуют скорость изменения функции $u(x, t)$ по каждой из переменных x или t в отдельности при условии, что другая переменная не изменяется (у функции одной переменной $y=y(x)$ — одна производная, а у функции двух переменных $u=u(x, t)$ — две частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$). Чтобы отличать частные производные от обыкновенных производных, пишут не прямую букву d, а круглую ∂.

Волновое уравнение (12.1) есть не что иное, как следствие второго закона Ньютона. Левая часть (12.1) выражает вертикальное ускорение струны в точке x, а правая часть — отнесенную к массе струны силу, вызывающую это ускорение, которая тем больше, чем больше вогнутость струны $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Д'Аламбер нашел общее решение уравнения (12.1):

$$u(x, t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at), \qquad (12.2)$$

которое содержит две произвольные функции $\varphi(x, t)$ и $\psi(x, t)$. Через пять лет Даниил Бернулли (1700—1782), математик, механик, физиолог и медик, почетный член Петербургской Академии наук, представитель славного рода Бернулли, который к настоящему времени подарил миру более 100 потомков, добившихся значительных результатов во всех сферах человеческой деятельности, и прежде всего в научной, получил другое общее решение уравнения (12.1):

$$u(x, t)=\alpha\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi at}{l}+$$
$$+\beta\sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi at}{l}+\ldots \qquad (12.3)$$

Сравнивая решения Д'Аламбера (12.2) и Д. Бернулли (12.3), мы, казалось бы, приходим к абсурду: одно и то же уравнение (12.1) имеет совершенно непохожие решения! Но никакого абсурда нет, так уж устроены дифференциальные уравнения. Они обладают бесчисленным множеством решений, что легко видеть из (12.2), где функции $\varphi(x-at)$ и $\psi(x+at)$ произвольные. При достаточно общих предположениях относительно функций φ и ψ правая часть (12.2) может быть представлена рядом (12.3).

Выбор того или иного частного решения дифференциального уравнения диктуется условиями, в которых протекает процесс (это так называемые *граничные условия*), и условиями, которые имели место в начале процесса (так называемые *начальные условия*). Только совокупность дифференциального уравнения, начальных и граничных условий определяет решение той или иной физической задачи.

С помощью общего решения (12.2) Д'Аламбер решил одну из таких задач: найти колебания бесконечной струны (т. е. при отсутствии граничных условий), которой в начальный момент времени $t=0$ придали некоторую форму $f(x)$ и сообщили некоторое ускорение $g(x)$. Математически задача ставилась так: найти решение уравнения (12.1), удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0)=f(x)$, $u_t(x, 0)=g(x)$, т. е. решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0)=f(x), \\ u_t(x, 0)=g(x), \text{ где } u_t=\dfrac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \tag{12.4}$$

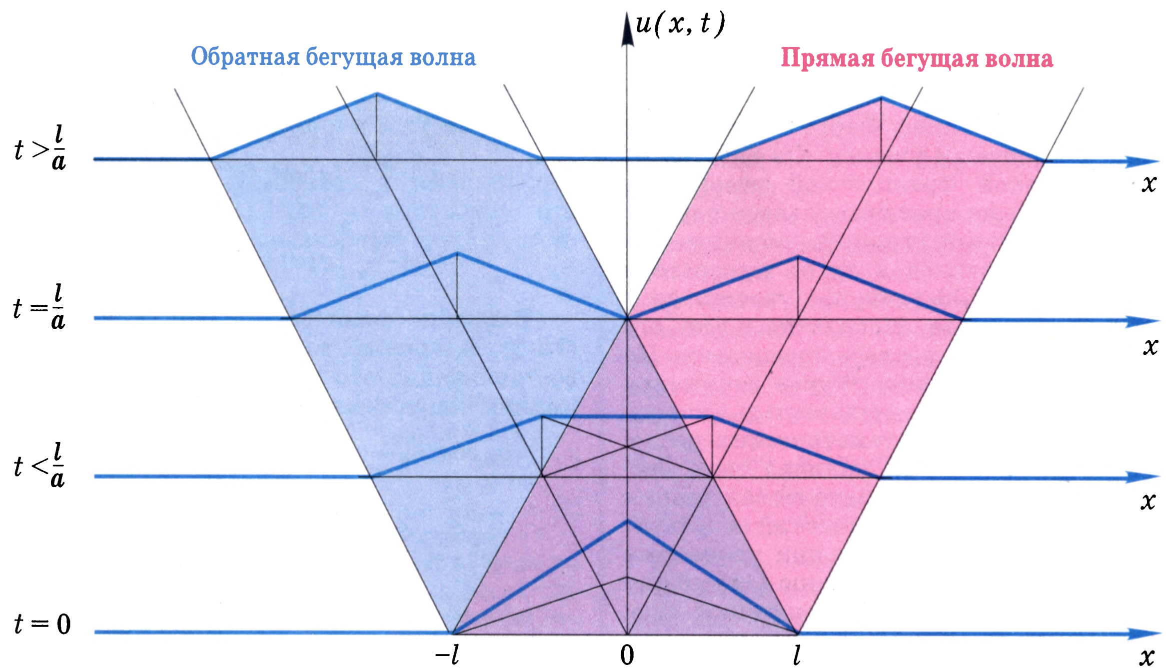
Решение задачи (12.4) определяется формулой Д'Аламбера

$$u(x, t)= \\ =\frac{1}{2}|f(x-at)+f(x+at)|+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi. \tag{12.5}$$

Формула (12.5) в простейшем случае $g(x)=0$, т. е. когда струну тихонько оттянули и отпустили, не придавая ей дополнительного ускорения, принимает вид

$$u(x, t)=\frac{1}{2}|f(x-at)+f(x+at)|$$

и физически означает, что сообщенный струне при $t=0$ профиль $f(x)$ будет распространяться влево и вправо со скоростью a. Это так называемые *две бегущие волны*, дви-



Начальное возмущение треугольной формы распадается на две бегущие волны. Профиль начального возмущения сохраняет свою форму, а его амплитуда уменьшается вдвое.

жущиеся в противоположных направлениях с одинаковой скоростью a.

На самом деле бесконечных струн не бывает. Струна имеет конечную длину l и, как правило, жестко закреплена на концах. Так возникают граничные условия: $u(0, t)=0$ — струна закреплена слева ($x=0$); $u(l, t)=0$ — струна закреплена справа ($x=l$). Ясно, что в этом случае бегущие волны будут отражаться от концов, взаимодействовать друг с другом и образовывать более сложную картину колебаний.

Задача о колебании конечной струны была независимо решена Д'Аламбером и Эйлером, а еще через полвека Жозеф Фурье изобрел новый метод, позволявший решать эту и многие другие задачи математической физики. Задача о колебании конечной струны формулируется так: найти решение волнового уравнения (12.1), удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0)=f(x)$, $u_t(x, 0)=g(x)$ и граничным условиям $u(0, t)=0$, $u(l, t)=0$, т. е. решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0)=f(x), \\ u_t(x, 0)=g(x), \\ u(0, t)=0, \\ u(l, t)=0. \end{cases} \qquad (12.6)$$

Жан Батист Жозеф Фурье (1768—1830) не был кабинетным ученым. Он взлетел на гребне Великой французской революции 1789 г. и из сына провинциального портного, готовившегося принять монашеский постриг, превратился в друга императора Наполеона. В 1798 г. Фурье участвовал в египетском походе Наполеона, где его жизнь не раз подвергалась опасностям. По возвращении из Египта Фурье занимался административной деятельностью, но находил время и для математических исследований. В 1807 г. он написал свою бессмертную работу «Математическая теория тепла». Главный математический результат Фурье можно описать так: при некоторых ограничениях всякую функцию $f(x)$ можно представить в виде ряда (бесконечной суммы чисел или функций), называемого ныне рядом Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Фурье также разработал метод решения уравнений типа (12.1), называемый методом разделения переменных Фурье.

Идея метода Фурье гениально проста. Решение уравнения (12.1) ищется в виде произведения двух функций $X(x)$ и $T(t)$, каждая из которых зависит только от одной, «своей» переменной:

$$u(x, t)=X(x)\,T(t). \qquad (12.7)$$

Замена (12.7) расщепляет уравнение (12.1) на два дифференциальных уравнения в обыкновенных «школьных» призводных:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2T}{dt^2}-a^2\lambda T=0, \\ &\frac{d^2X}{dx^2}-\lambda X=0, \end{aligned} \qquad (12.8)$$

где λ — неизвестный вспомогательный параметр. Решая уравнения (12.8) и удовлетворяя начальным и граничным условиям (12.6) (разумеется, мы опускаем все промежуточные выкладки, которых здесь, как и при выводе формулы Д'Аламбера (12.5), хватит на несколько страниц), находят окончательное решение задачи (12.6) о колебании конечной струны:

$$\begin{aligned} &u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x, t), \\ &u_n(x, t)=\sin\frac{n\pi x}{l}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right), \\ &a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \\ &b_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \end{aligned} \qquad (12.9)$$

Выясним физический смысл решения (12.9), и прежде всего функций $u_n(x, t)$, составляющих это решение. Для этого выполним искусственное преобразование:

$$a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\times$$

$$\times\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin\frac{n\pi at}{l}\right)=$$

$$=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\sin\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\cos\varphi_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)=$$

$$=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,\sin\left(\frac{n\pi at}{l}+\varphi_n\right).$$

(Здесь мы воспользовались формулой синуса суммы двух аргументов и тем, что

$\sin^2\varphi_n+\cos^2\varphi_n=\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\right)^2+\left(\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\right)^2=1$; ясно также, что $\operatorname{tg}\varphi_n=a_n/b_n$.) Таким образом, $u_n(x,\ t)$ можно представить в виде

$$u_n(x,\ t)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ \sin\frac{n\pi}{l}\ x\cdot\sin\left(\frac{n\pi a}{l}\ t+\varphi_n\right),$$

или

$$u_n(x,\ t)=A_n(x)\sin\left(\frac{n\pi a}{l}\ t+\varphi_n\right),$$

$$A_n(x)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ \sin\frac{n\pi}{l}\ x. \qquad (12.10)$$

Из формулы (12.10) видно, что каждое решение u_n представляет собой гармоническое колебание (т. е. колебание по закону синуса) с одной и той же частотой $\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$ и фазой φ_n. Амплитуда же колебаний $A_n(x)$ для разных точек струны разная, т. е. зависит от координаты точек струны x. Из (12.10) видно, что при $x=0$ и $x=l$ $A_n(0)=A_n(l)=0$, т. е. на концах струна неподвижна.

Итак, колебания струны во времени происходят с постоянной частотой ω_n, амплитуда колебания для каждой точки струны своя. При этом все точки струны одновременно достигают своего максимального отклонения в ту или другую сторону и одновременно проходят положения равновесия. Такие колебания называют *стоячими волнами*.

Пользуясь выражением для амплитуды стоячей волны (12.10) и учитывая, что $0\leqslant x\leqslant l$, найдем неподвижные точки стоячих волн:

$n=1$: $\sin\frac{\pi}{l}x=0\Rightarrow x=0,\ x=l$;

$n=2$: $\sin\frac{2\pi}{l}x=0\Rightarrow x=0,\ x=\frac{l}{2},\ x=l$;

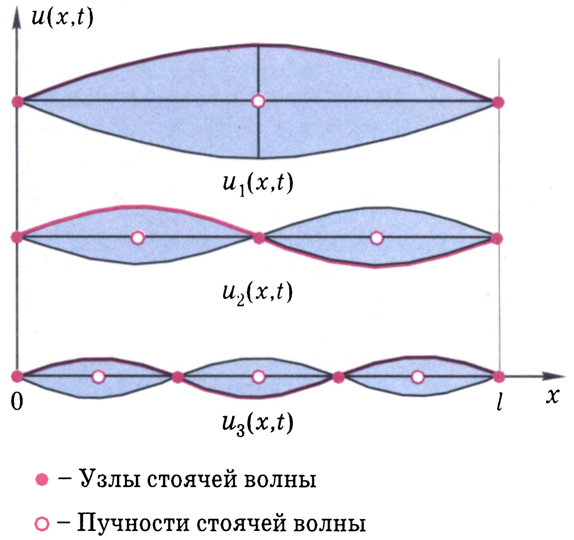
$n=3$: $\sin\frac{3\pi}{l}x=0\Rightarrow x=0,\ x=\frac{l}{3},\ x=\frac{2l}{3},\ x=l$;

. . . .

$n=k$: $\sin\frac{k\pi}{l}x=0\Rightarrow x=0,\ x=\frac{l}{k},\ x=\frac{2l}{k}\ \ldots,\ x=l$.

Неподвижные точки называются *узлами* стоячей волны. Ясно, что посередине между узлами расположены точки, в которых отклонения в стоячей волне достигают максимума. Эти точки называются *пучностями* стоячей волны.

Сделаем общий вывод: колебание конечной струны представляет собой бесконечную сумму стоячих волн $u_n(x,t)$, каждая из которых имеет постоянную частоту колебания $\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$ и изменяющуюся по длине струны амплитуду $A_n(x)\sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin\frac{n\pi}{l}x$. В k-й стоячей волне имеется k пучностей и $(k+1)$ узлов.



Три первые стоячие волны (гармоники) колеблющейся струны. Колебания конечной струны $u(x,\ t)$ представимы в виде суммы бесконечного числа стоячих волн $u_n(x,\ t)$.

Перейдем теперь к «музыкальному содержанию» решения (12.9), и прежде всего к частотам колебаний. Мы пришли к выводу, что струна колеблется не только всей своей длиной, но одновременно и отдельными частями: половинками, третями, четвертями и т. д. Следовательно, струна издает звук не только основной частоты $\omega_1=\frac{\pi a}{l}$, но и призвуки частот $\omega_2=\frac{2\pi a}{l}$, $\omega_3=\frac{3\pi a}{l}$, ..., $\omega_k=\frac{k\pi a}{l}$. Тон основной частоты струны ω_1 называется *основным тоном струны*, а остальные тона, соответствующие частотам ω_2, ω_3, ..., ω_k, ..., называются *обертонами* (верхними тонами) или *гармониками*. Основной тон струны принимается за первый обертон (первую гармонику). Именно обертоны, сливаясь в общем звучании с основным тоном, придают звуку музыкальную окраску, называемую *тембром*.

Различие тембров музыкальных звуков в основном объясняется составом и интенсивностью обертонов у разных источников звуков. Чем больше у звука обертонов, тем красивее, «богаче» он нам кажется. По тембру, т. е. по составу обертонов, мы отличаем звуки одной и той же высоты и одинаковой громкости, воспроизведенные на скрипке или фортепиано, голосом или на флейте. Разумеется, и сам инструмент способен давать различные тембровые окраски, что прежде всего относится к скрипке.

У скрипачей есть особый способ необычного по тембру звукоизвлечения — игра флажолетами. Слегка дотрагиваясь пальцем до струны в узлах стоячих волн, но так, чтобы струна не соприкасалась с грифом, скрипач гасит одни обертоны и оставляет другие. В результате возникает мягкий, немного свистящий звук, напоминающий по тембру звучание старинного деревянного духового инструмента — флажолета. Например, дотронувшись до струны точно посередине, скрипач гасит все гармоники, имеющие в этой точке пучности, и сохраняет только гармоники, имеющие в этой точке узлы, т. е. четные гармоники. Таким образом, самой низкой частотой станет второй обертон $\omega_2 = \frac{2\pi a}{l}$. Но это не будет по тембру звук точно на октаву выше основного тона $\omega_1 = \frac{\pi a}{l}$, так как он будет составлен только из четных гармоник. Аналогично, дотронувшись до струны в точке $l/3$, скрипач оставит только гармоники, кратные трем: ω_3, ω_6, ..., и получит флажолет, не похожий на первый, даже если сделать $\omega_2 = \omega_3$. Игра флажолетами требует виртуозной точности. Ведь если мы не попадем точно в узел, то погасим вообще все гармоники и струна попросту не зазвучит!

Вот какую огромную роль играют в музыке слагаемые $u_n(x, t)$ в решении (12.9). Их с полным правом называют звуковой краской музыканта. Но не только музыканты, а и создатели музыкальных инструментов проявляют постоянную заботу об этих слагаемых, от которых зависит тембр звука. Достаточно напомнить об особом «итальянском тембре» скрипок работ знаменитых итальянских мастеров XVI—XVIII в., представителей нескольких поколений семей Амати, Гварнери, Страдивари.

Из решения (12.9), задавая нужным образом функции $f(x)$ и $g(x)$ и вычисляя интегралы, можно формально получить законы, которые экспериментально обнаружил английский ученый-энциклопедист Томас Юнг (1773—1829):

1. Если возбуждать струну в какой-либо точке, то в этой точке возникает пучность и не может образоваться узел.

2. Если затормозить струну в какой-либо точке, то в этой точке возникает узел и не может образоваться пучность.

Из первого закона Юнга следует, что если возбуждать струну, например, точно посередине, то в ней погасятся все гармоники, имеющие в этой точке узел, т. е. все четные обертоны. Значит, мы потеряем половину обертонов и звук станет блеклым. Ясно, что, чем дальше от середины мы будем возбуждать струну, тем меньше первых, самых важных гармоник мы потеряем. Тембр звука от этого станет полнее и ярче. Вот почему смычок на скрипке, правая рука на гитаре, молоточки на фортепиано — все они возбуждают струну приблизительно на 1/7—1/10 доли струны от места ее закрепления. Делается это для того, чтобы не потревожить первые обертоны, а значит, не обеднить музыкальный звук. Что касается игры на скрипке флажолетами, то она основана на втором законе Юнга, который является обратным первому закону.

Прежде чем расстаться с законами Юнга, скажем несколько слов об их создателе. Томас Юнг был удивительным человеком. «Всякий может делать то, что делают другие» — таков был девиз его жизни. И Юнг необычайно преуспел в исполнении этого нелегкого правила. Он был цирковым актером (акробатом и канатоходцем), авторитетным знатоком живописи, играл практически на всех существовавших в его время музыкальных инструментах, занимался расшифровкой египетских иероглифов, знал массу языков, в том числе латинский, греческий и арабский. И кроме всех этих «увлечений», Юнг получил блестящие результаты в науках: физике (волновая теория света), теории упругости (модуль упругости Юнга), оптике, акустике, астрономии, физиологии, медицине. Юнг написал около 60 глав научных приложений к знаменитой «Британской энциклопедии».

Рассмотрим подробнее основной тон струны. Вспоминая, что $a=\sqrt{T/\rho}$, получим формулу для частоты основного тона:

$$\omega_1=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \qquad (12.11)$$

откуда легко увидеть законы колебания струны, которые экспериментально обнаружили еще древние греки и которые затем переоткрыл и описал в своей «Универсальной гармонии» Марен Мерсенн:

1. Для струн одинаковой плотности и одинакового натяжения частота колебания обратно пропорциональна длине струны (это не что иное, как «первый закон Пифагора — Архита»; см. с. 127).
2. При заданной длине и плотности струны ее частота пропорциональна корню квадратному из натяжения.
3. При заданной длине и натяжении частота струны обратно пропорциональна корню квадратному из ее плотности. (При постоянной плотности чем толще струна, тем меньше частота ее колебаний, т. е. тем ниже звук.)

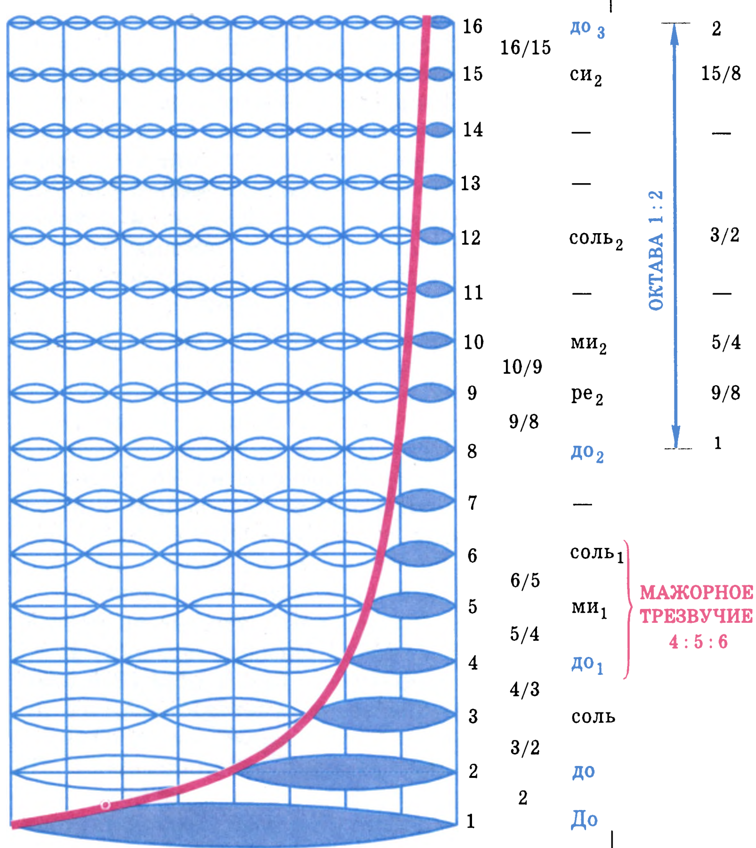
Разумеется, все эти законы (по крайней мере, качественно) можно было установить на монохорде.

Но обратимся вновь к обертонам. Легко видеть, что частоты обертонов $\omega_1=\frac{\pi a}{l}$, $\omega_2=\frac{2\pi a}{l}$, ..., $\omega_k=\frac{k\pi a}{l}$, ... относятся как числа натурального ряда:

$$\omega_1:\omega_2:\ldots:\omega_k\ldots=1:2:\ldots:k\ \ldots\ . \qquad (12.12)$$

Таким образом, струна издает целый звукоряд тонов, называемый *натуральным звукорядом.* Теоретически натуральный звукоряд бесконечен. На практике же имеют значение первые 16 обертонов, так как остальные обертоны слишком мало отличаются друг от друга, обладают слишком малой энергией и фактически не слышны. В самом деле, из (12.12) следует, что интервальный коэффициент двух соседних гармоник ω_n и ω_{n+1} равен $\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}=\frac{n+1}{n}$ ($n=1, 2, 3, \ldots$). Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, то мы легко приходим к выводу: с ростом номера n интервал между соседними гармониками натурального звукоряда уменьшается и в пределе стремится к чистой приме (унисону).

На рисунке показаны первые 16 гармоник колеблющейся струны, образующие натуральный звукоряд. Цифры справа обозначают частоты гармоник, считая $\omega_1=1$, а красная линия (гипербола) отсекает часть струны $1/n$, которая колеблется с частотой $\omega_n=n$. Мы видим, что второй обертон и основной тон составляют интервал октавы $\omega_2:\omega_1=2$. Третий и второй обертоны — интервал квинты: $\omega_3:\omega_2=3:2$. Четвертый и третий — кварты: $\omega_4:\omega_3=4:3$. Пятый и четвертый — большой терции: $\omega_5:\omega_4=5:4$. Шестой и пятый — малой терции: $\omega_6:\omega_5=6:5$. Но ведь это есть не что иное, как



Натуральный звукоряд. Полагая $\omega_1=1$, частоты натурального звукоряда выражаются натуральным рядом чисел ($\omega_n=n$). Натуральный звукоряд содержит все консонансы и все интервалы чистого строя.

набор совершенных и несовершенных консонансов! Таким образом, мы пришли к разгадке «закона консонансов»— «второго закона Пифагора — Архита» (с. 127—128): консонантные интервалы, которые математически выражаются отношением вида $\frac{n+1}{n}$ (n=1, 2, 3, 4, 5), определены самой природой колебания струны! Все консонансы заключены в первых шести гармониках, т. е. первых шести тонах натурального звукоряда, причем по мере удаления от первой гармоники (основного тона) степень консонантности интервала убывает. Итак, *закон целочисленных отношений для консонантных интервалов* $\frac{n+1}{n}$, *который, по преданию, был экспериментально открыт Пифагором на монохорде, является следствием математического решения задачи о колебании струны и непосредственно вытекает из решения* (12.9).

Переходя к более высоким гармоникам, нетрудно обнаружить также два интервала тона чистого строя: $\omega_9 : \omega_8 = 9 : 8$, $\omega_{10} : \omega_9 = 10 : 9$ и интервал полутона чистого строя: $\omega_{16} : \omega_{15} = 16 : 15$. Таким образом, *все интервалы чистого строя содержатся в натуральном звукоряде!* Вот почему чистый строй более приятен в гармоническом звучании, чем пифагоров строй.

Но и сами тона чистого строя (10.7) почти полностью определены натуральным звукорядом. В самом деле, если рассмотреть октаву между 8-й и 16-й гармониками, принимая частоту 8-й гармоники за единицу (т. е. поделив все частоты на 8), то мы обнаружим в этой октаве все ступени чистого строя, кроме 4-й (4/3) и 6-й (5/3). Следовательно, *чистый строй почти целиком содержится в натуральном звукоряде.*

Однако это коварное «почти» до сих пор составляет одну из загадок музыки. В самом деле, почему именно 7, 11 и 13-й обертоны (14-й обертон является октавным повторением 7-го) не входят ни в один из музыкальных строев? «Фальшивый» 7-й обертон третье столетие не дает покоя теоретикам музыки! С одной стороны, ясно, что неправильно называть этот звук фальшивым, ибо он дан самой природой, которую трудно упрекнуть в фальши. Но с другой стороны, все теоретики музыки, начиная с Рамо, были слишком большими музыкантами, чтобы включить седьмую гармонику в какую-либо музыкальную систему (седьмой звук явно «резал ухо»). Еще в XVIII в. французский музыкальный теоретик Балльер с присущей французу легкостью писал: «Разница между древностью и современностью заключается в том, что тогда начинали считать диссонансы с 5-го призвука, а теперь начинают их считать лишь с 7-го». Не пойдет ли развитие музыки так, что в новых музыкальных системах найдется место и 7, и 11, и 13-му обертонам?.. А пока молоточки фортепиано, следуя первому закону Юнга, ударяют на 1/8 длины струны, чтобы максимально снизить силу злополучного 7-го обертона.

Наконец, отметим еще одну важную особенность натурального звукоряда. Глядя на рисунок, мы видим, что 4, 5 и 6-я гармоники образуют мажорное трезвучие (ДО-МИ-СОЛЬ). А если к ним добавить еще и 1-ю, и 2-ю гармоники, то получится мажорное трезвучие в сопровождении октавного баса! Итак, *мажорное трезвучие составлено из ближайших гармоник (4, 5 и 6-й) основного тона (баса мажорного трезвучия).* Значит, оно не только консонирует, но и обладает акустическим единством, заложенным в самой природе колебания струны. Это дало основание одному из последних универсальных ученых — немецкому математику, физику, физиологу и психологу Герману Гельмгольцу (1821—1894) утверждать, что «мажорный аккорд наиболее натурален из всех аккордов».

Ну а минорное трезвучие? Споры о природе минора не затихают и по сей день. В них участвовали Рамо, Д'Аламбер, Руссо, Гёте, Гельмгольц, многие наши современники. На сегодня мнения сходятся в том, что поскольку в минорном трезвучии (ДО—МИ-бемоль — СОЛЬ) второй звук (МИ-бемоль) лежит на полутон ниже пятой гармоники основного тона, то он образует с ней едва слышимый диссонанс, который и обусловливает некоторую «затененность», «нечто мрачное и неясное, необъяснимое для слушателя» (Гельмгольц). По этой причине в музыке Баха, Генделя, Моцарта минорные произведения часто заканчиваются мажорным — наиболее натуральным, просветленным — аккордом.

Итак, в мажорной гамме третья ступень как бы тяготеет вверх, тогда как в минорной она тяготеет вниз. Движение же вверх воспринимается нами как восхождение к свету, просветление, радость. Напротив, движение вниз ассоциируется со спуском в темноту, затемнением, печалью. Эти объективные предпосылки поддерживаются, кроме того, определенной традицией применения мажора и минора. В тех же случаях, когда эти традиции нарушаются, мы встречаем разудалую песню «Яблочко», написанную в миноре, и молитву «*Ave Maria*», которую, несмотря на ее название — «Радуйся, Мария» — и мажорный лад, никак не назовешь веселой.

В заключение остановимся еще на одной проблеме колеблющейся струны. До сих пор, следуя решению (12.9), мы пытались «разъять, как труп» колебания струны на простейшие гармонические составляющие. Но ведь на самом деле, опять же согласно (12.9), составляющие колебания струны гармоники складываются, образуя сложную картину колебаний. Характер этой картины зависит прежде всего от амплитуд гармоник. Решить эту задачу в общем виде не просто, поэтому остановимся на более простой задаче.

Пусть складываются два колебания постоянной и одинаковой амплитуды, равной для простоты единице, и разных частот $\omega_1<\omega_2$:

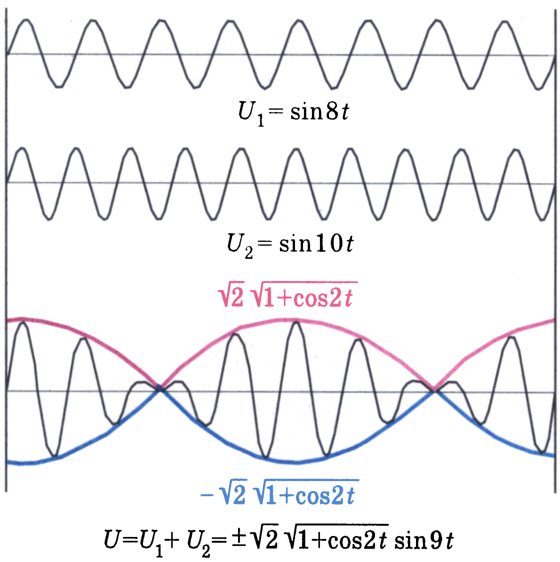
$$U_1=\sin \omega_1 t,$$
$$U_2=\sin \omega_2 t.$$

Суммарное колебание, пользуясь формулами суммы синусов и косинуса половинного угла, представим в виде

$$U=U_1+U_2=\sin \omega_1 t+\sin \omega_2 t=$$
$$=2\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\,t\,\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t=$$
$$=\pm\sqrt{2}\,\sqrt{1+\cos\,(\omega_2-\omega_1)\,t}\,\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t. \quad (12.13)$$

Равенство (12.13), когда частоты ω_1 и ω_2 близки друг к другу с достаточной степенью точности, можно трактовать следующим образом: сумма двух гармонических колебаний частот ω_1 и ω_2 является «почти гармоническим» колебанием, частота которого есть среднее арифметическое данных частот $\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, а амплитуда изменяется во времени с частотой ω_2—ω_1 и ограничена сверху функцией $\sqrt{2}\,\sqrt{1+\cos\,(\omega_2-\omega_1)\,t}$, а снизу — функцией $-\sqrt{2}\,\sqrt{1+\cos\,(\omega_2-\omega_1)\,t}$. Легко видеть, что амплитуда суммарного колебания пульсирует с частотой $\omega_2-\omega_1$ от нуля до максимального значения и затем снова до нуля. Такие колебания называют *биениями*. Из (12.13) видно, что максимальная амплитуда биений вдвое больше амплитуд составляющих колебаний. Итак, при сложении двух близких по частоте колебаний возникают биения, т. е. почти гармонические колебания с частотой, равной средней частоте данных колебаний, и амплитудой, пульсирующей с частотой биений, которая равна разности частот данных колебаний. Издаваемый при биениях звук то периодически усиливается, то замирает.

Перейдем к музыкальной стороне явления биений. Известно, что всякое прерывистое раздражение нервов воспринимается сильнее, чем постоянное. Однако с увеличением частоты раздражений нерв не успевает следить за изменениями, отдельные раздражения сливаются между собой и становятся незаметными. Экспериментально установлено, что наиболее отчетливо слышны биения с частотой 4—5 Гц (колебаний в секунду). Биения с частотой около 15 Гц еще различимы, а при частоте



При сложении двух колебаний, близких по частоте ($\omega_1=8$ и $\omega_2=10$), возникают биения — периодическое усиление и ослабление звука, происходящее с частотой биений $\omega=\omega_2-\omega_1=2$.

около 30 Гц они начинают сливаться, но создают неприятное ощущение хрипловатости звучания.

Существует теория Гельмгольца, которая объясняет явления консонанса и диссонанса биениями, возникающими между гармониками двух звучащих основных тонов. Согласно теории Гельмгольца, от наличия биений, их частоты и громкости (амплитуды) зависит степень консонантности и диссонантности интервала. Поясним эту теорию на примере. В таблице 2 в качестве основного тона взяты нота ДО малой октавы, частота которой равна 131 Гц, и ее пять обертонов. Далее приведены первые пять обертонов для звуков ДО, СОЛЬ, ФА, МИ (чистого строя), МИ (пифагорова строя) и ДО-диез (чистого строя), которые образуют с основным тоном ДО соответственно интервалы октавы, квинты, кварты, большой терции, пифагоровой терции и малой секунды.

ТАБЛИЦА 2. Основные гармоники ноты *до* малой октавы и нот, образующих с *до* важнейшие интервалы

Нота	Номер гармоники					Интервал	Интервальный коэффициент
	1	2	3	4	5		
ДО	131	262	393	524	655	Прима	(1)
$ДО_1$	262	524	786	1048	1310	Октава	(2)
СОЛЬ	196,5	393	598,5	786	982,5	Квинта	(3/2)
ФА	174,6	349,2	524	698,4	873	Кварта	(4/3)
$МИ_1$	163,7	327,4	491	655	818,5	Б. терция	(5/4)
МИ	165,8	331,6	497,4	663,2	829	Пифаг. терция	(81/64)
ДО-*диез*	140	280	420	560	700	М. секунда	(16/15)

Понятно, что для октавы совпадают частоты гармоник, номера которых относятся как 2 : 1, для квинты — как 3 : 2 и т. д. (см. табл. 2). Сравнивая частоты первых гармоник, мы видим, что, чем меньше становится интервал, тем ближе частоты основных тонов, тем различимее будут биения и, следовательно, тем меньше будет степень консонантности интервала. Поэтому самым консонантным интервалом является октава, затем идут квинта и кварта. Все три этих интервала не дают биений и относятся к совершенным консонансам. Терция дает в первых гармониках чуть более 30 биений, т. е. на пороге различимости, и поэтому относится к несовершенным консонансам. А вот малая секунда дает 9 биений (140–131=9) и поэтому является явным диссонансом. Заметим, что четвертая гармоника пифагоровой терции (663,2) и пятая гармоника основного тона (655) дают 8 биений (663–655=8). Эти биения и создают неприятное гармоническое зучание пифагоровой терции. Однако поскольку они происходят в старших гармониках, т. е. значительно слабее биений в первых гармониках, то ясно, что пифагорову терцию нельзя причислить к диссонансу наравне с малой секундой, где такие же биения происходят в первых гармониках.

Мы выполнили обещание, данное на с. 153, и объяснили, почему пифагорова терция в гармоническом исполнении звучит напряженно по сравнению с чистой. Конечно, теория Гельмгольца не решает всех музыкальных загадок колеблющейся струны — таких, как проблема 7-го обертона, например,— и здесь еще остается немало точек приложения для пытливого ума.

Не правда ли, какое удивительное разнообразие законов, свойств и загадок таит в себе простое колебание простой струны! Законы Пифагора — Архита (особенно закон консонансов), законы Мерсенна и законы Юнга, решения Д'Аламбера, Д. Бернулли и Фурье, натуральный звукоряд и мажорное трезвучие, биения... Вот уже третье тысячелетие обыкновенная струна открывает человечеству свои необыкновенные тайны! И быть может, кто-то задумается еще раз об этих тайнах, прежде чем ударить по струнам старенькой гитары.

13. ПРОПОРЦИИ МУЗЫКАЛЬНОЙ ГАММЫ

Пройдут миллионы лет, и если музыка в нашем смысле будет еще существовать, то те же семь основных тонов нашей гаммы, в их мелодических и гармонических комбинациях, оживляемые ритмом, будут все еще служить источником новых музыкальных мыслей.

П. ЧАЙКОВСКИЙ

Если окинуть взглядом 2500 лет истории европейской музыки, от Пифагора и до наших дней, то слова П. И. Чайковского, вынесенные в эпиграф, обретают особый смысл. В самом деле, каких только переворотов в мировоззрении, сознании и бытии человечества не произошло за это время! Но основа музыки — музыкальная гамма — остается практически неизменной.

В чем причина такого завидного долголетия музыкальной гаммы? Почему из всего обилия звуков с частотой от 16 до 20 000 Гц, которые способно воспринимать наше ухо (в области до 4000 Гц мы различаем звуки, отстоящие друг от друга по частоте всего на одно колебание в секунду, т. е. почти 4000 звуков!), в музыке используется всего 7 октав по 12 звуков, т. е. всего 84 звука[1]?

Объяснить, почему музыкальный звукоряд содержит именно 7 октав, нетрудно. В самом деле, возьмем самую нижнюю ноту звукоряда — ЛЯ субконтроктавы,— частота которой равна 27,5 Гц, т. е. находится у нижней границы слышимости звуков. (Подходить ближе к границе слышимости не стоит, так как у каждого человека она своя и, значит, некоторые люди не услышат более низкие звуки.) Рассмотрим 8 октавных повторений этой ноты:

27,5 55 110 220 440[2] 880 1760
3520 7040

Легко видеть, что восьмая октава выходит далеко за границу четкой различимости высоких звуков (4000 Гц), и, таким образом, в диапазоне до 4000 Гц укладывается чуть более 7 октав. Выходить же за границу 4000 Гц нет смысла, так как звуки там плохо различаются по высоте и мелодия будет теряться.

Итак, в диапазоне от 16 до 4000 Гц укладывается чуть более 7 октав. Октавные звуки воспринимаются как подобные, родственные (это объясняется, как мы уже знаем, совпадением большого числа их гармоник) и служат своего рода масштабными метками в музыкальной шкале. Следовательно, построение музыкальной шкалы сводится к искусному делению октавы на составные части.

Почему октава разделена именно на 12 частей, мы уже объяснили в предыдущей главе. Как показала история развития музыки, только при таком делении октавы достигается та «строгая соразмеренная гар-

---

[1] Для педантов уточним, что концертный рояль имеет до 90 клавиш (звуков).

[2] Частота ноты ЛЯ первой октавы — 440 Гц — является эталонной при настройке фортепиано и проверяется по камертону. Относительно этой ноты сохранилось интересное предание: в Древнем Египте около города Фивы находилась огромная статуя эфиопского царя Мемнона. Статуя была повреждена во время землетрясения и каждое утро на рассвете якобы издавала звук ЛЯ, который считался голосом Мемнона. Фивские музыканты приходили к статуе настраивать свои инструменты. К сожалению, в начале нашей эры голос Мемнона звучать перестал и проверить правоту предания невозможно.

мония всех частей, объединяемых тем, чему они принадлежат,— такая, что ни прибавить, ни убавить, ни изменить ничего нельзя, не сделав хуже». Эти слова, как мы знаем, являются определением красоты по Альберти. Красота же вечна. Таким образом, именно в пропорциональном делении октавы на составные части и заключается источник красоты музыкальной гаммы, а значит, и секрет ее трехтысячелетнего долголетия.

Мы уже отмечали некоторые пропорции музыкальной гаммы. Мы также знаем, что пропорциональность и симметрия являются объективными признаками красоты. Однако чем ближе всматриваешься в музыкальную гамму, тем полнее раскрываются все новые закономерности ее пропорционального строения, а значит, и объективные законы ее красоты. Остановимся подробнее на некоторых из этих закономерностей.

Рассмотрим вначале равномерно-темперированную 12-ступенную хроматическую гамму (11.1), имеющую наиболее простое строение:

ДО		РЕ		МИ	ФА		СОЛЬ		ЛЯ		СИ	ДО_1
$1=2^{\frac{0}{12}}$	$2^{\frac{1}{12}}$	$2^{\frac{2}{12}}$	$2^{\frac{3}{12}}$	$2^{\frac{4}{12}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{6}{12}}=\sqrt{2}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{8}{12}}$	$2^{\frac{9}{12}}$	$2^{\frac{10}{12}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	$2^{\frac{12}{12}}=2$
b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}

(13.1)

Легко видеть, что ступени равномерно-темперированной гаммы (13.1) образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\sqrt[12]{2}$. Тогда

$$\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{b_k}{b_{k-1}}=\sqrt[12]{2},$$

или

$$b_k=\sqrt{b_{k-1}\cdot b_{k+1}}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 11). \qquad (13.2)$$

Следовательно, каждая внутренняя ступень гаммы (13.1) является средним геометрическим своих соседей. Назовем это *локальной геометрической симметрией* с коэффициентом симметрии (отношением входящих в пропорцию членов) $\sqrt[12]{2}$.

Кроме того, гамма (13.1) обладает *глобальной геометрической симметрией*, т. е. произведения членов (13.1), равноудаленных от концов, равны квадрату среднего члена b_6:

$$1\cdot 2=2^{\frac{1}{12}}\cdot 2^{\frac{11}{12}}=2^{\frac{2}{12}}\cdot 2^{\frac{10}{12}}=\ldots=$$

$$=2^{\frac{5}{12}}\cdot 2^{\frac{7}{12}}=(\sqrt{2})^2,$$

или $b_n\cdot b_{12-n}=b_6^2=(\sqrt{2})^2$ $(n=0,\ 1;\ 2,\ \ldots,\ 5)$, откуда имеем

$$\frac{b_{12-n}}{b_6}=\frac{b_6}{b_n},$$

или

$$b_6=\sqrt{b_n\cdot b_{12-n}}=\sqrt{2}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 5). \qquad (13.3)$$

Таким образом, седьмая ступень (13.1) $b_6=\sqrt{2}$, так называемый *тритон*, равный увеличенной кварте или уменьшенной квинте, является средним геометрическим любой пары равноудаленных от концов ступеней. Назовем тритон $b_6=\sqrt{2}$ *центром глобальной геометрической симметрии гаммы* (13.1). Глобальная геометрическая симметрия связывает интервал и его обращение через интервальный коэффициент октавы.

Из равенств (13.1—13.3) очевидно, что при любых сдвигах структура равномерно-темперированной гаммы не нарушается, т. е. равномерно-темперированная гамма допускает модуляции в любые тональности. Эти возможности равномерной темперации блестяще проиллюстрировал И. С. Бах в своем «Хорошо темперированном клавире».

Рассмотрим лидийскую гамму пифагорова строя, или натуральный мажор (10.1), взяв в качестве дополнительных ступеней пониженные звуки (РЕ-бемоль, МИ-бемоль, СОЛЬ-бемоль, ЛЯ-бемоль, СИ-бемоль) и один повышенный звук (ФА-диез) согласно (10.2):

ДО		РЕ		МИ	ФА		$\sqrt{2}$		СОЛЬ		ЛЯ		СИ	ДО$_1$
1	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\cdot 2^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\cdot 2^{-1}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\cdot 2^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{4}\cdot 2^{-2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot 2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-6}\cdot 2^4$		$\left(\frac{3}{2}\right)^{6}\cdot 2^{-3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}\cdot 2^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\cdot 2^{-1}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot 2^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{5}\cdot 2^{-2}$	2
b_0	a_0	b_1	a_1	b_2	a_2	c_0		b_3	a_3	c_1	a_4	c_2	a_5	c_3

(13.4)

Структура пифагоровой гаммы (13.4) значительно сложнее. Однако при ближайшем рассмотрении можно обнаружить, что пифагорова гамма состоит из трех геометрических прогрессий, переплетенных между собой, подобно платонову гептахорду (9.1), причем все три прогрессии имеют одинаковый знаменатель $q=\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 2^{-1}$:

$$\div a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5: a_0=\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\cdot 2^3,\quad a_k=a_0q^k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5);$$

$$\div b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3: \qquad b_0=1, \qquad b_k=b_0q^k\ (k=1,\ 2,\ 3);$$

$$\div c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3: \qquad c_0=\left(\frac{3}{2}\right)^{-6}\cdot 2^4,\quad c_k=c_0q^k\,(k=1,\ 2,\ 3).$$

Для этих прогрессий справедливы соотношения

$$b_0c_3=b_1c_2=b_2c_1=b_3c_0=2,$$
$$a_0a_5=a_1a_4=a_2a_3=2.$$

Учитывая расположение членов прогрессии в (13.4), приходим к выводу, что пифагорова гамма также обладает глобальной геометрической симметрией. Следовательно, $\sqrt{2}$ является центром глобальной симметрии пифагоровой гаммы.

Но $\sqrt{2}$ не является ступенью гаммы (13.4). Кроме того, в (13.4) осталась одна пара энгармонически неравных звуков СОЛЬ-бемоль и ФА-диез. Если в качестве энгармонически равного звука для СОЛЬ-бемоль $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-6}\cdot 2^4\right)$ и ФА-диез $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{6}\cdot 2^{-3}\right)$ взять их среднее геометрическое $d=$ $=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{-6}\cdot 2^4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{6}\cdot 2^{-3}}=\sqrt{2}$, то оно оказывается в точности равным центру глобальной симметрии $\sqrt{2}$. Таким образом, мы получим 12-ступенную хроматическую пифагорову гамму с центром глобальной симметрии $\sqrt{2}$ на седьмой ступени:

ДО		РЕ		МИ	ФА		СОЛЬ		ЛЯ		СИ	ДО$_1$
1	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{243}{128}$	2

(13.5)

Легко проверить, что в гамме (13.5) можно взять чистые квинты на всех ступенях, кроме седьмой ($\sqrt{2}$), которая даст «волчью» квинту. Кроме того, сам интервал тритона ($\sqrt{2}$), как мы знаем, является резким диссонансом. Оба этих качества составили тритону печальную славу. В средние века тритон называли «дьяволом в музыке», и до XVI в. употреблять его в церковных песнопениях строго запрещалось.

Рассмотрим теперь диатоническую 7-ступенную гамму чистого строя (10.7):

$$1 \ \frac{9}{8} \ \frac{5}{4} \ \frac{4}{3} \ \frac{3}{2} \ \frac{5}{3} \ \frac{15}{8} \ 2. \qquad (13.6)$$

Мы знаем, что гамма чистого строя является наиболее благозвучной, а ее интервальные коэффициенты имеют самый простой вид. Но еще удивительнее то, что гамма (13.6) является и самой пропорциональной. В самом деле, среднее арифметическое и среднее гармоническое основного тона (1) и октавы (2) дают нам квинту и кварту:

$$\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}, \quad \frac{2\cdot 1\cdot 2}{1+2}=\frac{4}{3}.$$

Среднее арифметическое и среднее гармоническое основного тона и квинты образуют большую и малую терции:

$$\frac{1+3/2}{2}=\frac{5}{4}, \quad \frac{2\cdot 1\cdot 3/2}{1+3/2}=\frac{6}{5}.$$

Наконец, взяв среднее арифметическое и среднее гармоническое основного тона и большой терции, мы получим оба интервала тона чистого строя:

$$\frac{1+5/4}{2}=\frac{9}{8}, \quad \frac{2\cdot 1\cdot 5/4}{1+5/4}=\frac{10}{9}.$$

Таким образом, все главные интервалы чистого строя получаются как последовательная цепь средних пропорциональных, началом которой является пропорциональное деление октавы на квинту и кварту.

Перейдем к хроматической гамме чистого строя. Для построения дополнительных ступеней хроматической гаммы отложим полутон чистого строя $\left(\frac{16}{15}\right)$ вверх от 1, 2, 4, 5 и 6-й ступеней диатонической гаммы (13.6), т. е. умножим их интервальные коэффициенты на $\frac{16}{15}$, а также из соображений симметрии отложим полутон вниз от 5-й ступени. В результате получим 13-ступенную гамму:

$$1 \ \frac{16}{15} \ \frac{9}{8} \ \frac{6}{5} \ \frac{5}{4} \ \frac{4}{3} \ \frac{45}{32} \ \frac{64}{45} \ \frac{3}{2} \ \frac{8}{5} \ \frac{5}{3} \ \frac{16}{9} \ \frac{15}{8} \ 2.$$

Интервальные коэффициенты $\frac{45}{32}$ и $\frac{64}{45}$ можно заменить на более простые $\frac{7}{5}$ и $\frac{10}{7}$, которые приближенно им равны $\left(\frac{45}{32}=\frac{225}{160}\approx\frac{7}{5}=\frac{224}{160};\ \frac{64}{45}=\frac{448}{315}\approx\frac{10}{7}=\frac{450}{315}\right)$ и также обладают геометрической симметрией относительно $\sqrt{2}$ $\left(\frac{45}{32}\cdot\frac{64}{45}=\frac{7}{5}\cdot\frac{10}{7}=(\sqrt{2})^2\right)$. В результате входящие в хроматическую гамму чистого строя интервальные коэффициенты выразятся с помощью отношения натуральных чисел, не превосходящих 16, которые можно трактовать как частоты первых 16 гармоник основного тона (1), или первые 16 ступеней натурального звукоряда:

ДО РЕ МИ ФА СОЛЬ ЛЯ СИ ДО$_1$

$$1 \ \frac{16}{15} \ \frac{9}{8} \ \frac{6}{5} \ \frac{5}{4} \ \frac{4}{3} \ \frac{7}{5} \ \frac{10}{7} \ \frac{3}{2} \ \frac{8}{5} \ \frac{5}{3} \ \frac{16}{9} \ \frac{15}{8} \ 2 \qquad (13.7)$$

Заметим, что, как и в диатонической гамме (13.6), интервальные коэффициенты хроматической гаммы (13.7) не содержат 11-й и 13-й обертоны, а печально известный «фальшивый» 7-й обертон входит только в два коэффициента ($\frac{7}{5}=1{,}4$ и $\frac{10}{7}\approx1{,}428$), которые приближенно равны интервальному коэффициенту тритона ($\sqrt{2}\approx1{,}414$).

Взяв, как и в (13.5), в качестве энгармонически равного звука для СОЛЬ-бемоль $\left(\frac{7}{5}\right)$ и ФА-диез $\left(\frac{10}{7}\right)$ их среднее геометрическое $d=\sqrt{\frac{7}{5}\cdot\frac{10}{7}}=\sqrt{2}$, мы придем к 12-ступенной хроматической гамме чистого строя, интервальные коэффициенты которой имеют вид

$$1 \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \sqrt{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{16}{9} \quad \frac{15}{8} \quad 2 \qquad (13.8)$$

На этот раз интервальные коэффициенты в (13.8) не образуют никаких прогрессий. Однако нетрудно обнаружить, что гамма (13.8) также обладает глобальной геометрической симметрией относительно $\sqrt{2}$, т. е.

$$1 \cdot 2 = \frac{16}{15} \cdot \frac{15}{8} = \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{9} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = (\sqrt{2})^2 .$$

Гаммы (13.5) и (13.8) не обладают локальной геометрической симметрией, поэтому не допускают сдвигов без искажений. Последнее означает, что модуляции в другие тональности в пифагоровом и чистом строе затруднены.

Подведем некоторые итоги. Прежде всего мы видим, что музыкальные гаммы представляют собой строго упорядоченную совокупность звуков, отобранную из всего многообразия звуков, которые способно воспринимать и различать человеческое ухо. Именно закономерное построение гаммы, а следовательно и лада, позволяет на ее основе составлять и более сложные музыкальные конструкции, также носящие закономерный характер и называемые мелодией. Можно сказать, что гамма есть основная мелодия лада.

Отметим еще одно важное обстоятельство. В каждой из рассмотренных нами хроматических гамм: равномерно-темперированной (13.1), пифагоровой (13.5) и чистого строя (13.8) — точно выполнен один тип симметрии и только *приблизительно* другой. Так, равномерно-темперированная гамма (13.1) обладает локальной и глобальной геометрической симметрией, но в ней только приблизительно соблюдены пропорции деления октавы на квинту и кварту, большую и малую терции и т. д. Пифагорова гамма и гамма чистого строя обладают глобальной геометрической симметрией, но локальная симметрия в них выполнена только приблизительно. Зато в обеих гаммах точно соблюдено условие пропорционального деления октавы на квинту и кварту, а гамма чистого строя обладает еще двумя парами пропорций деления, что, видимо, и делает ее наиболее мелодичной из всех трех типов гамм.

Рассмотренные три типа гаммы играют исключительную роль в истории музыки. Можно сказать, что история европейской теории музыки есть история смены трех музыкальных строев: пифагорова (VI в. до н. э.), чистого (XVI в.) и равномерно-темперированного (XVIII в.). Две взаимоисключающие причины предопределяли эту смену: стремление сделать строй равномерным и желание сохранить чистоту консонансов. Но природа ничего не отдает даром: гамма каждого строя, приобретая один тип симметрии, теряла другой. Количественная оценка суммарных ошибок в основных и неосновных консонансах, а также ошибок, связанных с неравномерностью гаммы, позволила сформулировать нам своеобразный *закон сохранения искажений в музыкальной гамме*: с учетом эстетической значимости суммарные искажения в трех основных типах музыкального строя — пифагоровом, чистом и равномерно-темперированном — практически не изменяются. Интересно, что такой же закон сохранения был открыт Б. В. Раушенбахом в живописи (см. гл. 25). Вместе эти законы сохранения свидетельствуют об общих внутренних закономерностях, лежащих в основании различных искусств — музыки и живописи.

Последние три десятилетия поисками математических закономерностей в музыке усиленно занимается московский композитор М. А. Марутаев. Еще в студенческие годы Марутаева занимала мысль найти объяснение принципам музыкальной формы и ладово-гармонического языка. Результаты многолетних изысканий Марутаева легли в основу развитой им теории качественной симметрии чисел, позволившей автору определить меру нарушения симметрии в музыкальной гамме.

На основании теории качественной симметрии чисел Марутаев строит концепцию «универсальной гармонии», т. е., проще говоря, пытается решить одну из вечных загадок: найти «формулу красоты», «универсальную гармонию», которую искали еще древние греки и которая связала бы воедино законы природы и законы искусства.

На сегодня это фантастическая задача, ибо человечеству пока не известны ни единые законы природы, ни тем более законы искусства. Вот почему у концепции Марутаева много как пылких сторонников, так и ярых противников. Мы не будем останавливаться на концепции Марутаева, которая во многом спорна, а отметим лишь некоторые любопытные факты, установленные им.

Вновь обратимся к гаммам. Прежде всего заметим, что, хотя мы все время говорили о 12-ступенных хроматических гаммах, мы везде фактически включали в рассмотрение 13-ю ступень (октавное повторение основного тона), которая на самом деле является 1-й ступенью следующей октавы. Если в гаммах (13.1), (13.5) и (13.8) октавное повторение основного тона не рассматривать, то получаются действительно 12-ступенные музыкальные ряды, которые Марутаев называет *качественными музыкальными рядами,* поскольку они состоят из оригинальных качеств:

$$1{,}37$$

$$1\quad 2^{\frac{1}{12}}\quad 2^{\frac{2}{12}}\quad 2^{\frac{3}{12}}\quad 2^{\frac{4}{12}}\quad 2^{\frac{5}{12}}\qquad \sqrt{2}\quad 2^{\frac{7}{12}}\quad 2^{\frac{8}{12}}\quad 2^{\frac{9}{12}}\quad 2^{\frac{10}{12}}\quad 2^{\frac{11}{12}} \tag{13.9}$$

$$1\quad \frac{256}{243}\quad \frac{9}{8}\quad \frac{32}{27}\quad \frac{81}{64}\quad \frac{4}{3}\qquad \sqrt{2}\quad \frac{3}{2}\quad \frac{128}{81}\quad \frac{27}{16}\quad \frac{16}{9}\quad \frac{243}{128} \tag{13.10}$$

$$1\quad \frac{16}{15}\quad \frac{9}{8}\quad \frac{6}{5}\quad \frac{5}{4}\quad \frac{4}{3}\qquad \sqrt{2}\quad \frac{3}{2}\quad \frac{8}{5}\quad \frac{5}{3}\quad \frac{16}{9}\quad \frac{15}{8} \tag{13.11}$$

Легко видеть, что качественная равномерно-темперированная гамма (13.9) сохраняет свойство глобальной геометрической симметрии, центр которой сместился из точки $\sqrt{2}\approx 1{,}41$ в точку $2^{11/24}\approx 1{,}37$:

$$b_n \cdot b_{11-n} = 2^{11/12} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{b_n \cdot b_{11-n}} = 2^{11/24} \approx 1{,}37395$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

А вот для качественных гамм пифагорова и чистого строя глобальная геометрическая симметрия нарушится и будет выполняться только приблизительно. В самом деле, вычисляя среднее геометрическое для равноудаленных от концов членов ряда (13.10)

$$a_1 = \sqrt{1 \cdot \frac{243}{128}} \approx 1{,}377838,$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{256}{243} \cdot \frac{16}{9}} \approx 1{,}368534 \text{ и т. д.}$$

и ряда (13.11)

$$b_1 = \sqrt{1 \cdot \frac{15}{8}} \approx 1{,}369306,$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{16}{15} \cdot \frac{16}{9}} \approx 1{,}377061 \text{ и т. д.},$$

мы видим, что эти числа слегка различаются, однако их среднее арифметическое с точностью до 5 знаков совпадает между собой и с точностью до 4 знаков — с числом $2^{11/24}$:

$$a_{\text{ср}} \approx b_{\text{ср}} \approx 2^{11/24} \approx 1{,}3739.$$

Итак, число 1,37 является центром глобальной геометрической симметрии (точной для (13.9) и приблизительной для

(13.10) и (13.11) 12-ступенных музыкальных гамм. Далее, Марутаев напоминает, что в ботанике известен идеальный угол расхождения листьев, равный 137°30′. Это математически рассчитанный угол, на который должны поворачиваться листья при их винтовом расположении вдоль стебля, так чтобы получать наибольшее количество вертикально падающего света. Удивительным оказывается и тот факт, что идеальный угол получается при двух последовательных делениях по золотому сечению угла 360°.

Особую роль играет число 137 и в физике, где оно является безразмерной комбинацией фундаментальных постоянных природы. Вот что по поводу этого числа пишет один из крупнейших современных физиков, лауреат Нобелевской премии англичанин Поль Дирак, возглавлявший в 60-е гг. XX в. в Кембридже знаменитую лукасовскую кафедру — ту самую, которую в 60-е гг. XVII в. профессор Исаак Барроу уступил своему 26-летнему ученику Исааку Ньютону: «В природе существует несколько фундаментальных констант: заряд электрона (e), постоянная Планка, деленная на 2π ($\hbar=\frac{h}{2\pi}$), и скорость света (c). Из этих фундаментальных констант можно вывести число, которое не обладает размерностью: $\frac{\hbar c}{e^2}$. На основании экспериментальных данных установлено, что это число имеет величину 137 или весьма близкую к 137. Далее, нам неизвестно, почему оно имеет именно это значение, а не какое-нибудь иное. Для объяснения этого факта выдвигались различные идеи, однако никакой приемлемой теории не существует. Все же можно быть вполне уверенным в том, что физики когда-нибудь решат эту проблему и объяснят, почему это число имеет именно такое значение. Возможно, создадут такую физическую теорию, которая будет работать, если $\frac{\hbar c}{e^2}$ равно 137, и не будет работать, если оно имеет любое другое значение».

Еще один пример из физики. При распаде урана образуются осколки неравной массы. Кривая распределения осколков по массам имеет два максимума при массовых числах порядка 102 и 140 (это наиболее вероятные массовые числа осколков при распаде урана). Взяв отношение этих максимумов, имеем $\frac{140}{102}\approx 1{,}37$.

Наконец, Марутаев приводит многочисленные примеры анализа музыкальных произведений по их метрическим параметрам, в которых встречается число 1,37. Рассматриваются сонатные или трехчастные формы. Протяженность музыкального произведения во времени можно характеризовать, например, числом восьмых долей или числом тактов, если размеры тактов (т. е. число восьмых долей в такте) не изменяются. Тогда протяженность трехчастной формы можно представить в виде $T=a+b+c$, где a, b, c — числа тактов (восьмых долей) в экспозиции, разработке (средней части) и репризе соответственно. Оказалось, что во многих известных произведениях выдающихся композиторов: Моцарта (Соната № 12, ч. 1), Бетховена (соната № 14 «Лунная»), Дебюсси («Детский уголок», пьеса № 1), Шостаковича (Фуга № 1, оп. 87) — имеет место соотношение

$$\frac{a+b}{c}=1{,}37.$$

Так что же это такое: открытие «универсальной гармонии» или банальная игра чисел? Почти наверняка — второе. Однако не нужно спешить обвинять автора в числовых спекуляциях. Вспомним кружочки противоположного цвета в мудром символе Инь—Янъ: каждое доброе дело содержит крупицу зла, и даже зло несет в себе частицу доброты. В нашем случае мудрый древнекитайский символ говорит: даже неправильная научная теория является шагом вперед на пути к истине. Не нужно забывать и исторический пример Пифагора, которого со всех сторон и во все времена обвиняли в числовых спекуляциях, но тем не менее сегодня общепризнано, что закон целочисленных отношений для консонансов является первым физическим и эстетическим законом, получившим математическое описание. Исследования Марутаева, безусловно, продвигают нас хотя бы на шаг вперед на трудном пути постижения математических тайн музыки. Что же касается «универсальной гармонии», то она представляется нам столь же недостижимой, как «абсолютная истина» или «перпетуум-мобиле».

14. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МУЗЫКИ

Чрезвычайная бедность, шаткость и разрозненность существующих основ музыкальной эстетики побуждает нас пытливо всматриваться во всякое закономерное явление, относящееся к этой области, в надежде приподнять хотя бы уголок изидовой завесы, скрывающей от нашего умственного взора таинственные творческие законы природы...

Э. РОЗЕНОВ

До сих пор в нашем разговоре о музыке мы фактически не выходили за пределы одной октавы. С одной стороны, это хорошо, ибо говорит о том, сколь много мудрости в простоте знакомых каждому семи нот октавы. Но с другой стороны, безусловно, непростительно по отношению к музыке в целом, ибо музыка — это прежде всего мелодия, это песня души. Ведь, как сказал Пушкин,

Из наслаждений жизни
Одной любви музыка уступает,
Но и любовь — мелодия...

Говоря о музыке, хочется вспомнить и слова философа и поэта Вильгельма Генриха Ваккенродера (1773—1798), который, прожив неполные 25 лет, вошел в историю как родоначальник немецкого романтизма: «Но музыку я считаю самым чудесным из всех этих изобретений, потому что она описывает человеческие чувства сверхчеловеческим языком, ибо она показывает все движения нашей души в невещественном виде, вознося их над нашими головами в золотых облаках эфирных гармоний...»

Прошло 25 веков с тех пор, как великий Пифагор и его ученики открыли законы целочисленных отношений в музыке и дали математическое построение музыкальной гаммы. Однако до сих пор в математическом анализе мелодии, музыкального произведения в целом делались только робкие шаги. Лишь к середине XX в., который часто называют веком науки, произведения искусства стали подвергаться изучению математическими методами.

Разумеется, математические методы в искусствознании применяются не для того, чтобы алгеброй вытеснить гармонию, а чтобы подтвердить интуицию художника, полнее раскрыть замысел гения, а быть может, и найти закономерности, отличающие совершенное произведение или хотя бы эпоху, в которую оно создано. Как говорил Пуанкаре, «Математика — это искусство называть разные вещи одним и тем же именем». Поэтому проникновение математических методов в анализ произведений искусства, безусловно, поможет назвать одним именем пока непонятные и несвязанные между собой законы искусства.

Законы искусства не столь прямолинейны и однозначны, как законы науки или языка. Эта «нелинейность» законов искусства и создает неимоверные трудности на пути исследователя искусства, но в то же время является источником все новых открытий в творчестве художника. Более того, искусство парадоксально, и его парадоксальность не в состоянии выразить строгое логическое мышление. Вот только два примера из живописи. Какими законами механики описать движение саней, в которых едет суриковская боярыня Морозова? Уже сто лет, как бегут ее сани, бегут, оставаясь все время на одном месте... «Джоконда» Леонардо да Винчи и «Неизвестная» Крамского явно глядят на кого-то. Смотрят пристально, грустно и чуть усмехаясь, надменно и страдальчески, но смотрят на того, кого нет. Кипы статей написаны о том, на кого и как они смотрят, но все безрезультатно. Математика также бессильна перед чарами этих двух загадочных женщин.

Но у математики непочатый край проблем и в тех областях искусства, которые поддаются законам логики. Ведь математика делает только первые шаги в анализе искусства, которые сродни первым шагам медицины, начавшей изучение живого организма человека с познания законов его анатомического строения. Хорошо сказал об этом музыковед Э. К. Розенов (1861—1935): «Хотя, обнаруживая в живом творчестве и в созданном им живом художественном организме его сокрытый от взора внутренний механизм, притом, конечно, не весь, а одну какую-нибудь из двигающих его пружин, мы не дальше продвинемся по пути к проникновению в жизненные тайны, чем это делает анатомия, обнажающая скелет, мускулы и нервы живого организма, тем не менее мы не должны считать такие исследования бесцельными».

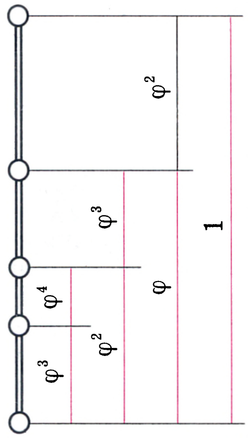
В начале нашего столетия на одном из заседаний Московского научно-музыкального кружка, членами которого вместе с композиторами и пианистами Танеевым, Рахманиновым, Глиэром, Гольденвейзером были и крупные московские ученые, Розенов выступил с докладом «Закон золотого сечения в поэзии и музыке». Эту работу можно считать одним из первых математических исследований музыкальных произведений. Остановимся на ней подробнее.

Очевидно, что при делении целого на две неравные части возможно бесконечное множество отношений между целым и одной из его частей, а также между самими частями целого. Но только в единственном случае эти отношения могут быть равными. Этот случай, как мы знаем (с. 107), и представляет собой *золотое сечение*, когда целое относится к большей части, как большая часть к меньшей.

Обозначая целое через a, большую часть x и, следовательно, меньшую $a—x$, имеем

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}\Rightarrow x^2+ax-a^2=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{1,2}=a\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \qquad (14.1)$$

Поскольку x есть часть целого, т.е. величина положительная, а второй корень (14.1)



Ряд золотого сечения:

$$1, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^n, \varphi^{n+1}, \varphi^{n+2}, \ldots$$

$$\frac{\varphi^n}{\varphi^{n+1}}=\frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^{n+2}},$$

$$\varphi^n=\varphi^{n+1}+\varphi^{n+2}$$

$$(n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}618.$$

$$\Phi=\frac{1}{\varphi}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1{,}618.$$

Последовательное деление единичного отрезка в золотом сечении.

отрицателен, то приходим к единственному значению корня:

$$x=a\varphi,\ \varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}618, \qquad (14.2)$$

где величина φ является коэффициентом золотого сечения. Тогда

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}=\frac{1}{\varphi}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=$$
$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\Phi\approx 1{,}618, \qquad (14.3)$$

причем $\Phi=1/\varphi$. Для меньшей части имеем $a-x=a(1-\varphi)=a\varphi^2$, причем $a\varphi+a\varphi^2=a$. Разделив теперь величину $a\varphi$ в золотой пропорции, получим

$$\frac{a\varphi}{y}=\frac{y}{a\varphi-y}\Rightarrow y^2+a\varphi y-a^2\varphi^2=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=a\varphi^2,\ a\varphi-y=a\varphi^3,$$

причем $a\varphi^2+a\varphi^3=a\varphi$. Легко видеть, что большая часть второй золотой пропорции $y=a\varphi^2$ совпадает с меньшей частью первой $a-x=a\varphi^2$. Итак, при последовательном делении целого a в золотой пропорции имеет место геометрическая прогрессия (ряд золотого сечения) со знаменателем φ, каждый член которой равен сумме двух последующих членов прогрессии:

$$\div a,\ a\varphi,\ a\varphi^2,\ a\varphi^3,\ \ldots$$
$$a=a\varphi+a\varphi^2,$$
$$a\varphi=a\varphi^2+a\varphi^3, \qquad (14.4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a\varphi^n=a\varphi^{n+1}+a\varphi^{n+2}.$$

Огромная роль золотого сечения в пространственных искусствах (скульптуре, архитектуре, живописи) известна с античных времен и имеет немало объяснений. Например, такое: линия глаз, на которой человек привык концентрировать свое внимание, слушая собеседника, делит длину лица в отношении золотого сечения. Поэтому при взгляде на любой предмет мы невольно направляем глаза в точку золотого деления, которая кажется нам привычной, естественной, а потому и красивой. Что касается искусств, развивающихся во времени (поэзия, музыка), то здесь неизвестны аналогичные природные предпосылки закона золотого сечения. Но тем более удивительным оказывается действие этого закона в поэзии и музыке, которое, по-видимому, первым обнаружил Розенов.

Розенов проанализировал «популярнейшие и наиболее излюбленные произведения гениальных авторов — Баха, Моцарта, Бетховена, Шопена, Вагнера, Глинки, а также произведения народного творчества наиболее древнего происхождения, живучесть которых является достаточным доказательством их эстетической ценности и широкой популярности». Остановимся на анализе Хроматической фантазии и фуги И. С. Баха, которые объединены общей тональностью РЕ *минор* и контрастны по жанру и образу. Хроматическая фантазия с фугой РЕ *минор* — одно из величайших творений Баха, образец совершенства формы и содержания, «могущественнейшее клавесинное произведение» (А. Н. Серов).

Хроматическая фантазия написана в размере 4/4, имеет 79 тактов, т. е. $79 \cdot 4 = 316$ четвертных долей. Итак, «целое» $a = 316$. Фантазия состоит из двух ясно различимых по характеру частей, отделенных друг от друга паузой. Первая часть, прелюдия, заканчивается на арпеджированном доминантовом трезвучии с разрешением на 2-й четверти 49-го такта, на которой стоит знак ферматы (удлинение звука), и затем идет пауза. Таким образом, первая часть фактически заканчивается на 3-й четверти 49-го такта, т. е. на 195-й ($48 \cdot 4 + 3$) четверти ($a_1 = 195$). Вторая часть, пишет Розенов, «состоит из ряда в высшей степени выразительных колорированных речитативов, то развивающихся по силе, энергии и размаху до гигантской мощи,

Главные золотые сечения Хроматической фантазии И. С. Баха. Цифры обозначают число четвертей теоретического ряда золотого сечения ($a = 316$). Справа дано описание соответствующих характерных мест нотного текста фантазии.

то нежных и жалобных, то сердитых и запальчивых, то впадающих в необычную для этой эпохи романтическую мечтательность». На вторую часть приходится 121 четверть ($a_2=a-a_1=316-195=121$). Вычисляя «теоретическую» длину первой части с помощью коэффициента золотого сечения, мы с поражающей точностью находим $a_1=a\varphi=0{,}316\cdot 0{,}618=195{,}3$! Итак, Хроматическая фантазия разделена на первую и вторую части в золотой пропорции:

$$\frac{316}{195}=\frac{195}{121},\ 195+121=316.$$

Но на этом чудеса гениального творения Баха только начинаются. Построив ряд золотого сечения (14.4) при $a=316$, имеем

$$316\quad 195{,}3\quad 120{,}7\quad 74{,}6\quad 46{,}1\quad 28{,}5\quad 17{,}6.$$

Каково же должно быть наше удивление, когда мы обнаружим, что на 124-й четверти находится кульминация первой части и стоит знак ферматы 𝄐, а на 77-й четверти от начала второй части имеет место кульминация второй части! Таким образом, кульминация обеих частей с небольшой погрешностью, легко объяснимой растяжимостью темпов, делит эти части по закону золотого сечения. Далее, каждый из полученных четырех разделов Хроматической фантазии имеет характерные особенности, которые также с потрясающей точностью приходятся на точки золотого деления этих разделов! Наконец, Розенов нашел и более мелкие деления Хроматической фантазии в золотой пропорции, на которых мы не будем останавливаться.

Итак, Хроматическая фантазия, произведение свободного по форме жанра, буквально соткано из золотых пропорций! Пожалуй, эстетическое впечатление от математического анализа Хроматической фантазии имеет не меньшую силу, чем прослушивание бессмертного творения Баха. А взятые вместе — чувственное впечатление и рациональный анализ, безусловно, позволяют еще на один шаг приблизиться к сокровенным тайникам гения.

Перейдем к анализу фуги. *Фуга* (от лат. *fuga* — бег) является наиболее совершенной формой многоголосной музыки (полифонии). Фуга строится на многократных *проведениях* (повторениях) основной музыкальной темы в разных голосах. Проведения основной темы обычно перемежаются в фуге с промежуточными вставками, называемыми *интермедиями*. Таким образом, фуга в отличие от фантазии имеет четко определенный закон построения. Но тем не менее точность построения фуги РЕ *минор* просто поражает!

Фуга РЕ *минор* состоит из семи пар проведений и интермедий и двух самостоятельных проведений. Из семи пар «проведение — интермедия» пять пар строго подчиняются закону золотого сечения. Те же две пары «проведение — интермедия», для которых закон золотого деления не выполнен, являются своеобразными центрами симметрии относительно обрамляющих их разделов фуги и с каждым из них находятся в золотой пропорции. Именно для того, чтобы выделить эти два центра симметрии, Бах специально допускает в их строении отклонения от золотого деления и делает эти две пары «проведение — интермедия» симметричными.

На рисунке приведена схема строения фуги РЕ *минор*. Здесь же указано число четвертей в каждом разделе фуги (целые числа) и даны теоретические значения членов золотой пропорции (дробные числа). Как видим, все пять пар «проведение — интермедия» с изумительной точностью разделены в золотой пропорции (абсолютные ошибки колеблются в диапазоне от 0,05 до 0,15 четверти, относительные ошибки — от 0,02% до 0,7%). Таким относительным погрешностям могут позавидовать многие из современных инженерных расчетов! В более крупных разделах абсолютные ошибки, естественно, возрастают. Но и при делении самого большого раздела (91 четверть) эти ошибки не превышают 1,25 четверти. Не следует, однако, забывать, что мы имеем дело с художественным произведением. Отметим, что в фуге РЕ *минор* существуют также и более мелкие, и более крупные соотношения золотого сечения, на которых мы просто не останавливаемся.

Итак, простой математический анализ, не выходящий за рамки арифметики, позволяет совершенно иными глазами взглянуть на музыкальное произведение, увидеть его скрытую внутреннюю красоту, которую мы ощущаем только, слушая произведение, и которую мы «видим», проводя его математический анализ. Вот как сказал

$123 \cdot \varphi = 76{,}01$ $\qquad \frac{123}{76} = \frac{76}{47} \qquad 76 + 47 = 123$

$123 \cdot \varphi^2 = 46{,}97$

$55 \cdot \varphi = 33{,}99$ $\qquad \frac{55}{34} = \frac{34}{21} \qquad 34 + 21 = 55$

$55 \cdot \varphi^2 = 21{,}00$

$91 \cdot \varphi = 56{,}23$ $\qquad \frac{91}{55} = \frac{55}{36} \qquad 55 + 36 = 91$

$91 \cdot \varphi^2 = 34{,}75$

$52 \cdot \varphi = 32{,}13$ $\qquad \frac{52}{32} = \frac{32}{20} \qquad 32 + 20 = 52$

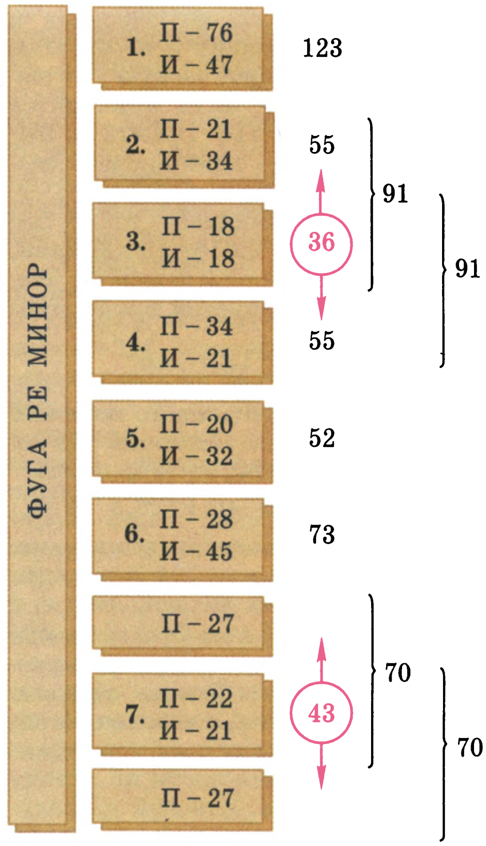
$52 \cdot \varphi^2 = 19{,}85$

$73 \cdot \varphi = 45{,}11$ $\qquad \frac{73}{45} = \frac{45}{28} \qquad 45 + 28 = 73$

$73 \cdot \varphi^2 = 27{,}87$

$70 \cdot \varphi = 43{,}26$ $\qquad \frac{70}{43} = \frac{43}{27} \qquad 43 + 27 = 70$

$70 \cdot \varphi^2 = 26{,}73$



Строение фуги ре минор И. С. Баха. Целые числа указывают число четвертей в фуге, дробные — теоретические значения золотых сечений. Золотые пропорции в более крупных частях фуги отмечены фигурными скобками, центры симметрии — кружками. П — проведение, И — интермедия.

об этом Розенов: «При взгляде на схемы Хроматической фантазии и фуги... невольно приходишь в священный трепет перед гениальностью мастера, воплотившего силой художественной чуткости до такой степени точности законы природного творчества».

Далее Розенов, «дабы показать, что приведенный пример не является у Баха исключительным», рассматривает многочисленные прелюдии и фуги из «Хорошо темперированного клавира» Баха, а также оперу Моцарта «Дон-Жуан», финал знаменитой «Лунной» сонаты Бетховена, Фантазию ФА *минор* Шопена, вступление к опере «Тристан и Изольда» Вагнера, увертюру к опере «Руслан и Людмила» Глинки и многие народные песни. Во всех этих произведениях Розенов с замечательной точностью обнаруживает действие закона золотого сечения. «Приведенные мною примеры проявления закона золотого сечения настолько характерны и замечательны, — пишет Розенов,— что исключают всякую возможность отрицания эстетического значения этого закона в музыке». Не правда ли, здесь мы имеем тот самый случай, когда «цифры могут представлять собой культурную и эстетическую ценность»? (См. высказывание Н. Винера в эпиграфе к первой части книги.)

Но помимо установления самого факта наличия закона золотого сечения в музыкальных произведениях и его огромного эстетического значения в музыке, математический анализ музыки (даже такой элементарный) позволяет сделать некоторые выводы о характерных особенностях творчества самих композиторов. Так, сравнивая проявление закона золотого сечения у Баха и Бетховена, Розенов пишет: «Мы находим у Баха сравнительно более детальную и органическую сплоченность. Закон золотого деления проявляется у него с поразительной точностью в соотношениях крупных и мелких частей как в строгих, так и в свободных формах, что, несомненно, соответствует с характером этого гениального мастера-труженика, сильным, здоровым и уравновешенным, с его глубоко сосредоточенным отношением к работе и детально отделанной манерою письма. У Бетховена проявление закона золотого сечения глубоко логично по отношению к размерам частей формы, но главным образом указывает на силу темперамента этого автора по точности совпадения всех моментов высшего напряжения чувств и разрешения подготовленного ожидания с моментами золотых сечений. У Шопена внутренняя формальная связь сравнительно слабее и проявляется не сплошь, а лишь местами. По силе темперамента он сходен с Бетховеном, но проявление это более внешне и касается чаще изящной нарядности изложения мысли, нежели его внутренней логики. У Моцарта темперамент проявляется сравнительно слабее, закон золотого сечения направлен у него особенно часто к подчеркиванию драматических элементов (психологических контрастов, противопоставлений характеров) и трагических положений. У Глинки мы находим применение данного закона только лишь в широких масштабах при полном почти отсутствии мелочных соответствий, встречающихся так часто у Баха и Шопена».

Вот к каким глубоким эстетическим выводам приводит простейший математический анализ музыки! Слова Розенова о том, что закон золотого сечения «может, по-видимому, явиться в дальнейшем немаловажным вкладом в экспериментальную эстетику», оказались пророческими. А сама экспериментальная эстетика сегодня уверенно набирает силу.

Из начала XX столетия перенесемся теперь в его вторую половину и перейдем к современным исследованиям по экспериментальной эстетике. Начиная с 1952 г. интересные работы по применению математических методов в исследованиях искусства — литературы, живописи, музыки — публикует видный немецкий ученый Вильгельм Фукс. Фукс — прежде всего физик, работающий в области физики плазмы. Однако у этого ученого-энциклопедиста есть и хобби — исследования в области экспериментальной эстетики, часть из которых собрана в интереснейшей монографии Фукса «По всем правилам искусства». В своих работах по экспериментальной эстетике Фукс стремился показать, что точные методы могут быть эффективно применены к исследованию культурного наследия человечества. Хотя со времен Галилея и Ньютона математическое описание стало великим путем познания природы, применение математического метода к искусству до сих пор вызывало недоверие, сарказм или просто неприязнь. Повинна в этом, скорее всего, все та же инерция мышления, «благодаря» которой в свое время отвергались анатомия и демографическая статистика, считавшиеся уделом лишь Бога и короля. Однако, как отмечает Фукс, «выдающиеся успехи точных наук в присущих им сферах привели к тому, что теперь все более соблазнительной представляется идея испытать методы этих наук и в других областях». В силу известного нам свойства математики «называть разные вещи одним и тем же именем» такие исследования помогли бы выявить общие закономерности в разнородных, на первый взгляд, явлениях культуры. Тем не менее сама постановка подобной проблемы была столь нова и необычна, что Фукс вполне справедливо задавал сам себе вопросы: «Можно ли применять абстрактный аппарат точных наук к явлениям культуры? И если да, то имеет ли это смысл? Будут ли получены при этом результаты, столь же объективные, как и в естественных науках? Удастся ли помимо голых чисел, результатов измерений и статистической обработки фактического материала выявить некий род объективных закономерностей, регулярностей, характерных форм явлений?»

Нам представляется, что работы Фукса дали, бесспорно, положительный ответ на эти вопросы, и мы надеемся, что рассматриваемые далее примеры, относящиеся к математическому анализу музыки, будут тому блестящим доказательством.

Вновь обратимся к анализу высоты музыкальных звуков, которому посвящена практически вся вторая часть книги. На примере многочисленных скрипичных произведений Фукс исследовал, как разные авторы в разные эпохи использовали звуковой материал скрипки. Диапазон звучания скрипки простирается от ноты СОЛЬ малой октавы до ноты ДО пятой октавы. Считая энгармонически равные звуки (ДО-диез=РЕ-бемоль и т. п.) за один звук, в диапазоне СОЛЬ—$ДО_5$ мы имеем 54 звука. Пронумеруем их, т. е. каждому звуку скрипки поставим в соответствие число $i=1, 2, \ldots, 54$: СОЛЬ$\Leftrightarrow i=1$, СОЛЬ-диез=ЛЯ-бемоль$\Leftrightarrow i=2$, ЛЯ$\Leftrightarrow i=3$, ..., $ДО_5\Leftrightarrow i=54$. Подсчитав общее число звуков N в данном произведении, легко найти *относительную частоту* появления i-го звука по формуле

$$W_i=\frac{n_i}{N},$$

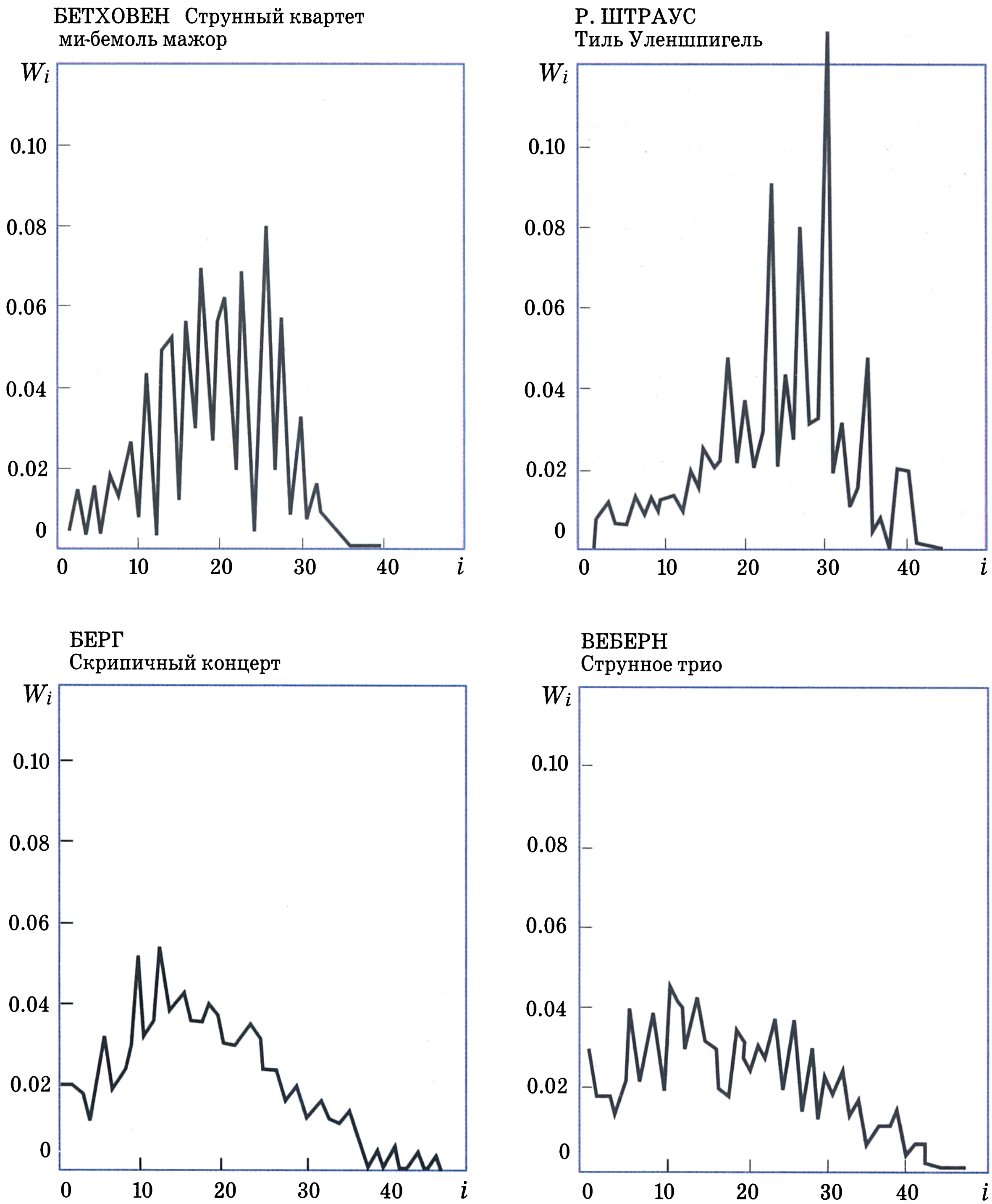
где n_i — частота i-го звука, т. е. число появлений i-го звука в произведении. Например, в струнном квартете МИ-бемоль *мажор* Бетховена в партии первой скрипки $N=3796$, а нота СОЛЬ первой октавы ($i=1$) встречается 23 раза ($n_1=23$). Следовательно, ее относительная частота $W_1=23/3796=$ $=0{,}006$. Ясно, что если самые верхние звуки из диапазона звучания скрипки в произведении не используются, то их частота будет равна нулю. Совокупность (i, Wi) $i=1, 2, \ldots, k$ называется *статистическим распределением,* а ломаная линия, отрезки которой соединяют точки статистического распределения, называется *полигоном относительных частот.* Заметим, что поскольку $n_1+n_2+\ldots n_k=N$, то $W_1+W_2+\ldots+W_k=$ $=(n_1+n_2+\ldots n_k)/N=1$, т. е. *сумма всех относительных частот статистического распределения равна* 1.

На рисунке построены полигоны относительных частот высоты звуков в партии первой скрипки для четырех музыкальных произведений: струнного квартета МИ-бемоль *мажор* Бетховена (1809) (партия первой скрипки); симфонической поэмы Рихарда Штрауса «Тиль Уленшпигель» (1890) (партия первой скрипки); первой части скрипичного концерта Берга (1935) и струнного трио Веберна (1927) (партия скрипки). Одного взгляда на рисунок достаточно для того, чтобы понять: произведения Бетховена и Р. Штрауса, при всем их различии, принадлежат к одному типу музыки, а Берга и Веберна к совершенно другому. Знатоки музыки воспримут этот факт как должное, ведь по отношению к Бетховену и Р. Штраусу Берг и Веберн — представители принципиально иного направления в музыке, так называемой додекафонной[1] или атональной музыки. Поскольку атональная музыка отрицает главную роль тоники и устойчивых звуков в ладу и считает все звуки равноправными, то и статистическое распределение высот звуков в атональной музыке должно быть более гладким по сравнению с тональной музыкой, где одни звуки являются явно предпочтительными (пики на полигоне относительных частот), а другие употребляются редко («провалы» на полигоне).

Берг и Веберн, будучи последователями Шёнберга, сочиняли музыку по сходным и весьма строгим формальным правилам. Поэтому их статистические распределения так похожи, хотя, с другой стороны, и различаются тонкими деталями, которые характеризуют индивидуальные черты каждого композитора. Таким образом, уже простая статистика высот звуков позволяет выявить, с одной стороны, принадлежность автора к тому или иному направлению в музыке, а с другой — увидеть тонкие черты различия, характерные для конкретных произведений и конкретных композиторов. Мы ограничивались лишь качественными выводами. Посмотрим, нельзя ли извлечь из статистических распределений какие-либо количественные характеристики.

---

[1] *Додекафония* (от греч. δωδεχα — двенадцать и φωνη — звук) — метод музыкальной композиции, основанный на отрицании ладовых связей между звуками. В додекафонии все 12 звуков хроматической гаммы считаются абсолютно равными (откуда и происходит название) без различия устойчивых и неустойчивых звуков и без выделения тоники. Поэтому додекафонию называют также атональной музыкой. Метод додекафонии был разработан и внедрен австрийским композитором Арнольдом Шёнбергом (1874—1951). Альбан Берг (1885—1935) и Антон фон Веберн (1883—1945) — ученики и последователи Шёнберга.



Полигоны относительных частот высоты звуков в партии первой скрипки. Уже по внешнему виду статистических распределений можно заключить, что композиторы-додекафонисты Берг и Веберн применяли совершенно иные правила композиции, чем Бетховен и Рихард Штраус.

Всякое статистическое распределение (x_i, W_i) $i=1, 2, \ldots, k$ обладает двумя важнейшими числовыми характеристиками: эмпирической средней и эмпирической дисперсией. *Эмпирической средней* $\bar{x}$ называется среднее арифметическое значений x_i статистического распределения с учетом их частот n_i, т. е.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i n_i}{N} = \sum_{i=1}^{k} x_i W_i. \qquad (14.5)$$

Эмпирическая средняя характеризует «среднюю величину» значений статистического распределения. Однако, помимо «средней величины», важно знать, насколько «разбросаны» значения x_i относительно этой средней величины, т. е. какова дисперсия (от лат. *dispersus* — рассыпанный) статистического распределения. Назовем разность $x_i - \bar{x}$ *отклонением* значения x_i от эмпирической средней $\bar{x}$. Легко видеть, что сумма всех отклонений с учетом их частот n_i равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})\, n_i = \sum_{i=1}^{k} x_i n_i - \sum_{i=1}^{k} \bar{x}\, n_i =$$

$$= \bar{x} N - \bar{x} \sum_{i=1}^{k} n_i = \bar{x} N - \bar{x} N = 0$$

и, значит, не может быть взята в качестве характеристики рассеяния параметров статистического распределения. Поэтому в качестве характеристики разброса параметров x_i берут среднее арифметическое квадратов отклонений. Итак, *эмпирической дисперсией* D называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений x_i от их эмпирической средней $\bar{x}$ с учетом частот n_i, т. е.

$$D = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \frac{n_i}{N} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 W_i. \qquad (14.6)$$

Для вычисления эмпирической дисперсии существует также более практичная формула

$$D = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 W_i - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i W_i \right)^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \qquad (14.7)$$

т. е. эмпирическая дисперсия равна эмпирическому среднему квадратов значений статистического распределения минус квадрат эмпирической средней. Наконец, чтобы характеристики рассеяния имели ту же размерность, что и значения x_i статистического распределения, вместо дисперсии рассматривают *среднее квадратическое отклонение*

$$\sigma = \sqrt{D}. \qquad (14.8)$$

Среднее квадратическое отклонение показывает, насколько узко или насколько широко распределены вокруг эмпирического

ТАБЛИЦА 3. Статистическое распределение $(x_i = i,\ W_i)$ высоты звуков партии первой скрипки струнного квартета *ми-бемоль мажор* Бетховена. Для расчета дисперсии приведены также значения $x_i^2 = i^2$

i	i^2	W_i	i	i^2	W_i	i	i^2	W_i	i	i^2	W_i
1	1	0,006	13	169	0,050	25	625	0,060	37	1369	0,001
2	4	0,015	14	196	0,053	26	676	0,080	38	1444	0,001
3	9	0,004	15	225	0,011	27	729	0,014	39	1521	0,001
4	16	0,016	16	256	0,059	28	784	0,059	40	1600	0,0005
5	25	0,004	17	289	0,028	29	841	0,009	41	1681	0,0005
6	36	0,018	18	324	0,072	30	900	0,034	42	1764	0
7	49	0,014	19	361	0,027	31	961	0,007	43	1849	0
8	64	0,020	20	400	0,055	32	1024	0,016	44	1936	0
9	81	0,028	21	441	0,064	33	1089	0,009	45	2025	0
10	100	0,009	22	484	0,019	34	1156	0,006	46	2116	0
11	121	0,044	23	529	0,071	35	1225	0,004	...	...	...
12	144	0,004	24	576	0,006	36	1296	0,001	54	2916	0

среднего $\bar{x}$ значения статистического распределения x_i.

В качестве примера найдем эмпирическую среднюю, эмпирическую дисперсию и среднее квадратическое отклонение для статистического распределения высоты звуков партии первой скрипки струнного квартета МИ-бемоль *мажор* Бетховена (см. с. 185). Выпишем значения $x_i=i$, $x_i^2=i^2$ и W_i ($i=1, 2, ..., 54$) в виде таблицы 3. Легко проверить, что

$$\sum_{i=1}^{54} W_i=1.$$

Подставляя данные таблицы 3 в формулы (14.6), (14,7) и (14,8), находим

$$\bar{x}=19{,}25;\ (\bar{x})^2=370{,}56;\ \bar{x}^2=431{,}84;$$
$$D=\bar{x}^2-(\bar{x})^2=61{,}28;\ \sigma=\sqrt{D}=7{,}83\approx7{,}8.$$

Итак, для струнного квартета Бетховена эмпирическая средняя $\bar{x}=19{,}25$, т. е. «средним» звуком произведения является РЕ-бемоль второй октавы. Это еще мало о чем говорит. Вторая характеристика — среднее квадратическое отклонение — означает, что средний разброс звуков в произведении относительно РЕ-бемоль$_2$ составляет ± 8 звуков, т. е. наиболее употребимые звуки произведения находятся в диапазоне $11\leqslant i\leqslant 27$, или от ФА$_1$ до ЛЯ$_2$. Среднее квадратическое отклонение высоты звуков музыкального произведения оказалось чрезвычайно эффективной характеристикой, позволяющей найти общие закономерности в развитии всей музыки. Остановимся на этом подробнее.

Как уже отмечали, основной целью работ Фукса было не просто найти какие-либо числовые характеристики произведений искусства, а выявить на основании этих характеристик закономерности общего порядка. С этой целью Фуксом были составлены статистические распределения высоты звуков в партиях первой скрипки большого числа произведений за период почти в пятьсот лет. Были определены числовые характеристики этих распределений, и прежде всего среднее квадратическое отклонение. Анализ поведения среднего квадратического отклонения дал блестящий результат: *среднее квадратическое отклонение за последние 500 лет истории европейской музыки монотонно возрастает.* Это уже есть не что иное, как закон развития музыки!

В таблице 4 приведены результаты исследований Фукса. Здесь представлены произведения, написанные с 1530 г. по 1960 г. Для каждого произведения было составлено статистическое распределение высоты звуков в партии первой скрипки, аналогичное таблице 3. Затем были определены средние квадратические отклонения в этих распределениях (найденное нами значение $\sigma=7{,}8$ для струнного квартета МИ-бемоль *мажор* Бетховена находится в соответствующем месте таблицы 4). Наконец, для каждого периода в истории развития музыки было вычислено среднее арифметическое $\bar{\sigma}$ средних квадратических отклонений отдельных произведений. Разбиение на периоды проведено в соответствии с существовавшими в музыке направлениями. Так, в таблице 4 *полифония строгого стиля* представлена произведениями Вилларта, Модены, Палестрины, Хаслера, Шейна и Розенмюллера; *полифония свободного стиля (барокко)* — произведениями Корелли, Вивальди и Баха; *классицизм* — произведениями Моцарта, Бетховена и Шпора; *романтизм* — произведениями Шуберта, Шумана, Брамса, Р. Штрауса и Чайковского; *неоромантизм* — произведениями Хиндемита, Бартока и Эгка; *додекафония* — произведениями Шёнберга, Веберна, Берга и Ноно. Поэтому естественно, что одни периоды в таблице 4 далеко отстоят друг от друга, а другие — пересекаются. Достаточно одного взгляда на первый и последний столбцы таблицы 4, чтобы увидеть закономерность: за прошедшие 500 лет значение $\bar{\sigma}$ возросло от 3,7 до 10,8, т. е. по мере развития музыки значение $\bar{\sigma}$ возрастает.

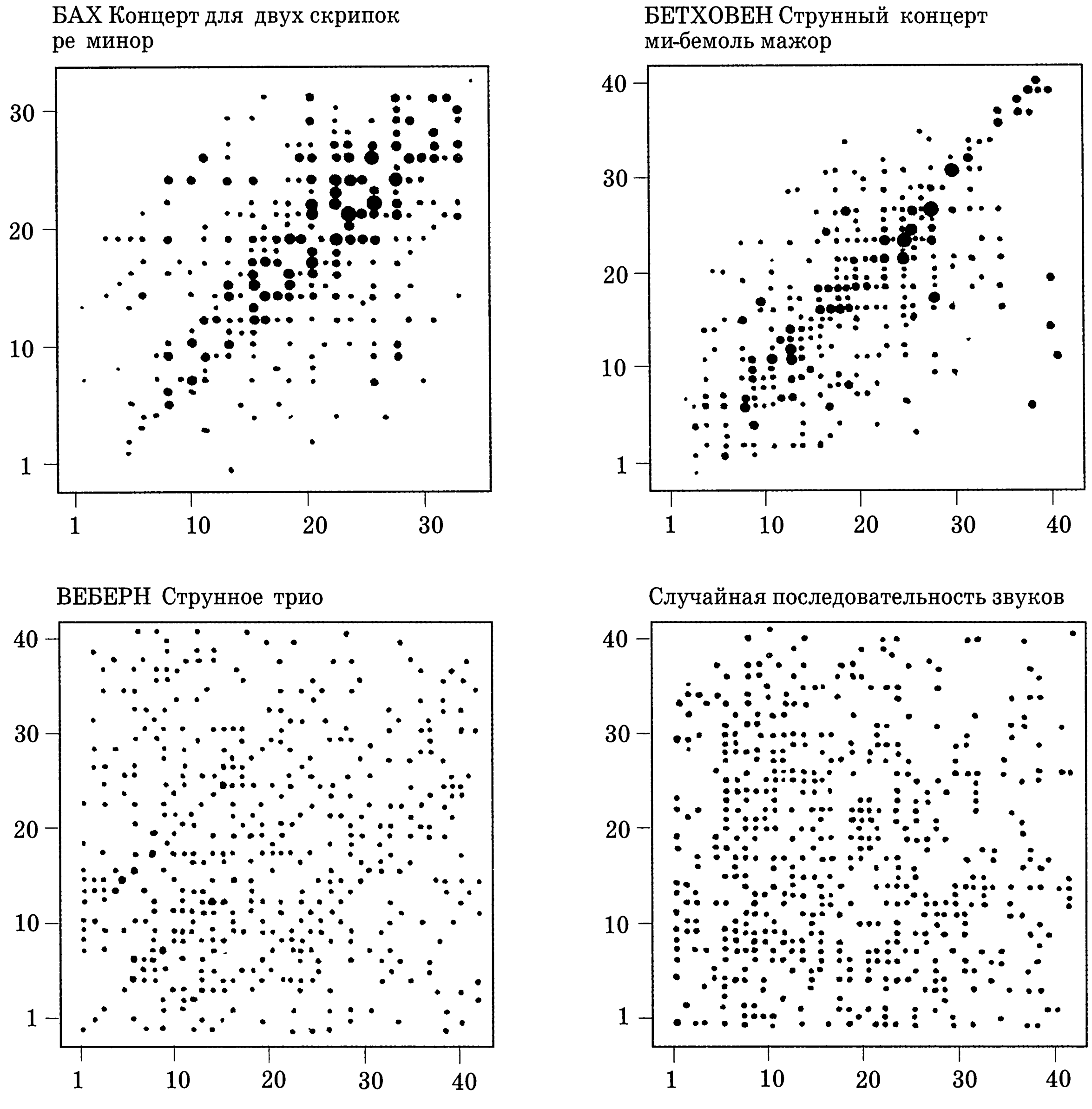
«Естественно,— отмечал Фукс,— музыковед в связи с нашими распределениями частот может поставить много критически окрашенных вопросов. Так, степень важности партии первой скрипки может быть очень различной в разных частях сочинения: в одной части она может решающим образом определять мелодию, ритм и гармонию, а в других местах сочинения играть роль, в музыкальном отношении подчиненную. Вопросы подобного рода, а также и другие важные обстоятельства должны, естественно, учитываться в тех ветвях

ТАБЛИЦА 4. Усредненные значения $\bar{\sigma}$ среднего квадратического отклонения высоты звуков музыкального произведения отражают определенный закон развития музыки: за последние 500 лет значение $\bar{\sigma}$ монотонно возрастает

Период, годы	Композитор	Произведение	σ	$\bar{\sigma}$
1530—1650	ВИЛЛАРТ	Фантазии	3,5	3,7
	МОДЕНА	Фантазии	3,6	
	ПАЛЕСТРИНА	Ричеркары	3,8	
	ХАСЛЕР	Интрады	3,4	
	ШЕЙН	Сюиты	4,6	
	РОЗЕНМЮЛЛЕР	Студенческая музыка	3,3	
1680—1740	КОРЕЛЛИ	Кончерто-гроссо № 8	4,7	5,4
	ВИВАЛЬДИ	Кончерто-гроссо № 2, соч. 3	5,4	
	БАХ	Концерт для двух скрипок *РЕ минор*	6,2	
1780—1825	МОЦАРТ	Скрипичный концерт *ЛЯ мажор*	6,9	7,1
	МОЦАРТ	Симфония *СОЛЬ минор*	7,0	
	БЕТХОВЕН	Пятая симфония	7,1	
	БЕТХОВЕН	Струнный квартет *МИ*-бемоль *мажор*	7,8	
	ШПОР	Скрипичный концерт *ЛЯ минор*	6,8	
1822—1900	ШУБЕРТ	Восьмая симфония	7,4	8,4
	ШУМАН	Вторая симфония	7,7	
	БРАМС	Скрипичный концерт	8,6	
	Р. ШТРАУС	«Тиль Уленшпигель»	8,2	
	ЧАЙКОВСКИЙ	Пятая симфония	8,7	
	ЧАЙКОВСКИЙ	Шестая симфония	10,0	
1930—1950	ХИНДЕМИТ	«Матисс-живописец»	8,2	8,5
	БАРТОК	Вторая сюита	9,5	
	ЭГК	Соната для оркестра	7,9	
1922—1960	ШЁНБЕРГ	Скрипичный концерт	10,9	10,8
	ВЕБЕРН	Струнное трио, соч. 20	10,4	
	ВЕБЕРН	Струнный квартет, соч. 28	9,9	
	БЕРГ	Струнный квартет, соч. 3	11,0	
	БЕРГ	Скрипичный концерт	9,4	
	НОНО	«Варианты»	13,0	

музыковедения, которые связаны с количественными исследованиями». Все это, разумеется, так, и у математического музыковедения непочатый край проблем. Но нельзя не видеть подкупающей простоты и универсальности найденных (пусть простейших) математических закономерностей. Зная эти закономерности, можно, например, подсчитать значение σ для произведения какого-то неизвестного нам автора и, пользуясь таблицей 4, отнести это произведение к тому или иному музыкальному направлению. Это будет уже некая «музыкальная криминалистика», построенная на базе математики. В подобной всеобщности и заключается могущество математического метода.

Сделаем еще один, последний шаг в нашем кратком знакомстве с математическим анализом музыки. Очевидно, что статистические распределения высоты звуков показывают лишь, сколько раз данный звук встречается в музыкальном произведении. Но ведь главным элементом музыки является *мелодия* — художественно осмысленная *последовательность* звуков в произведении. Информация же о последовательном расположении звуков в статистическом распределении высот теряется. Получить такую информацию нетрудно с помощью так называемых *матриц перехода*. Матрица перехода представляет собой квадратную таблицу, по горизонтальной и вертикальной осям которой отложены все звуки из диа-



Матрицы переходов в партии первой скрипки (площадь соответствующего кружка пропорциональна частоте перехода от одного звука к другому). Легко видеть, насколько закономерен характер переходов в музыке Баха и Бетховена и насколько он близок к случайному в музыке Веберна.

пазона звучания музыкального произведения. На пересечении строк и столбцов матрицы перехода ставится частота, с которой в данном произведении совершается переход от одного звука к другому.

На рисунке показаны матрицы переходов, составленные Фуксом, для знакомых нам произведений (взяты партии первой скрипки): концерта для двух скрипок РЕ *минор* Баха, струнного квартета МИ-бемоль *мажор* Бетховена и струнного трио Веберна. Четвертая матрица представляет частоты перехода для случайной последовательности звуков, которая была образована из того же звукового материала, что и сочинение Веберна. Для наглядности частота переходов характеризуется не цифрами, а площадью кружка (чем больше частота перехода, тем больше площадь соответствующего кружка). Простое сопоставление приведенных матриц убеждает в том, насколько строгими и закономерными являются переходы у Баха и Бетховена и насколько они близки к случайным у Веберна. Эти закономерности также можно описать численно с помощью так называемых *коэффициентов корреляции,* которые служат своеобразной «мерой беспорядка». Для последовательности случайных чисел, т. е. при полном беспорядке, коэффициент корреляции практически равен нулю. Наоборот, при сильной зависимости между элементами коэффициент корреляции близок к единице. В приведенных примерах коэффициент корреляции k для «случайной музыки» равен 0,03 (для трио Веберна k=0,06), т. е. музыка Веберна близка к «случайной музыке». Напротив, в концерте для двух скрипок Баха k=0,61, а в струнном квартете Бетховена k=0,76, т. е. музыка Бетховена является наиболее «закономерной».

Свой анализ матриц перехода Фукс заканчивает следующим замечанием: «Для читателей, интересующихся музыкой, стоит заметить, что из всех возможных переходов используется только небольшая их часть: у Баха — 23%, у Бетховена — 16% и у Веберна — 24% всех возможных связей в рассматриваемом диапазоне звуков. Однако уже из этих простых фактов, к которым можно было бы добавить и другие, вытекает следующее заключение. Возможности музыки, использующей классические инструменты — сочиненной по правилам контрапункта, додекафонной музыки или по каким-нибудь другим правилам,— еще никоим образом не исчерпаны».

Продолжая мысль Фукса, мы можем в заключение сказать, что возможности математических методов анализа музыки и произведений искусства вообще не только не исчерпаны, но представляют собой почти нетронутую целину для исследователя. Экспериментальная эстетика ждет еще своего Ньютона.

III

МАТЕМАТИКА И АРХИТЕКТУРА

О смертный! как мечта из камня я прекрасна!

. . . . .

В лазури царствую я сфинксом непостижным;
Как лебедь, я бела и холодна, как снег;
Презрев движение, любуюсь неподвижным;
Вовек я не смеюсь, не плачу я вовек.

Ш. БОДЛЕР

Архитектура — удивительная область человеческой деятельности. В ней тесно переплетены и строго уравновешены наука, техника и искусство. Только соразмерное, гармоническое единство этих начал делает возводимое человеком сооружение памятником архитектуры, неподвластным времени, подобно памятникам литературы, ваяния, музыки. Если же какой-то из элементов зодчества — наука, техника или искусство — начинает подавлять остальные, то истинная архитектура скатывается на одно из тупиковых направлений, именуемых функционализмом, техницизмом, эклектизмом или еще каким-нибудь «измом».

Но архитектура не только древнейшая сфера человеческой деятельности, не только «искусство строить», как определял ее еще Альберти, но и результат такой деятельности. Архитектура — это совокупность зданий и сооружений, это *пространство*, созданное человеком и необходимое для его жизни и деятельности. Эта искусственная среда, воздвигнутая человеческими руками, является непременным условием существования и развития общества.

Вот почему архитектура зарождается вместе с человеком и сопровождает человечество на всем его историческом пути. По образному выражению Гоголя, «...архитектура — тоже летопись мира: она говорит, когда уже молчат и песни, и предания и когда уже ничто не говорит о погибшем народе. Пусть же она хоть отрывками является среди наших городов в таком виде, в каком она была при отжившем уже народе, чтобы при взгляде на нее осенила нас мысль о минувшей жизни, и погрузила бы нас в его быт, в его привычки и степень понимания, и вызывала бы у нас благодарность за его существование, бывшее ступенью нашего собственного возвышения». Да, зодчество — это и «каменная летопись истории».

Без греческих и римских развалин, без узких средневековых улочек и таинственных замков, без кружева готических соборов и очарования древнерусских храмов наши представления о прошедших эпохах были бы невообразимо бедными.

Архитектура *бифункциональна*: она призвана отвечать не только эстетическим, но и утилитарным требованиям, она должна создавать не только прекрасное, но и полезное. Интуиция и расчет — непременные спутники зодчего.

Архитектура *триедина*: она извечно сочетает в себе логику ученого, ремесло мастера и вдохновение художника. «Прочность — польза — красота» — такова знаменитая формула единого архитектурного целого, выведенная два тысячелетия тому назад древнеримским теоретиком зодчества Витрувием (I в. до н. э.). Вот почему архитектура как нельзя более отвечает теме нашего разговора — взаимодействию науки и искусства.

Роль математики в формировании «прочности» и «пользы» архитектуры очевидна. Она такова же, какова роль математики в естествознании и технике, в которых со времен Галилея «царице всех наук» принадлежат только первые роли. Вот почему мы почти не будем касаться этой темы, которая могла бы составить содержание увлекательной книги. Нас же будет интересовать «неочевидный» вклад математики в красоту архитектуры, т. е. для нас архитектура будет прежде всего искусством. Но и в этой «подводной» части архитектурного айсберга математике, и прежде всего геометрии, принадлежит выдающаяся роль, о чем и пойдет речь в настоящей части книги.

15. АРХИТЕКТУРА= (НАУКА+ТЕХНИКА)·ИСКУССТВО

Все [в архитектуре] ... дóлжно делать, принимая во внимание прочность, пользу и красоту.

М. ВИТРУВИЙ

«Возвышенное чудо мира! Дух мой возносится в священном восторге, когда с удивлением взираю на твое неизмеримое великолепие. Своею немой бесконечностью ты пробуждаешь мысль за мыслью и не даешь успокоиться восхищенной душе». Так восторженно писал об архитектурном облике собора св. Петра в Риме Вильгельм Генрих Ваккенродер. Однако, если бы Ваккенродер был знаком с инженерной (внутренней) красотой собора, которая прячется за красотою его внешних архитектурных форм, ему бы пришлось повторить свой взволнованный монолог дважды.

В самом деле, строительство каменного купола собора диаметром 42 м представляло собой сложнейшую техническую задачу. Достаточно сказать, что за всю историю человечества построено только 4 сооружения, имеющие каменные купола диаметром более 40 м! Это Пантеон в Риме (123), собор Санта Мария дель Фьоре во Флоренции (1434), собор св. Петра в Риме (1590) и мавзолей Гол-Гумбаз в Биджапуре (Индия, 1656)[1]. Фундамент собора св. Петра был заложен в 1506 г., сооружение купола закончено в 1590 г., а грандиозный ансамбль площади собора со знаменитой 4-рядной колоннадой был завершен в 1663 г. На протяжении этих 150 лет строительством собора руководили такие замечательные художники и архитекторы, как Браманте, Рафаэль, Микеланджело, Виньола, Бернини. Хотя Микеланджело было 72 года, когда в 1547 г. он был назначен на должность архитектора собора, великий Буонарроти фактически заново разработал проект купола собора и еще 17 лет вплоть до своей смерти плодотворно руководил строительством этого грандиозного сооружения.

История строительства и дальнейшего существования собора полна драматических событий. Так, в 1740 г., через 150 лет после сооружения купола, некоторые трещины, неизбежно возникающие в кладке, расширились до угрожающих размеров. Это событие стимулировало новые теоретические исследования. В 1748 г. профессор экспериментальной философии (т. е. физики) университета в Падуе Джиованни Полени, опираясь на работы математика Стирлинга и механика Ла Гира, математически доказал, что купол собора находится в состоянии статического равновесия и появившиеся трещины угрозы не представляют. Прошедшие с тех пор 200 лет являются лучшим подтверждением справедливости математических расчетов Полени. К сожалению, теория каменных куполов была полностью завершена только в XX в., когда такие купола превратились в отжившую конструкцию и их перестали строить.

[1] В скобках указаны годы окончания строительства. Сравнивая их, остается только восхищаться мастерством древнеримских зодчих. Лишь через тысячу с лишним лет человечество почувствовало в себе силы повторить достижение древнеримских строителей. Точнее, только приблизиться к нему, ибо купол Пантеона диаметром 43 м, видимо, навсегда останется самым большим каменным сводом.

СОБОР СВ. ПЕТРА в Риме. (*Ватикан*). *1506—1663 гг.* Одно из лучших мировых купольных сооружений, главный храм католической церкви. В 42-метровом каменном куполе собора навеки материализовалась неиссякаемая энергия его создателя — великого Микеланджело.

История собора св. Петра в Риме убеждает в том, что зодчество представляет собой сложный узел научных, технических и эстетических проблем. Архитектура парадоксально соединяет в себе результаты научного поиска, строительной деятельности и художественного творчества, инженерный расчет, научное знание и художественное озарение.

«Прочность — польза — красота»,— говорит формула архитектуры Витрувия. Прочность не случайно стоит в ней на первом месте. Вся история архитектуры есть история созидания прочности, история борьбы с действием всемогущей силы тяготения. Недаром самый первый строительный кодекс, составленный в царствование вавилонского царя Хаммурапи за 1800 лет до нашей эры, гласит: «Если строитель построил дом для человека, и работа его не крепка, и дом, построенный им, обвалился и убил владельца, то строитель сей должен быть казнен». (Эта запись вытесана на колонне, ныне хранящейся в парижском Лувре.) Мелькали годы, проходили эпохи, менялись строительные материалы, а значит, и конструкции архитектурных сооружений, но всегда соображения прочности были определяющими в выборе новой архитектурной конструкции.

Но если относительно «прочности» у архитекторов никогда сомнений не возникало, то «польза» и «красота» являются предметом постоянных дискуссий. Впрочем, дискуссии о красоте и целесообразности (пользе) не являются привилегией одних только архитекторов. Это общеэстетическая проблема, уходящая корнями в седую древность. «Прекрасно то, что хорошо служит данной цели»,— учит Сократ. «Дома строят для того, чтобы в них жить, а не для того, чтобы ими любоваться»,— вторил Сократу через 2000 лет Фрэнсис Бэкон. Увлечение формулой Бэкона еще через 300 лет привело к тому, что безликие фасады со скоростью произрастания сорняков расплодились по всему земному шару. Невозможно стало отличить не только два новых дома, но и два новых района и даже два новых города. Архитектурная безликость стала притчей во языцех, сделав возможными смешные коллизии типа той, что произошла в пьесе Э. Брагинского и Э. Рязанова «С легким паром!». Надо сказать, что на сегодняшний день ошибочность увлечения одной только пользой в архитектуре осознана всеми и делаются серьезные шаги по преодолению этого заблуждения.

Есть и другая крайность во взглядах на соотношение пользы и красоты. Известный нам Джон Рескин говорил: «Искусство — это то, что бесполезно. Как только вещь становится полезной, она более не может быть красивой». Англичанина Рескина поддерживал француз Теофил Готье: «По-настоящему прекрасным является только то, что ничему не служит». По-видимому, те же взгляды на соотношение пользы и красоты имели и фараоны Древнего царства, жившие за 4500 лет до Рескина и Готье. Во всяком случае, построенные ими пирамиды останутся в истории человечества непревзойденным образцом самого грандиозного и самого бесполезного сооружения. Только в условиях рабовладельческого строя возможна была такая бессмысленная трата человеческой энергии, когда сто тысяч рабов в течение двадцати лет возводили гробницу для одного из смертных — фараона Хеопса. Внутренний, полезный объем пирамиды настолько ничтожен, что ее вообще с трудом можно отнести к архитектурному сооружению.

Зато прочность пирамид недосягаема. Желая прославить своего фараона в веках, древнеегипетские зодчие из всех геометрических тел выбрали именно пирамиду. Выбор этот не случаен, ибо в условиях земного тяготения пирамида является наиболее устойчивой конструкцией, способной существовать в веках без риска обвалиться или рассыпаться. Главное правило устойчивости конструкции — уменьшение ее массы по мере увеличения высоты над землей — выражено в пирамиде с предельной ясностью и симметрией. Рациональность, «полезность» геометрической формы пирамиды заставляют забыть о ее утилитарной бесполезности. Именно эта геометрически оправданная форма пирамиды, подчеркнутая ее циклопическими размерами и точной системой пропорций, придает пирамиде ни с чем не сравнимую выразительность, особую красоту и величие, вызывает ощущение вечности, бессмертия, мудрости и покоя.

«Сорок веков смотрят на вас с высоты этих пирамид» — эти слова генерал Бонапарт произнес перед сражением при египетских пирамидах 21 июля 1798 г. Однако отнюдь не философские размышления, а сиюминутные честолюбивые планы вызывал у генерала вид четырехтысячелетних сооружений. Для генерала Бонапарта предстоящее сражение было еще одним шагом на пути к короне императора Наполеона...

А пирамиды продолжают бесстрастно взирать на проходящих у их подножия людей, прославляя в веках мудрость, мастерство и вдохновение древнеегипетских зодчих.

Все минет. Как льется вода,
Исчезнут в веках города,
Разрушатся стены и своды,
Пройдут племена и народы;
Но будет звучать наш завет
Сквозь сонмы мятущихся лет!
Что в нас, то навек неизменно.
Всё призрачно, бренно и тленно, —
Песнь лиры, созданье резца.
Но будем стоять до конца.
Как истина под покрывалом Изиды,
Лишь, мы, Пирамиды!

(В. Брюсов)

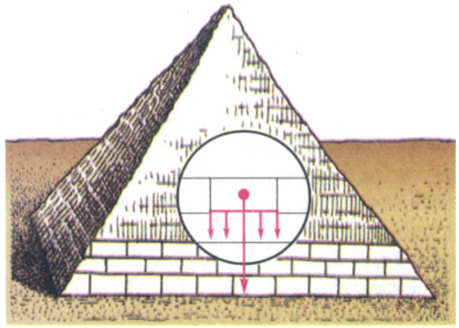
Разговор о египетских пирамидах незаметно привел нас к важнейшей проблеме архитектурной теории: проблеме соотношения конструкции и архитектурной формы. Только единство конструкции и наружной формы придает строению качество, именуемое архитектурной истиной. Диалектическое единство внутренней конструкции и внешней формы является главнейшим правилом образования архитектурных форм. Суть этой проблемы точно схвачена в афоризме французского архитектора Огюста Перре (1874—1954): «Тот, кто прячет колонну, столб или какую-либо несущую часть, допускает ошибку; тот, кто делает ложную колонну, совершает преступление».

Конструкция древнеегипетской пирамиды является самой простой, прочной и устойчивой. Вес каждого верхнего блока пирамиды по всей поверхности передается нижним блокам. Форма пирамиды представляет полное единство с ее конструкцией. Однако такая конструкция не создает внутреннего объема и, по существу, не является архитектурной конструкцией.

Простейшей и древнейшей архитектурной конструкцией является *стоечно-балочная система*. Ее прототипом был *дольмен* — культовое сооружение, состоящее из двух вертикально поставленных камней, на которые наши предки водрузили третий горизонтальный камень. Назначение дольмена до конца не выяснено. Но ясно одно: дольмен — это гимн человека о преодолении силы тяжести, это вступление к грандиозной архитектурной симфонии будущего.

Со временем дольмен перерос в *кромлех* — сооружение, служившее, по всей видимости, для жертвоприношений и ритуальных торжеств. Кромлех состоял из огромных отдельно стоящих камней, которые накрывались горизонтальными камнями и образовывали одну или несколько концентрических окружностей. Самый значительный и загадочный кромлех сохранился в местечке Стонхендж (Англия) и относится к XX—XVII вв. до н. э. Есть основания считать, что он был и древней астрономической обсерваторией.

В дальнейшем оставалось только придать каменному столбу кромлеха форму лотоса или изящной женской фигуры — кариатиды (по-гречески «девушки»), и стоечно-балочная конструкция превращалась в произведение искусства. Такое чудесное превращение мы видим в колоннах



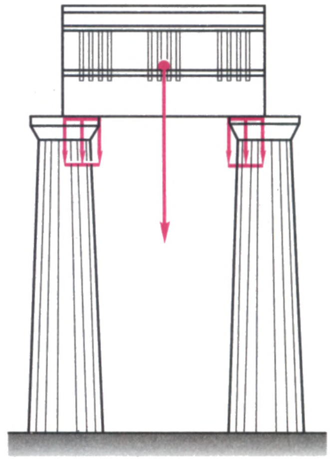
ПИРАМИДА фараона Хеопса в Гизе. *XXVIII в. до н. э.*
Первоначальная высота пирамиды — 147 м. Это самая большая из древнеегипетских пирамид и вплоть до XIX в. самое высокое из рукотворных сооружений.

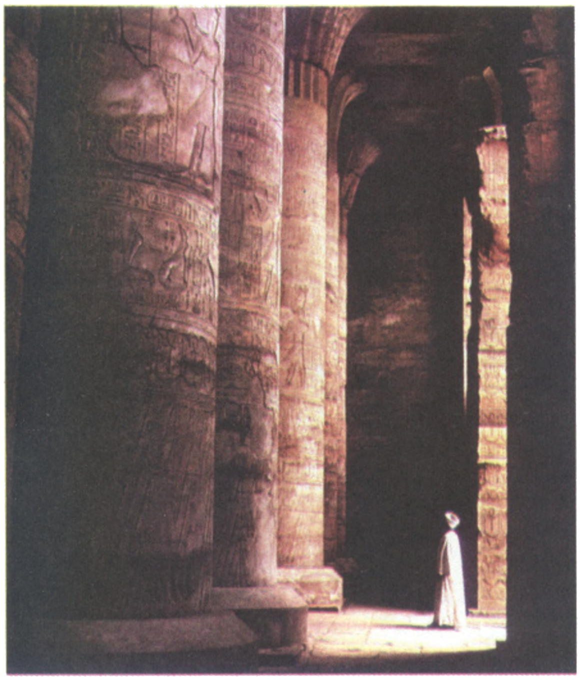
древнеегипетского храма бога Амона в Карнаке (XV в. до н. э.) или в кариатидах древнегреческого храма Эрехтейон на афинском Акрополе (421—406 гг. до н. э.).

Разумеется, стоечно-балочная конструкция проигрывала пирамиде в устойчивости и распределении веса, но она позволяла создавать внутренние объемы и, безусловно, явилась выдающимся завоеванием человеческой мысли. Главным же недостатком такой конструкции было то, что камень плохо работает на изгиб. Каменный брус сечением 10×10 см и длиной 1 м 34 см обламывается под действием собственного веса. Вот почему в храме Амона в Карнаке мы видим такой лес колонн. Зато камень прекрасно работает на сжатие. Это свойство камня и дало жизнь новой архитектурной конструкции — *арке*, а затем и *своду*.

Родившись в Месопотамии и Персии, арочно-сводчатая конструкция была доведена римлянами до совершенства и стала основой древнеримской архитектуры. Арочно-сводчатая конструкция позволяла римлянам возводить гигантские сооружения. Это амфитеатр Флавиев (Колизей — от лат. *colosseus* — колоссальный; 75—80 гг.) — самое высокое (48 м) из сохранившихся сооружений античного Рима, вмещавшее 56 тысяч зрителей. Три яруса арок Колизея являются необходимым элементом его конструкции и неотъемлемой частью его архитектурной формы. Построенный за 10 лет, впоследствии Колизей в течение многих веков использовался как каменоломня. Это гигантские термы (бани) Каракаллы (нач. III в.) и Диоклетиана (нач. IV в.) в Риме, вмещавшие одновременно до 3 тысяч посетителей. Римские термы имели мощные цилиндрические и крестовые своды огромной высоты, были пышно украшены мозаикой, скульптурой, росписями, имели залы для омовения, массажа, сухого потения, гимнастических упражнений и даже библиотеки и походили скорее на дворцы. Это система арочных водоводов-акведуков (пролет арок — от 5 до 25 м, высота — более 40 м, общая протяженность — до 60 км), которые стали неотъемлемой частью римского пейзажа. И наконец, вершина древнеримского строительного искусства — Пантеон — храм всех богов. Мы уже отмечали, что в «классе каменных куполов» 43-метровый купол Пантеона в истории зодчества остался недосягаемым. Пантеон не только вершина научных и технических достижений древнеримских строителей, но и шедевр архитектурного искусства. В интерьере Пантеона достигнута гармония между высотой и диаметром сооружения, которая имеет простое математическое выражение: высота стен Пантеона равна радиусу полусферы его купола, т. е. весь Пантеон как бы наброшен на 43-метровый шар. Цельность и величественность Пантеона оказали огромное влияние на многие поколения архитекторов.

Арки и своды произвели революцию в архитектуре. С того момента, как в арке устанавливался замковый камень, она становилась самонесущей конструкцией. (Поэтому процесс установления замкового

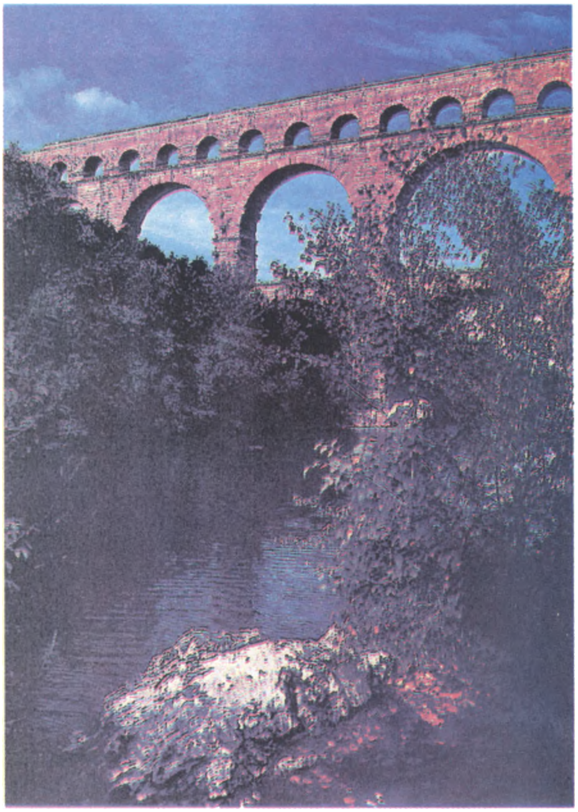




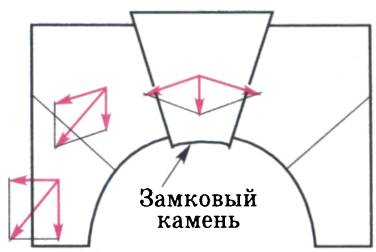
КОМПЛЕКС СТОНХЕНДЖ *(Англия).*
XX—XVIII вв. до н. э. (вверху слева).
Схема действия веса балки на опоры *(вверху).*
КАРИАТИДЫ храма Эрехтейон *(Греция). V в. до н. э. (внизу слева).*
ХРАМ АМОНА в Карнаке *(Египет). XV в. до н. э. (внизу справа).*
Развитие стоечно-балочной конструкции в архитектуре.

камня сопровождался религиозной церемонией, а камень старались как-то украсить.)

Римские арки, своды и купола были неизменно полуциркульными. Здесь, видимо, сказывалось влияние пифагорейской философии, считавшей круг и сферу идеальными фигурами, а также, безусловно, простота построения. Как бы то ни было, с появлением арочно-сводчатой конструкции в архитектуру прямых линий и плоскостей пришли окружности, сферы и круговые цилиндры, что сделало геометрический язык архитектуры значительно богаче. Однако полуциркульная арка или полусферический купол давали сильный боковой распор, что ясно видно из схемы сил, действующих в арке. Боковые усилия приходилось гасить толщиной стен и устройством дополнительных контрфорсов (толщина стен Пантеона достигала 7 метров!), а это влекло огромный расход строительных материалов.



АМФИТЕАТР ФЛАВИЕВ *(Колизей).*
Рим. 75—80-е гг. (вверху слева).
АКВЕДУК. «Гардский мост» близ Нима.
Франция. I—II вв. (внизу слева).
ПАНТЕОН (интерьер и внешний вид).
Рим. 123 г. (справа). Здание освещается через 9-метровое отверстие в центре полусферического купола.
Схема усилий в полуциркульной арке.
Арочно-сводчатая конструкция в древнеримской архитектуре.



Рим пал, растоптанный варварами, а вместе с Римом пало и рабовладение. Средневековые мастера уже не могли себе позволить гасить огромные распоры от полуциркульных сводов семиметровыми стенами. Камень был дорог, да и каменотесам нужно было платить. Благо, вместе с пленниками-сарацинами крестоносцы привезли в Европу секреты возведения *стрельчатых арок*. Так новая конструкция породила новую архитектуру — *готику*.

Стрельчатая арка по сравнению с полуциркульной является более совершенной конструкцией: она вызывает меньший боковой распор, а следовательно, и меньший расход камня. Очевидно также, что стрельчатая арка имеет более сложную геометрическую форму по сравнению с полуциркульной, которая строится одним движением циркуля. На примере трех конструкций — стоечно-балочной, арочной и стрельчатой — мы видим, что по мере совершенствования конструкции усложняется и ее геометрия. Современная архитектура подтверждает эту закономерность.

Стрельчатая арка привнесла в готическую архитектуру два конструктивных новшества. Во-первых, стрельчатые своды стали выполнять на *нервюрах* — каменных ребрах, несущих независимые друг от друга части свода — *распалубки*. Нервюры служат как бы скелетом свода, они берут на себя основную нагрузку. В результате конструкция свода становится более гибкой: она может выдерживать те деформации, которые для монолитного свода окажутся губительными. Таким образом, нервюры явились прототипом современной каркасной конструкции.

Во-вторых, боковой распор от стрельчатого свода средневековые зодчие решили гасить не в самих стенах, несущих этот свод, а вне их. Для этого за пределами внутреннего пространства готического собора ставились специальные опоры — *контрфорсы,* нагрузка на которые передавалась с помощью арочных конструкций — *аркбутанов*. Аркбутаны, словно растопырившиеся ребра рыбьего скелета, окружали снаружи готический собор.

Зато внутренним опорам и стенам готического собора оставалась лишь одна вертикальная нагрузка — вот почему их можно было делать более тонкими и изящными. Со временем центральные устои готического храма превратились в пучок нервюр, которые, словно преодолев земное притяжение, стремительно возносились к небу. Стрельчатая форма арок подчеркивала это безудержное стремление ввысь. Самые высокие своды имели соборы Северной Франции: собор в Амьене (1288 г., 43 м) и собор в Бове (1347 г., 48 м). Своды готического собора будто парили далеко в вышине, освещенные вибрирующими потоками света от цветных витражей. Поскольку вертикальную нагрузку готического храма нес пучок нервюр, центральные стены как несущие конструкции оказались ненужными, и их заменили цветными витражами. Вы слышите, как перекликаются готические конструкции XII—XV вв. с современными архитектурными конструкциями, у которых нагрузку взял на себя тонкий железобетонный каркас, а стены стали стеклянными?

Однако потребовалось еще не одно столетие, чтобы каркас преодолел силу, куда более значительную, чем земное тяготение,— силу инерции человеческого мышления. Слишком привычным и естественным было видеть основу архитектурной конструкции в толстых стенах, несущих основную нагрузку. Правда, было и еще одно сдерживающее обстоятельство: нужен был новый материал для каркаса, более технологичный и дешевый, чем камень. Такой материал появился лишь в XIX в. Это был металл.

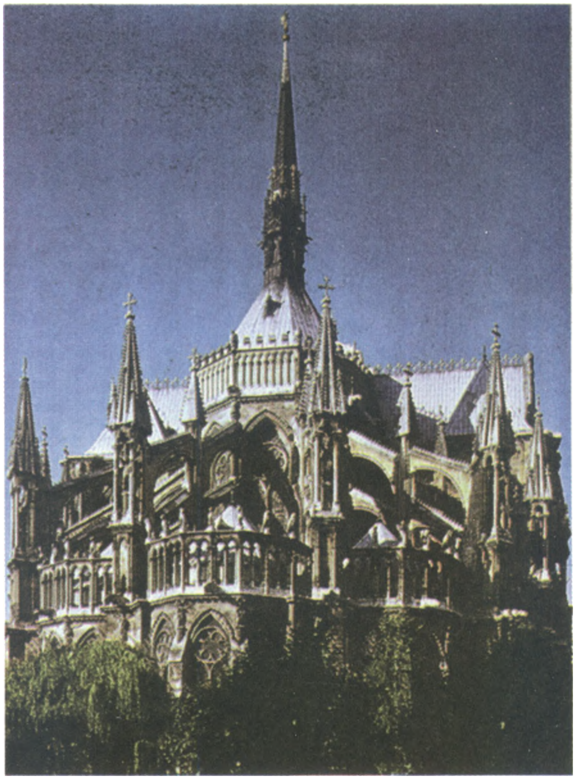
XIX в. можно назвать «железным веком» в истории человечества: железные дороги и паровые машины, первый железный мост через Темзу (1816), первые застекленные металлические крыши (типа крыши московского ГУМа), металлические купола, быстро побившие недосягаемые древнеримские рекорды, и металлические пролеты, превысившие к концу века 100-метровый рубеж. В 1889 г. к открытию Всемирной выставки в Париже как символ победоносного шествия металла в технике и архитектуре была построена знаменитая Эйфелева башня по проекту французского инженера Гюстава Эйфеля (1832—1923). Она сразу вдвое перекрыла все рекорды по преодолению высоты, взметнувшись вверх на 312,6 метра! Так был побит самый долговечный рекорд в истории человечества:

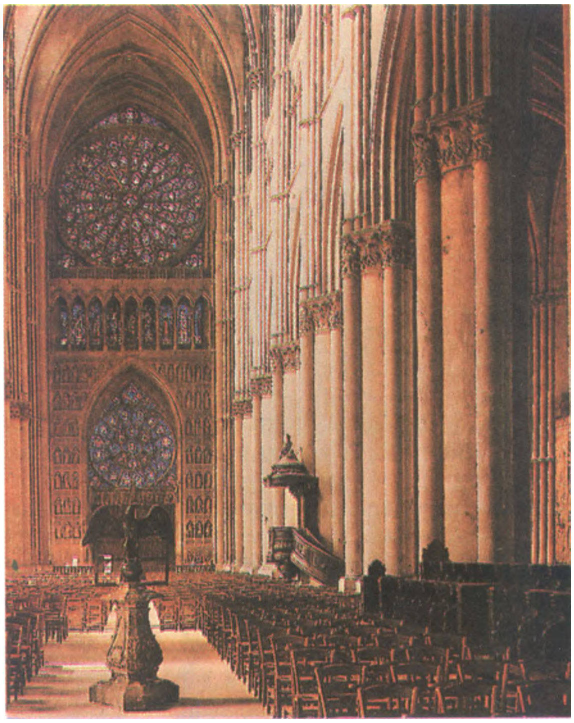
ведь пирамида Хеопса в течение 45 веков оставалась самым высоким творением рук человека. Первоначальная высота пирамиды Хеопса была 147 м, хотя к настоящему времени ее верхушка обвалилась и пирамида стала на 10 м ниже. Шпили готических соборов лишь приближались к этой отметке. Самым высоким в Англии был собор в Солисбери (1258 г., 123 м), а во Франции — Страсбургский собор (1439 г., 142 м). Башня собора в Бове, построенная в 1569 г., лишь на 8 метров и только на 4 года побила рекорд высоты пирамиды Хеопса, а затем рухнула. Крест собора св. Петра в Риме был поднят на высоту 138 м. Только в XIX в. шпиль Ульмского собора поднялся на 12 м выше пирамиды Хеопса. И вот в конце XIX в. принципиально новая конструкция из принципиально нового материала дает принципиально новый результат!

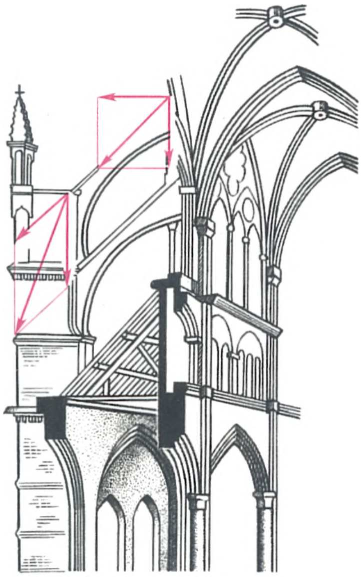
Однако объявлять Эйфелеву башню произведением искусства парижане не спешили. «Здесь нет искусства, один металл!» — возмущались они. «Я бежал из Парижа, а затем покинул Францию, потому что меня навязчиво преследовал вид Эйфелевой башни,— писал Ги де Мопассан.— Вообразите же, что скажут отдаленные потомки о нашем поколении, если только вспышка народного гнева не повалит эту высоченную и тощую пирамиду железных лестниц».

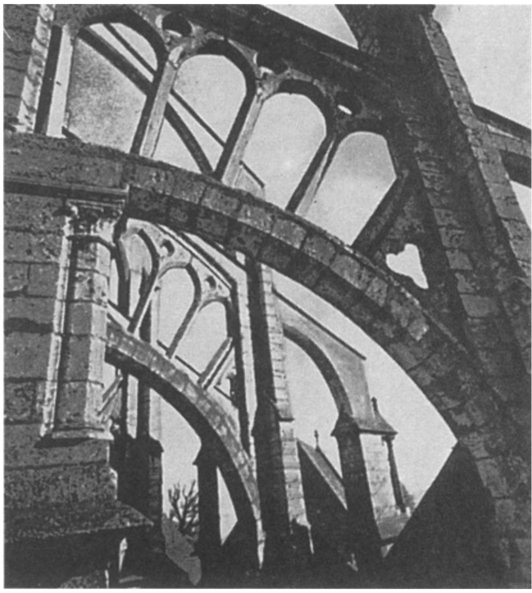
Но не отдаленные потомки, а уже следующее поколение парижан не мыслило себе родного города без Эйфелевой башни. И конечно же бессмертие принесла Эйфелевой башне не ее конструкция, которая сегодня кажется архаичной, а пропорциональность и гармоническое единство ее форм, т. е. как раз то, что и делает строительную конструкцию произведением архитектурного искусства.

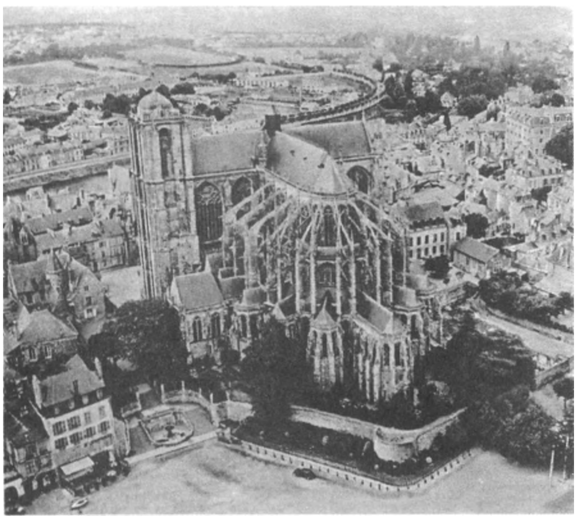
«Век железа» в архитектуре оказался недолгим. С новым XX в. пришел и новый необычный материал — *железобетон,* совершивший подлинную революцию в зодчестве. «Первая ласточка» новой архитектуры появилась в 1903 г. Это был жилой дом архитектора О. Перре в Париже — железобетонный каркас с большими остекленными проемами. Перре доказал, что возведение домов из кирпича и камня с массивными стенами необязательно. Так начался «век железобетона».











СОБОР В ШАРТРЕ. Аркбутаны. *1134—1260 гг.* (с. 200).
СОБОР В РЕЙМСЕ. Витражи центрального нефа и апсида. *1211—1427 гг.* (с. 200).
СОБОР В АМЬЕНЕ. Западный фасад. *1220—1288 гг.*
Схема усилий в аркбутане и контрфорсе.
Полукружья арок аркбутанов готического собора. *Ближний план.*
Аркбутаны собора в Ле Мане с высоты птичьего полета. *1217—1254 гг.*
Готическая архитектура. Новая конструкция, породившая и новую, устремленную ввысь, архитектурную форму.

Железобетон открывал невиданные возможности перед архитекторами: он был дешев, обладал необходимой прочностью, мог непрерывно переходить из одной формы в другую. Неудивительно, что зодчие спешили проверить новый материал на перекрытиях, сооружение которых всегда представляло одну из важнейших технических проблем. Скорлупа обычного куриного яйца была для архитекторов эталоном прочной и легкой конструкции. Отношение диаметра большого куриного яйца к толщине скорлупы равно в среднем 130. Такое соотношение между диаметром пролета и его толщиной казалось недостижимым. Например, для Пантеона в Риме оно равнялось 11, т. е. было на порядок меньше. И вот железобетонные «скорлупки» опрокидывают все традиционные представления и оставляют далеко позади рекорды куриного яйца. Наглядное представление о динамике этого важного в архитектуре параметра дает таблица 5 (с. 202).

Строительство железобетонных покрытий требовало опалубки, удерживающей жидкий бетон и придающей ему лучшую форму. Опалубку же удобнее всего делать из прямых досок. Простейшие поверхности, образованные движением прямой в пространстве и называемые *линейчатыми поверхностями* — цилиндры и конусы,—

ТАБЛИЦА 5. Динамика отношения диаметра оболочки к ее толщине в истории архтитектуры

Наименование объекта, тип оболочки	Год окончания строительства	Пролет, м	Средняя толщина оболочки, м	Отношение пролета к толщине
Большое куриное яйцо	—	0,04	0,0003	133
Пантеон в Риме. Бетонный купол	123	43	4	11
Флорентийский собор. Купол из камня и кирпича	1434	42	3,7	11
Планетарий в Иене. Железобетонный купол	1924	25	0,06	417
Театр в Новосибирске. Железобетонный купол	1945	55	0,08	688
Выставочный зал в Париже. Двухслойный железобетонный свод	1958	219	0,12	1825

были известны давно. Еще древние римляне сооружали цилиндрические своды. А существуют ли другие линейчатые поверхности? Ответ на этот вопрос архитекторам подсказали математики, которые обнаружили еще два типа линейчатых поверхностей:

однополостный гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad (15.1)$$

гиперболический параболоид:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z. \qquad (15.2)$$

Канонические уравнения поверхностей (15.1) и (15.2) легко представить в виде

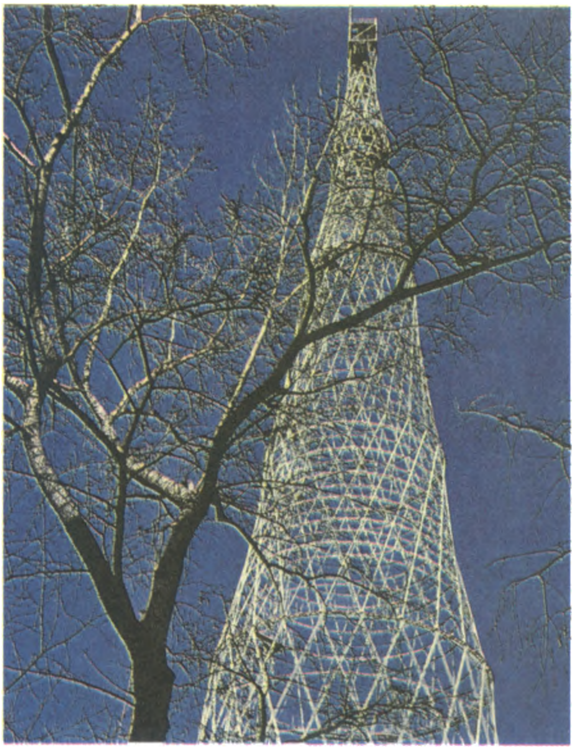
$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

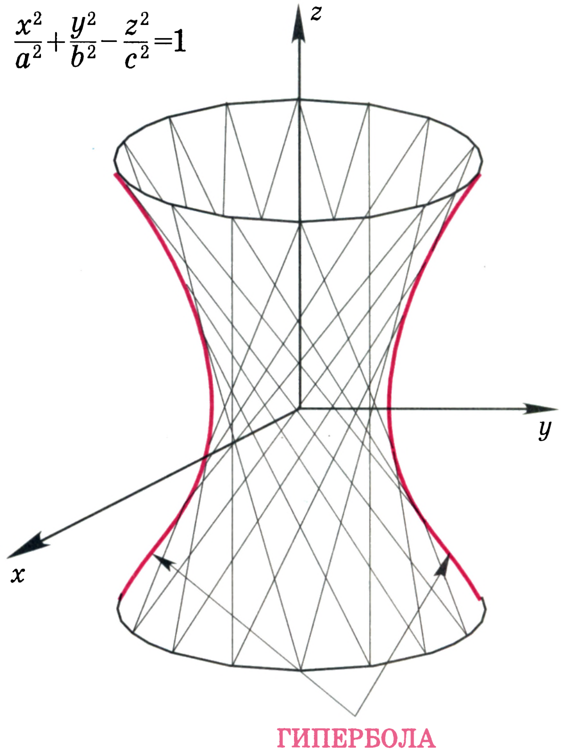
$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z,$$

откуда и видно, что они образованы двумя семействами прямых в пространстве (в уравнение прямой переменные x, y, z входят только в первых степенях).

Архитекторы воспользовались открытием математиков. Форму однополостного гиперболоида имеют градирни — устройства для охлаждения воды атмосферным воздухом. Линейчатое свойство однополостного гиперболоида положено в основу конструкции Шаболовской радиобашни в Москве, построенной по проекту замечательного русского инженера, почетного академика В. Г. Шухова (1853—1939). Башня Шухова состоит из нескольких поставленных друг на друга частей однополостных гиперболоидов, причем каждая часть сделана из двух семейств прямолинейных балок, соединенных в точках пересечения. Шухов построил около 200 башен самых оригинальных конструкций, спроектировал около 500 мостов через Волгу, Енисей и др.

Если однополостный гиперболоид отдает должное «пользе» в архитектуре, то гиперболический параболоид (архитекторы называют его красивым сокращенным именем *гипар*) благодаря своей выразительной и элегантной форме служит «красоте». Архитектурные возможности гипаров открыл инженер Феликс Кандела — испанский патриот, сражавшийся против фашистской диктатуры Франко, в 1939 г. вынужденный эмигрировать в Мексику. Кандела с блеском продемонстрировал выразительные свойства гипаров на различных сооружениях — от промышленных зданий до ресторанов, ночных клубов и церквей. Объединяло столь функционально несхожие сооружения одно: в них математическая поверхность становилась произведением архитектурного искусства. Линейчатое свойство гипаров позволяет разрезать их по прямолинейным образующим и составлять из нескольких гипаров экзотические конструкции. Именно так поступил в 1958 г. Ле Корбюзье, построив причудливый павильон фирмы «Филипс» на Международной выставке в Брюсселе.





В. Т. ШУХОВ. Радиобашня (впоследствии телебашня) на Шаболовке.
Москва. 1922 г.
Линейчатое свойство однополостного гиперболоида.

Точно сказал о внутренней красоте гипаров один из ее приверженцев — американский инженер Вейдлингер: «Красота форм достигается не средствами «косметики», а вытекает из сущности конструкции. Сама по себе форма является почти эпюрой[1] усилий, которые она должна воспринять». А для людей, которые видят только внешнюю красоту гипаров, они напоминают крылья огромных фантастических птиц, опустившихся на нашу Землю лишь отдохнуть и в каждое мгновение готовых взмахнуть крыльями-гипарами и улететь в свои неведомые миры. Именно эта «вторая реальность», «поэтическое дыхание» и преобразуют математическую поверхность, строительную конструкцию в искусство, именуемое архитектурой.

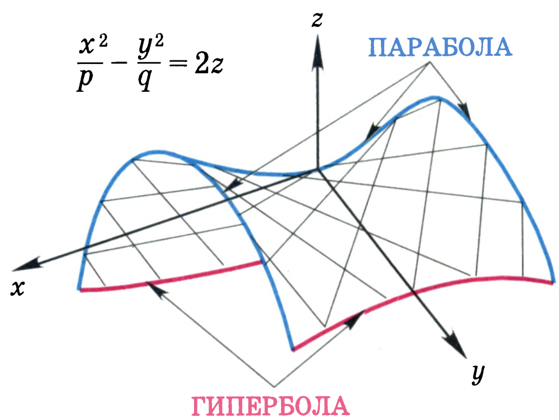
[1] *Эпюра* (от франц. *epure* — чертеж) — график закона изменения некоторой величины.

Ни один из видов искусств так тесно не связан с геометрией, как архитектура. «Окружающий нас мир — это мир геометрии чистой, истинной, безупречной в наших глазах. Все вокруг — геометрия. Никогда мы не видим так ясно таких форм, как круг, прямоугольник, угол, цилиндр, гипар, выполненных с такой тщательностью и так уверенно». Эти восторженные слова о геометрии принадлежат Ле Корбюзье. Корбюзье не сомневается в эстетическом превосходстве Порядка над Хаосом, и для него геометрия — это лучшее средство установления отношения порядка в искусстве архитектуры.

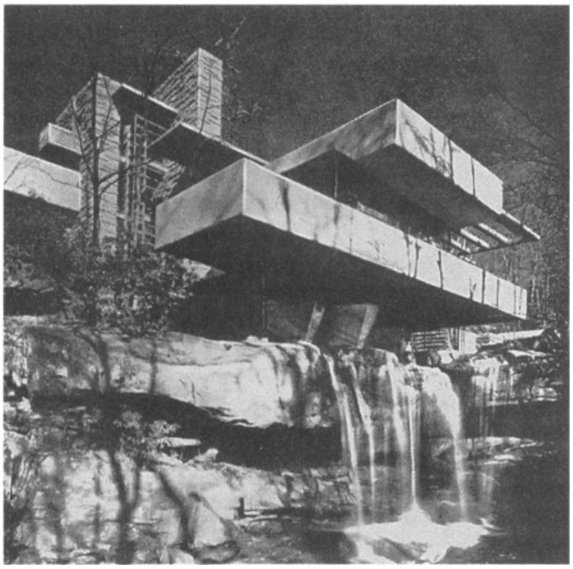
Но в отличие от абстрактной, математической геометрии архитектурная геометрия наполнена собственным эстетическим содержанием. Дело в том, что образы математической геометрии бестелесны: они не имеют толщины, не имеют веса и потому свободно парят в нашем воображении. Иное дело — образы архитектурной геометрии. Они созданы из конкретного материала: они весомы, они живут в поле земного тяготения. Геометрическую фигуру, например пирамиду, мы можем поворачивать в нашем воображении в любую сторону — от этого ее свойства не изменяются. Но попробуйте мысленно повернуть вершиной вниз пирамиду Хеопса, и вам сразу станет не по себе: пирамида начнет качаться из стороны в сторону и разваливаться на куски. Причина здесь очевидна: на пирамиду Хеопса даже в нашем воображении действует земное притяжение. И для того чтобы обеспечить своему сооружению бессмертие, древнеегипетский зодчий воплотил в каменной пирамиде важнейшее правило устойчивости и прочности конструкции — *расширение книзу*. Так пирамида в архитектуре закономерно стала олицетворением устойчивости и прочности, вечности и покоя. В этом ее эстетическое содержание. Художественное выражение закономерностей архитектурного сооружения или конструкции называется *архитектоникой* или просто *тектоникой*. Можно сказать, что пирамида является символом тектоники всей классической архитектуры, ее эстетическим флагом.

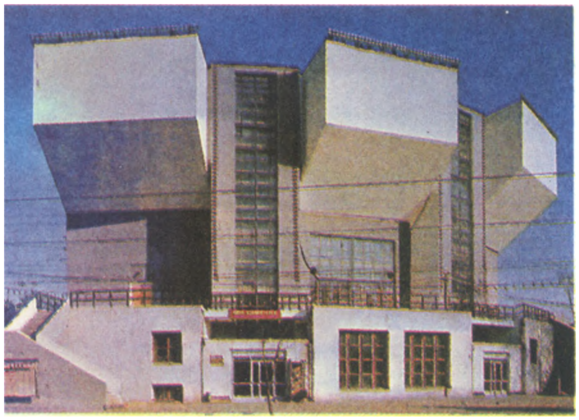
Современное зодчество бросило вызов классической тектонике. Получив в свое распоряжение особо прочные материалы и конструкции, оно стремится перевернуть вверх ногами «пирамиду архитектоники». Современная архитектура, будто преодолев силы тяготения, парит в воздухе. Человечество всегда мечтало о легкой и воздушной архитектуре, и вот в XX в. эти мечты обретают плоть. Горизонтальные плоскости, будто летящие в пространстве («Дом над водопадом» в Бер-Ране, США, арх. Ф. Райт, 1936 г.); гигантские нависающие объемы (Клуб им. И. В. Русакова в Москве, арх. К. Мельников, 1929 г.); V-образные опоры, оторвавшие здание от земли («Лучезарный дом» в Марселе, арх. Ле Корбюзье, 1952 г.); стены, превращенные в витражи, в которые любуются золотые купола Кремлевских соборов (Кремлевский Дворец съездов, арх. М. Посохин и др., 1961 г.); причудливые линии козырьков и сводов-оболочек в форме гипаров (церковь де ла Виргин Милагроза в Мехико, инж. Ф. Кандела, 1955 г.) — все это приметы современной архитектоники и ставшие классикой примеры современной архитектуры. Все эти приметы легко обнаружить в здании Штаб-квартиры ЮНЕСКО в Париже (арх. П. Нерви и др., 1957 г.), которое и было задумано как символ современной архитектуры.

А вот и символ современной архитектоники — проект музея современного искусства в столице Венесуэлы Каракасе. Проект создан лауреатом Ленинской премии мира, бразильским архитектором Оскаром Нимейром и представляет собой огромную пирамиду из стекла и бетона, стоящую «вверх ногами». Конечно, главное



Ф. КАНДЕЛА. Вечерний зал в Акапулько. *Мексика.*
Линейчатое свойство гиперболического параболоида.





Ф. РАЙТ. Дом над водопадом в Бер-Ране. *США. 1936 г.*
К. МЕЛЬНИКОВ. Клуб им. И. В. Русакова в Москве. *1929 г.*
Современная архитектура — это геометрия, парящая в воздухе.

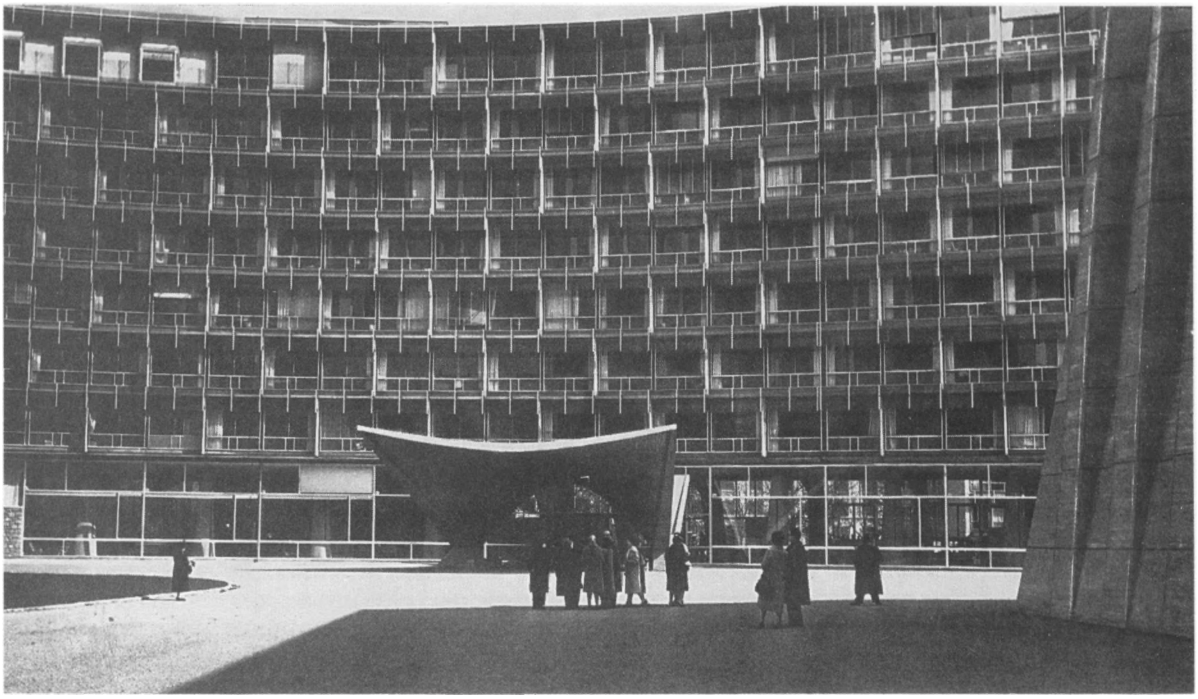
в проекте Нимейера — это вызов классической каменной тектонике, стремление выразить новые возможности новой архитектуры в новой, пусть даже парадоксальной форме. Право на жизнь новых идей доказывается в проекте Нимейера «методом от противного».

Проект Нимейера остался неосуществленным, но его смелые тектонические идеи дали свои всходы. Вот здание фирмы «Эссо» в Риме, построенное в 1980 г. архитекторами Дж. Лафуэнте и Г. Ребеккини. Здание напоминает три пирамиды в Гизе (см. с. 206), перевернутые «вверх ногами»; оно явно перекликается со знаменитым проектом Нимейера, хотя конструктивно решено по-своему. Веер стальных опор является конструктивным и эмоциональным стержнем здания, которое напоминает скорее не дом, а какой-то сложный механизм. Благодаря новым тектоническим идеям, цельности и геометричности всей композиции здание «Эссо» производит сильное впечатление, хотя, разумеется, и стоит особняком в архитектуре второй половины XX в.

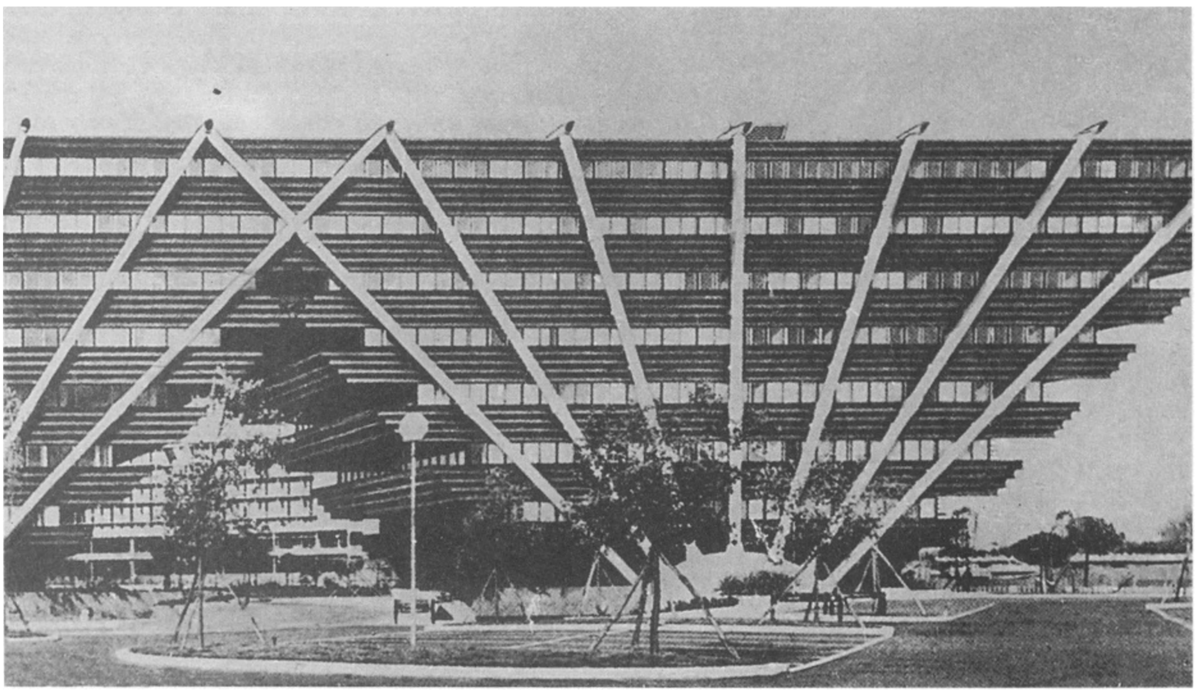
Возможно, «перевернутая пирамида» Оскара Нимейера или «падающие дома», проект которых разработан архитектором Г. Б. Борисовским, в будущем станут привычными элементами архитектурного пейзажа. Ведь стала же таким элементом V-образная опора, которая в соперничестве с античной колонной сужается, а не расширяется книзу! Несмотря на свое противоречие с законами старой, доброй классической тектоники, V-образная опора, форма которой непосредственно следует из эпюры распределения нагрузок в конструкции, сумела отстоять свое место под солнцем. Так формы «чистой» геометрии обретают в геометрии архитектурной новое эстетическое звучание.

Наш краткий обзор некоторых страниц истории архитектуры дает достаточно ясное представление о том, насколько тесно взаимосвязаны в ней наука, техника и искусство, как важна для архитектуры гармония определяющих ее начал: «прочности — пользы — красоты», как сказал Витрувий, или «конструкции — функции — формы», как любят говорить современные архитекторы. Вся история архитектуры — это история поисков гармонического единства «функции — конструкции — формы», это история непрерывного восхождения на пути к вершине, имя которой «прочность — польза — красота».

И все-таки одному из начал — красоте — зодчие придают особое значение, ибо без красоты, без искусства архитектуры вообще нет. Памятник архитектуры может стать непрочным и бесполезным (таковым



М. БРЕЙЕР, Б. ЗЕРФЮСС, П. НЕРВИ.
Здание ЮНЕСКО в Париже — классика современной архитектуры. *1957 г.*
Дж. ЛАФУЭНТЕ, Г. РЕБЕККИНИ.
Здание фирмы «ЭССО» в Риме — предвестник новой архитектоники. *1980 г.*



сейчас стал двадцатидвухглавый красавец Преображенский собор на острове Кижи — жемчужина древнерусского деревянного зодчества), но памятник архитектуры не может быть некрасивым, ибо в таком случае он из памятника превращается в строение. Вот почему в формуле архитектуры, данной известным архитектором, лауреатом Государственных премий Ф. А. Новиковым, искусство стоит не слагаемым, а сомножителем: *архитектура = (наука + +техника) · искусство.* Вот почему с этой формулы начинается настоящий параграф: она с математической откровенностью говорит, что если множитель «искусство» окажется равным нулю, то и весь результат —«архитектура» — будет равен нулю. И сколько бы мы ни увеличивали стоящие в скобках слагаемые, как бы ни были глубоки научные изыскания и сколь современна ни была бы строительная техника, их детище окажется мертвым, равным нулю, пока его не оживит волшебный сомножитель искусства. Вот об этом сомножителе в формуле архитектуры и пойдет речь далее.

16. ПРОПОРЦИЯ — МАТЕМАТИКА АРХИТЕКТУРНОЙ ГАРМОНИИ

Гармония — вот что лежит в основе всех видов искусства на всем протяжении человеческой истории.
И. ЖОЛТОВСКИЙ

Ты ползал вокруг могучих развалин, чтобы вымолить у них тайну пропорции.
И. В. ГЁТЕ

Весенним половодьем белым видением из сказочного града Китежа встает над водой, залившей луга, церковь Покрова Богородицы... «Сей же великий князь Андрей, аще печалию о скончавшемся сыне объят быв, и скорбяше, обаче более в богоугодныя дела поощряшеся... на реке Клязьме, в лугу, нача здати церковь во имя Пресвятыя Богородицы Честнаго ея Покрова, на устьи реки Нерли... и помощию Пресвятыя Богоматере оную церковь единым летом соверши»,— сказано в житии великого князя Андрея Боголюбского о постройке храма в лето 1165. Более восьмисот раз разливалась с тех пор тихая Нерль, и кажется, будто церковь Покрова родилась вместе с речкой, ее лугами и перелесками, а не стоит на искусственном холме, на мощном десятиметровом фундаменте, созданном руками человека...

В чем красота и очарование церкви Покрова на Нерли? Ведь она имеет скромные размеры (высота от основания до маковки — 24 м), ее архитектурные формы крайне просты, а белокаменные украшения сдержанны и лаконичны. И тем не менее церковь по праву считается жемчужиной русской архитектуры. Почему? Ответить на этот вопрос лучше всего словами выдающегося русского зодчего, автора гостиницы «Москва», Казанского вокзала, академика А. В. Щусева (1873—1949): «Пожалуй, самым трудным и вместе с тем обязательным в архитектурном творчестве является простота. Простота форм обязывает придавать прекрасные пропорции и соотношения, которые сообщили бы им необходимую гармонию».

Но и за 300 лет до Щусева представитель другой эпохи и другого архитектурного направления, французский зодчий Франсуа

ЦЕРКОВЬ ПОКРОВА БОГОРОДИЦЫ на Нерли. *1165 г.*
Весенним половодьем церковь плывет над водой, будто сказочное видение.

Блондель (1618—1686) в своем «Курсе архитектуры» восторженно писал о пропорциях: «Удовлетворение, которое мы испытываем, глядя на прекрасное произведение искусства, проистекает оттого, что в нем соблюдены правила и мера, ибо удовольствие в нас вызывают единственно лишь пропорции. Если же они отсутствуют, то, сколько бы мы ни украшали здание, эти наружные украшения не заменят нам внутреннюю красоту и привлекательность, коль скоро их нет, и, пожалуй, можно сказать, что уродство становится еще ненавистнее и невыносимее, чем пышнее наружные украшения, чем дороже или роскошнее материал... Дабы подкрепить наше утверждение, я заявляю, что красота, возникающая из меры и пропорции, вовсе не требует дорогих материалов и изящной работы, дабы вызвать восхищение, напротив, она сверкает и делается все ощутимее, проступая сквозь грязь и хаос материала и его обработки. Нам приятно смотреть на некоторые соотношения тех готических зданий, красота которых, очевидно, возникла из симметрии и пропорций между целым и частями и внутри отдельных частей, и видна, невзирая на уродливые трещины и скрывающие их украшения».

В чем же заключается сила архитектурных пропорций? В том, что *архитектурные пропорции — это математика зодчего.* А математика — это универсальный язык науки, поэтому мы можем сказать, что пропорции — это универсальный язык архитектуры, язык всеобъемлющий и всесильный, как всеобъемлюща и всесильна математика. Обратим внимание на то, что не случайно в высказываниях архитекторов о пропорциях так часто встречаются слова «внутреняя красота», «простота», «всеобщность», т. е. те же слова, которыми в главе 3 мы описывали качества математики.

Уже Платон глубоко понимал не только математическую, но и эстетическую сущность пропорции, позволяющей связывать целое и его части. Об этом свидетельствует следующий отрывок из «Тимея»: «Невозможно, чтобы две вещи совершенным образом соединились без третьей, так как между ними должна появиться связь, которая скрепила бы их. Это наилучшим образом может выполнить пропорция, ибо если три числа обладают тем свойством, что среднее так относится к меньшему, как большее к среднему, и, наоборот, меньшее так относится к среднему, как среднее к большему, то последнее и первое и будет средним, а среднее первым и последним».

Этот отрывок, как и все у Платона, не сразу поддается пониманию. Однако он станет совершенно прозрачным, если его перевести на язык математики. Вводя обозначения: a — большее («последнее») число, x — среднее число («связь»), y — меньшее («первое») число, имеем $x:y=a:x$, или $y:x=x:a$, или $ay=x^2$. С легкой руки Луки Пачоли (см. с. 220) считалось, что под x и y Платон понимал части целого a, т. е. что $x+y=a$, и поэтому Платон говорил о золотой пропорции (14.1) $a:x=x:(a-x)$. Отсюда пошло мнение, что античные пропорции основаны на золотом сечении. Однако, как считает сегодня архитектор И. Ш. Шевелев, такое мнение не обосновано и речь у Платона идет о геометрической пропорции общего вида $a:x=x:y$, откуда следует совершенно иная теория античных пропорций (см. гл. 18).

Пропорции являются важным и надежным средством зодчего для достижения хрупкого и тонко сбалансированного равновесия между целым и его частями, имя которому — гармония. Напомним, что по сравнению с композитором или скульптором архитектор находится в более сложном положении, ибо на пути к гармонии он должен заботиться не только о «красоте», но также и о «пользе» и «прочности». Еще Гораций в послании к братьям Пизонам «Наука поэзии» в образной форме говорил о том, как непросто красиво и целесообразно соединять части в единое целое, что взятые вместе «части»: лицо женщины, грива льва, тигровая шкура или павлиний хвост, которые сами по себе являются своеобразными эталонами красоты,— не только не дают нам прекрасного «целого» — гармонии, но представляют, по крайней мере, странное зрелище.

Если художник решит приписать к голове
человечьей
Шею коня, а потом облечет в разноцветные перья
Тело, которое он соберет по куску отовсюду —
Лик от красавицы девы, а хвост от чешуйчатой
рыбы, —
Кто бы, по-вашему, мог, поглядев,
удержаться от смеха?

Гармония в природе и гармония в архитектуре — две стороны единого великого процесса созидания. Замечательный зодчий и теоретик И. В. Жолтовский (1867—1959) считал творчество архитектора частью творчества природы. Широко известно высказывание Жолтовского о том, что архитектор — «дитя природы», что архитектурные формы должны члениться, следовать одна за другой, вырастать друг из друга, как ветви древесного ствола. Впрочем, ту же мысль на 500 лет ранее высказывал и Альберти: «Здание есть как бы живое существо, создавая которое следует подражать природе».

Гармонию в природе естествоиспытатели видят в целесообразном и совершенном устройстве мироздания, которое находит выражение в «красивых» математических уравнениях и принципах симметрии (см. гл. 6). Гармонию в архитектуре зодчие рассматривают как сложную иерархическую систему, которая связывает все элементы архитектурной композиции в единое художественное целое и которая проявляется опять-таки в математических законах, законах пропорциональности. Так, Жолтовский считал, что гармония в природе и гармония в архитектуре обретают одинаковое математическое выражение в законе золотого сечения.

Пропорциональность является наиболее ярким, зримым, объективным и математически закономерным выражением архитектурной гармонии. Пропорция — это математическая закономерность, прошедшая через душу зодчего, это поэзия числа и геометрии в его архитектурном языке. Вот почему на языке пропорций говорили зодчие всех времен и всех архитектурных направлений: древние египтяне и древние греки, средневековые каменотесы и древнерусские плотники, представители барокко и классицизма, конструктивисты и рационалисты, апологеты эклектизма и функционализма, поклонники «модерна» и «хай-тека».

К сожалению, ни древние египтяне, ни древние греки, ни средневековые каменщики, ни плотники Древней Руси не сохранили для потомков секреты своих пропорций. Ни в уцелевших фрагментах пифагорейцев, ни в трудах Платона, Аристотеля, Архита, Евклида, Архимеда, Аполлония нет ни намека на теорию архитектурных пропорций. И это в то время, когда Пифагор знал по крайней мере три вида «древних» пропорций (7.1), когда Платон в «Тимее» доказывал, что красота полностью зависит от совершенства пропорций, а Евклид в «Началах» дал развитое математическое учение о пропорциональности и применял правило золотого сечения для построения правильного пятиугольника! Единственное дошедшее до нас античное сочинение о зодчестве — это знаменитые «Десять книг об архитектуре» Витрувия, время написания которых относят к 27—14 гг. до н. э.

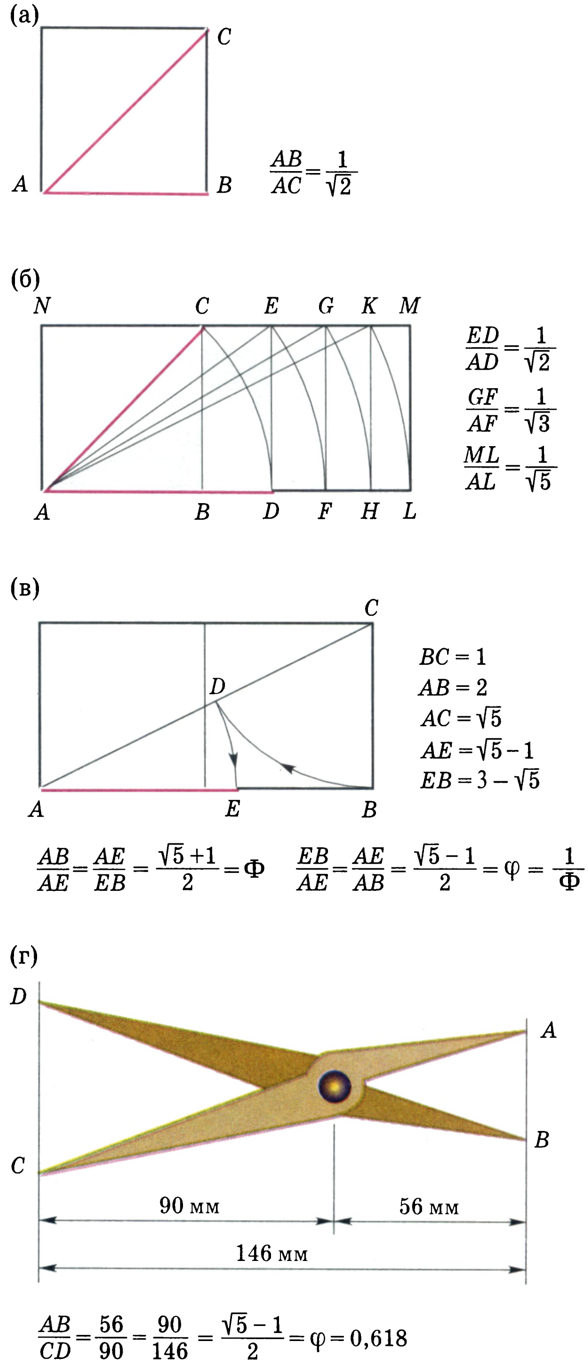
«Десять книг» Витрувия в архитектуре, как и «Начала» Евклида в математике,— это энциклопедия античных знаний, это не только собственное сочинение автора, но и собрание известных к тому времени трудов в данной области. Сам автор ни в коем случае не скрывал этого: «Что до меня, о Цезарь, то я не выпускаю этого сочинения под своим именем, заметая следы чужой работы, и не намерен доказывать свою правоту, опорочивая чьи-либо мысли, но, напротив, я приношу бесконечную благодарность всем писателям за то, что, собрав из прошлого превосходные творения человеческого гения, они, каждый в своем роде, накопили изобильные запасы знаний, благодаря которым мы, как бы черпая воду из источника и проводя ее для собственных нужд, имеем возможность писать красноречивее и свободнее и, опираясь на таких авторов, осмеливаемся давать новые наставления». Не правда ли, превосходный урок научной этики преподал Витрувий 2000 лет тому назад!

Вот почему после «Начал» Евклида (ок. 300 гг. до н. э.), «Альмагеста» Птолемея (ок. 150 гг. до н. э.) и «Десяти книг об архитектуре» Витрувия (ок. 20 гг. до н. э.) труды многих предшественников этих ученых в математике, астрономии и зодчестве стали представлять интерес лишь для историков науки. Однако такая «собирательность» (по-латыни — «компилятивность») не умаляет достоинств названных авторов, ибо, как сказал однажды выдающийся немецкий математик Давид Гильберт (1862—1943), значение научной работы можно измерить числом предыдущих публикаций, которые стали ненужными после появления этой работы.

Но в теории архитектурных пропорций энциклопедии античного зодчества Витрувия суждено было стать источником глубоких заблуждений. Дело в том, что в своем сочинении Витрувий справедливо называет совершенными те сооружения, в которых достигнута «точная соразмерность» всех частей с основной мерой. Однако какой математический смысл вкладывал автор в эту фразу, оставалось неясным. После падения Рима о Витрувии, как и о всей античной «премудрости», надолго забыли, и только через тысячу лет, в 1414 г., в монастыре Сен-Галлен в Италии был случайно обнаружен единственный экземпляр трактата. «Десять книг» мгновенно стали настольной книгой зодчих итальянского Возрождения, страстных поклонников античной классики. Авторитет Витрувия был огромен. Еще бы: ведь ему посчастливилось читать пропавший трактат самого создателя Парфенона, зодчего Иктина «О соразмерности дорийского храма на Акрополе»! И вот с тех пор «точную соразмерность», о которой говорит Витрувий, стали понимать в простейшем арифметическом смысле — как кратность всех частей сооружения основному модулю. Поясним, что это значит.

Модуль в архитектуре (от лат. *modulus* — мера) — это единица измерения, принимаемая для согласования размеров частей сооружения между собой и со всем сооружением. В качестве модуля в зависимости от особенностей конструкции и композиции здания принимались различные величины, например диаметр колонны в античной архитектуре или диаметр купола в византийском зодчестве. Еще чаще использовали так называемый *линейный модуль*, когда архитектурной мерой являлась непосредственно мера длины. В истории всех народов меры длины (вплоть до 10 декабря 1799 г., когда впервые была введена искусственная мера длины — метр) всегда естественным образом связывались с человеком: шаг, сажень, стопа, пядь, фут, дюйм, ярд... (Последний, например, был введен в 1101 г. указом английского короля Генриха I и равнялся расстоянию от кончика носа его величества до конца среднего пальца его вытянутой руки.) Так вот, «точную соразмерность» теоретики Возрождения поняли *арифметически*: модуль должен целое число раз («точно»!) откладываться в каждой из частей архитектурного сооружения. Таким образом, в теории архитектуры допускались только рациональные пропорции, отношения целых чисел, а об иррациональных пропорциях не могло быть и речи. Это убеждение подкреплялось и тем, что в музыке, как мы знаем, со времен Пифагора также господствовали целочисленные отношения интервалов.

Но сами шедевры древней архитектуры безмолвно взывали к обратному: античные пропорции основаны на иррациональных отношениях! В самом деле, ведь «точную соразмерность» частей и целого можно достигнуть и другим путем — *геометрическим*. Например, построив квадрат со стороной AB и измерив шнуром его диагональ AC, нетрудно было получить иррациональную пропорцию $AB:AC=1:\sqrt{2}$, даже не зная иррациональных чисел. Далее, отложив с помощью шнура на продолжении стороны AB диагональ $AC=AD$, легко было построить прямоугольник с иррациональным отношением сторон $DE:AD=1:\sqrt{2}$. Повторив эту операцию несколько раз, можно получить систему прямоугольников с иррациональными отношениями сторон. Ясно, что прямоугольник $AHKN$ на рисунке *б* состоит их двух квадратов. Таким образом, мы получаем еще один практически удобный способ получения иррациональных отношений — систему двух квадратов. Два квадрата, приставленных один к другому, дают ир-



Примеры геометрического построения иррациональных отношений. Диагональ квадрата (*а*). Система прямоугольников с иррациональными отношениями сторон (*б*). Золотое сечение в системе «двойной квадрат» (*в*). Помпейский пропорциональный циркуль, установленный на золотое сечение (*г*).

рациональные отношения $BC:AC=1:\sqrt{5}$, $AB:AC=2:\sqrt{5}$, а с помощью двух операций циркулем или шнурком, как показано на рисунке *в*, в них можно получить и золотое сечение

$$EB:AE=AE:AB=(\sqrt{5}-1):2=\varphi,$$

$$AB:AE=AE:EB=1:\varphi=(\sqrt{5}+1):2=\Phi$$

(см. (14.1)—(14.3)).

ХЕСИРА. Фрагмент деревянной панели из гробницы Хесиры в Саккаре. *XXVIII в. до н. э.*
Рельеф Хесиры не только лучший образец древнеегипетского рельефного портрета, не только древнейшее в мире художественное произведение на дереве, но и научное свидетельство о древнеегипетской системе архитектурного пропорционирования.

Помимо гипотез, построенных на изучении геометрических свойств античных памятников, были и «материальные» свидетельства того, что древние пользовались иррациональными пропорциями. История сохранила имена древнейших математиков и зодчих — Имхотепа и Хесиры, живших в XXVIII в. до н. э.,— строителей первой в истории Древнего Египта пирамиды фараона Джосера в Саккаре. Это были высокочтимые люди, о чем свидетельствуют древнеегипетские иероглифы: «Визирь фараона Нижнего Египта, первый после фараона Верхнего Египта, управитель великой палаты, почетный гражданин, великий жрец Гелиополиса, Имхотеп, строитель и скульптор»; «Хесира, начальник Дестиутса и начальник Бута, начальник врачей, писец фараона, приближенный фараона, жрец Гора, главный архитектор фараона, Верховный начальник десятки Юга и резчик». Хесира был похоронен вблизи пирамиды Джосера. Стены его гробницы украшали рельефы на досках. Поистине потрясающе, что древние доски, которым почти 5000 лет, прекрасно сохранились и выставлены сегодня в Египетском музее в Каире. На двух панелях изображены фигуры владельца гробницы, которые считаются лучшими образцами рельефного портрета в древнеегипетском искусстве. Но для нас эти рельефы интересны прежде всего потому, что в руках у Хесиры, помимо прибора для письма, изображены две палки — два эталона меры. Если теперь взять линейку, измерить длины этих палок и найти их отношение, то мы обнаружим, что они относятся как

$$1:\sqrt{5}=0{,}447!$$

Существует и еще одно удивительное свидетельство мудрости древних. В Неаполе, в Национальном музее, хранится пропорциональный циркуль, найденный при раскопках в Помпеях. Пропорциональный циркуль является необходимым атрибутом архитектора. Он состоит из двух равных по длине ножек, скрепленных винтом наподобие ножниц, и позволяет (минуя вычисления!) для любого отрезка получать отрезок, находящийся с ним в заданном отношении. Действие пропорционального циркуля основано на подобии треугольников и не требует особых комментариев.

Так вот, помпейский циркуль наглухо закреплен в отношении золотого сечения! Это легко проверить, зная размеры циркуля, которые на рисунке *г* указаны в миллиметрах.

Кроме помпейского, особый интерес представляет циркуль из Музея терм в Риме. Он также имеет длину вполовину римского фута — 146 мм, но настроен на другую иррациональную пропорцию (больший отрезок — 94 мм, меньший — 52 мм):

$$\frac{52}{94} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = 0{,}553.$$

Геометрически эта пропорция означает отношение отрезка AD ко всей диагонали AC (см. с. 211). Как считает архитектор П. Ш. Шевелев, именно с помощью такого циркуля мог быть построен чертеж Парфенона.

Но, несмотря на многие доказательства, авторитет Витрувия (возможно, и неправильно понятого), авторитет модульной системы в архитектуре, был столь велик, что мысль о геометрическом построении иррациональных пропорций древними оформилась лишь к XX в. Но как именно, по какой системе древние строили свои замечательные пропорции? Это по-прежнему оставалось тайной, и здесь теоретики архитектуры могли довольствоваться лишь гипотезами. Стремление познать тайны древних пропорций было огромным. Еще бы: ведь это дало бы ключ к созданию новых шедевров!

Естественно, что каждый автор стремился проверить свою теорию на пропорциях Парфенона. Парфенон был и остается совершеннейшим из архитектурных сооружений, архитектурной скульптурой, мраморным сводом законов античного зодчества. Уникальность и бессмертие Парфенона осознавали уже в античности. Вот как писал о Парфеноне в I в. древнегреческий писатель, историк и философ Плутарх (ок. 46 — ок. 127): «Так вырастали эти строения, гордые в своем величии, непревзойденные по своей волшебной красоте. Такими они были потому, что мастера старались превзойти друг друга, каждый из них свое ремесло превращал в художественное творчество... И так эти здания словно дышат молодостью, из века в век защищающей их от зуба времени. Можно сказать, что от этих творений веет ароматом каменных цветов и в них живет душа, которая никогда не стареет».

Теорий античных пропорций, и в частности пропорций Парфенона, становилось все больше. Наконец, к середине XX в. их стало столько, что сами архитекторы перестали понимать, какие же из этих теорий справедливы и есть ли среди них таковые. Некоторые архитекторы вообще потеряли веру в пропорции. Вот, например, выдержка из книги архитектора Г. Б. Борисовского «Наука, техника, искусство»:

«Все исследователи, почти как правило, дают анализ пропорций Парфенона, стараясь привлечь его в качестве авторитетного свидетеля правоты их теории. Это делают Тирш, Цейзинг, Жолтовский, Гримм и др. Все ищут в нем именно тот порядок, который они отстаивают своей теорией. Если сопоставить эти анализы, то обнаружится несколько странная ситуация.

Тирш еще в прошлом столетии заявил: пропорции Парфенона построены на подобии. Вот чертеж, неоспоримо доказывающий это. (Чудесно,— говорят все.)

Цейзинг уверяет: в основе пропорций Парфенона лежит золотое сечение. Вот чертеж, это подтверждающий. (Все в восхищении.)

Жолтовский считает: Парфенон зиждется на золотом сечении. И дает совершенно иной чертеж, неоспоримо подтверждающий это. (Все в восторге.)

Гримм утверждает то же, что Цейзинг и Жолтовский, и приводит другой чертеж, не менее убедительный, хотя и совсем не похожий на два предыдущих. (Все в изумлении.)

Хэмбридж утверждает: пропорции Парфенона складываются из динамических прямоугольников. Вот чертеж, неоспоримо это доказывающий. (Все аплодируют.)

Мессель заявляет: пропорции Парфенона основаны на членении окружности. Вот чертеж, убеждающий нас в этом. (Аплодисменты, переходящие в овацию.)

Архитектор И. Шевелев опубликовал статью и небольшую книгу, в которой утверждает, что пропорции Парфенона основаны на соотношении $1:\sqrt{5}$, и представляет чертеж с расчетом, убедительно это подтверждающим. (Аплодисментов пока не слышно.)

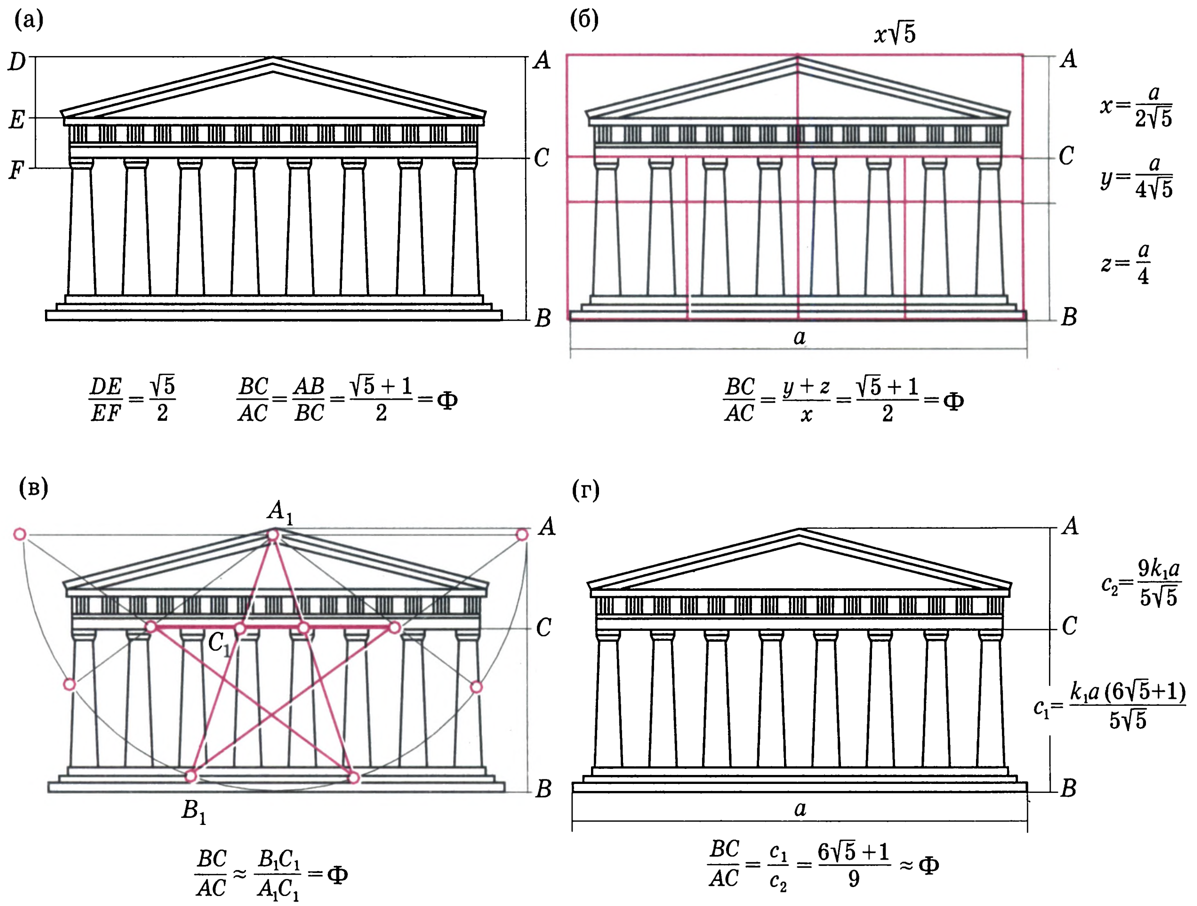
Явно здесь что-то не так...»

Действительно, глядя на различные чертежи пропорций Парфенона, кажется, что между ними нет ничего общего. Между тем здесь все «так». Различные анализы пропорций Парфенона — это различные доказательства «теоремы Парфенона», которая, как и теорема Пифагора, имеет много доказательств. Но от этого «теорема Парфенона» не становится хуже (или вовсе перестает существовать, как кажется Борисовскому), а, напротив, предстает перед нами во всем своем богатстве и красоте. Ибо множество доказательств свидетельствует о большом числе конкретных реализаций, о «всеобщности» доказываемого, а всеобщность является одним из признаков красоты науки.

В самом деле, Тирш говорит о подобии. Но подобие — это геометрическое выражение пропорциональности.

Цейзинг и Жолтовский уточняют: в пропорциях Парфенона имеется золотое сечение. В частности, в золотой пропорции соотносятся главные вертикальные размеры портика: высота BC поддерживающих частей (основание и колонны) и высота AC поддерживаемых частей (антаблемент и фронтон).

Гримм, воспитанный на целочисленных музыкальных пропорциях Возрождения, считает, что главные вертикали Парфенона находятся в отношении малой сексты (8/5). Казалось бы, совершенно иной, «му-



Различные методы анализа пропорций Парфенона: Жолтовский *(а)*, Хэмбидж *(б)*, Мессель *(в)*, Шевелев *(г)*.

зыкальный» подход. Но и здесь нет противоречия с Цейзингом и Жолтовским, ибо 8/5, как будет показано в следующей главе, есть отношение двух членов ряда Фибоначчи и является одним из рациональных приближений коэффициента золотого сечения Ф ($8/5=1,600$; $\Phi\approx1,618$). Гримм правильно заметил, что золотое сечение в главных вертикалях Парфенона выдержано лишь приблизительно, и этим уточнил Цейзинга и Жолтовского.

Но все эти исследования носили эмпирический характер и не давали целостной системы античного пропорционирования. Первой такой попыткой была система динамических прямоугольников американского искусствоведа Хэмбиджа. Прямоугольники с иррациональным отношением сторон Хэмбидж называет динамическими, связывая с ними идею роста, движения и гармонии в природе и искусстве. Особую роль Хэмбидж отводит прямоугольнику с отношением сторон $1:\sqrt{5}$. Хэмбидж разбивает фасад Парфенона на ряд динамических прямоугольников ($1:\sqrt{5}$) и квадратов (1:1). Здесь все ново и спорно: и подход, и метод, и чертеж. Но что будет с интересующими нас главными вертикалями? Выражая вертикальные элементы x, y, z через ширину основания a: $x=a/2\sqrt{5}$, $y=a/4\sqrt{5}$, $z=a/4$, легко видеть, что главные вертикали Парфенона по-прежнему находятся в золотой пропорции

$$\frac{y+z}{x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\Phi.$$

Метод пропорционирования немецкого теоретика Месселя основан на десятикратном делении окружности. Мессель считает, что обычный циркуль (или шнур) являлся основным рабочим инструментом античного и средневекового зодчего. Подход Месселя также оригинален и также спорен во всех аспектах, кроме одного — математического. Действительно, как мы увидим в следующей главе, при делении окружности на десять частей можно получить весь ряд золотого сечения (14.4). Поэтому $B_1C_1:C_1A_1=\Phi\approx BC:CA$, т. е. интересующие нас главные вертикали Парфенона приблизительно находятся в золотой пропорции.

В главе 18 мы подробнее познакомимся с системой пропорционирования Шевелева и покажем, что в этой системе для главных вертикалей — отношение несущих и несомых частей Парфенона — также приближенно выполняется золотая пропорция.

Заметим, что во всех случаях приближенного выполнения пропорции золотого сечения ошибка не превышает 1%. К сожалению, существующие обмеры Парфенона выполнены примерно с такой же точностью и поэтому не могут служить критерием истинности теории. Но и более тщательные обмеры Парфенона нужно будет осторожно применять в качестве критерия истины, ибо при строительстве сооружения 2500 лет назад, разумеется, могли быть допущены отклонения от замысла автора.

Вот почему главным критерием истинности той или иной гипотезы будет оставаться ее логическая непротиворечивость, ее математическая целостность. Этим требованиям, по нашему мнению, наиболее полно удовлетворяет система Шевелева, которая не получила еще должного признания. Система Шевелева позволяет из одного размера — ширины стилобата (верхней ступени основания) — получить все размеры Парфенона в диапазоне от 69,5 м (длина стилобата) до 16 см (высота шейки капители)! Таким образом, именно в системе Шевелева выполняется принцип гармонии Гераклита: «из всего — единое, из единого — все».

Итак, главный вопрос о том, какой системой пропорций пользовался гениальный создатель Парфенона зодчий Иктин, пока остается открытым. Заметим, что мы остановились только на соотношении двух главных вертикалей Парфенона. В золотой пропорции соотносятся и многие другие элементы Парфенона, однако подробный анализ пропорций этого великого архитектурного памятника занял бы объем, по крайней мере равный объему всей этой книги. Мы же в нашем кратком обозрении убедились, что разговор об архитектурных пропорциях неизбежно приводит к золотой, или, как ее называли во времена Возрождения, божественной пропорции. Поэтому нам необходимо подробнее познакомиться с математическими свойствами этого интереснейшего феномена.

17. ТАЙНЫ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — это теорема Пифагора, а другое — деление отрезка в среднем и крайнем отношении... Первое можно сравнить с мерой золота; второе же больше напоминает драгоценный камень.

И. КЕПЛЕР

Пятиконечной звезде — около 3000 лет. Ее первые изображения донесли до нас вавилонские глиняные таблички. Из Древней Вавилонии в Средиземноморье, как полагают, звездчатый пятиугольник перевез Пифагор и сделал его символом жизни и здоровья, а также тайным опознавательным знаком. В средние века пентаграмма «предохраняла» от нечистой силы, что, впрочем, не мешало называть ее «лапой ведьмы». Вспомним гётевского «Фауста»:

Мефистофель.

Нет, трудновато выйти мне теперь.
Тут кое-что мешает мне немного:
Волшебный знак у вашего порога.

Фауст.

Не пентаграмма-ль этому виной?
Но как же, бес, пробрался ты за мной?
Каким путем впросак попался?

Сегодня пятиконечная звезда реет на флагах едва ли не половины стран мира.

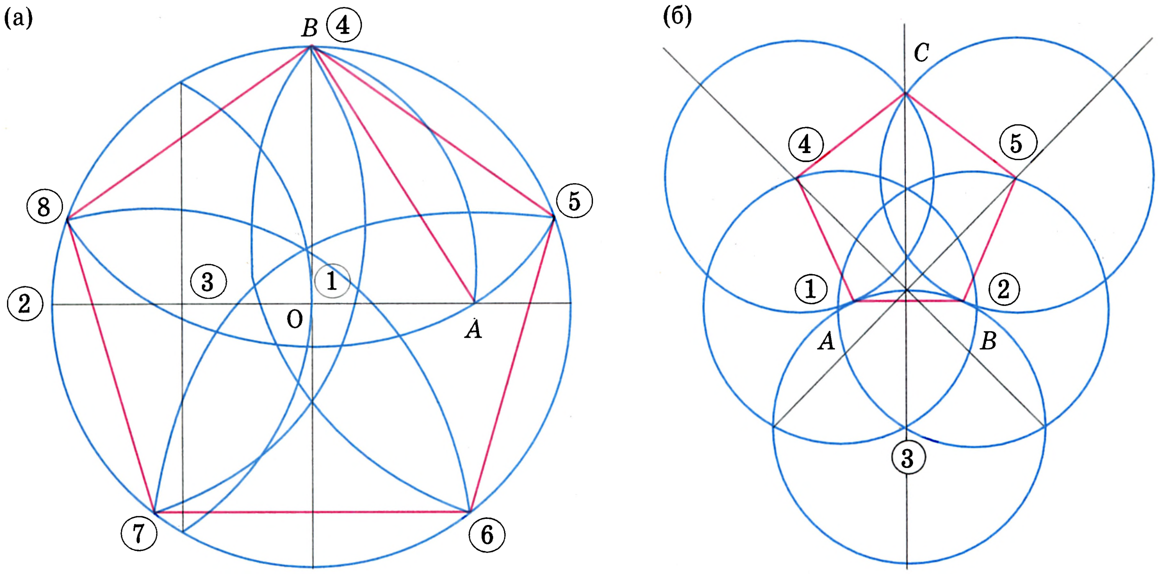
Чем же объясняется такая популярность звездчатого пятиугольника? Тем, что совершенная форма этой геометрической фигуры радует глаз и разум. Звездчатый пятиугольник буквально соткан из пропорций, и прежде всего золотой пропорции. Красота формы пентаграммы, вытекающая из внутренней красоты ее математического строения, была замечена еще Пифагором и с тех пор не устает радовать глаз художника и разум математика.

Рассмотрим подробнее свойства звездчатого пятиугольника. Прежде всего заметим, что уже первый этап его построения — деление окружности на пять равных частей — представляет собой прекрасный пример «обретения неочевидной истины». В самом деле, в то время как деление окружности на 3, 4 и 6 равных частей не представляет затруднений, разделить окружность на 5 равных частей не так-то просто. Вот почему задача о пятикратном делении окружности подробно разбирается в таких великих сочинениях, как «Начала» Евклида, «Альмагест» Птолемея, «Руководство к измерению» Дюрера[1].

Отметим, что хотя метод Дюрера является приближенным, он отличается большой точностью (углы 1 и 2 равны не 108°, а 108°21′58″, углы 4 и 5 чуть больше 107°, а угол C чуть больше 109°), так что погрешности приближенного построения на глаз совершенно не воспринимаются. Сам великий художник не обращал внимание читателей на приближенный характер своих построений, возможно, считая их точными. Дюрер придавал исключительное значение геометрии в искусстве. Вместе с книгой «О пропорциях человеческого тела» трактат Дюрера «Руководство к измерению» является торжественным гимном геометрии в искусстве, блестящей страницей в истории взаимодействия науки и искусства. Однако тема искусства и геометрии в творчестве Дюрера заслуживает особого разговора.

Итак, пусть окружность разделена на 5 равных частей. Соединяя последовательно точки деления, получим правильный пятиугольник, диагонали которого образуют пятиконечную звезду. Легко видеть, что

[1] Полное название трактата Дюрера — «Руководство к измерению при помощи циркуля и линейки в линиях, плоскостях и целых телах, составленное Альбрехтом Дюрером и напечатанное на пользу всем любящим знания с надлежащими рисунками в 1525 году».



Точное деление окружности на 5 равных частей, описанное в «Альмагесте» Птолемея. *Ок. 150 г. до н. э. (а).* Приближенное построение пятиугольника по заданной стороне из «Руководства к измерению» Дюрера. *1525 г. (б).* Цифрами обозначены последовательные положения ножки циркуля.

внутри этой звезды вновь образуется правильный пятиугольник, диагонали которого дают новую звезду, и т. д. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle A=36°$, $\angle B=\angle C=72°$ (как вписанные в окружность углы, опирающиеся на дуги в $72°$ $(360° : 5)$ и $144°$ соответственно). Но $\angle BCD=36°$, поэтому CD является биссектрисой в треугольнике ABC и отсекает от него $\triangle BCD \sim \triangle ABC$. Из подобия этих треугольников имеем $AB : BC = BC : DB$ (рис. *а* на с. 218). Учитывая, что $BC=CD=$ $=AD$, приходим к пропорции

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DB}, \qquad (17.1)$$

т. е. «целое» (AB) так относится к большей части (AD), как большая часть к меньшей (DB). Иначе говоря, *точка D делит отрезок AB в золотом сечении.*

Принимая сторону исходного правильного пятиугольника за единицу $AF=AD=1$, полагая $DB=x$ и, следовательно, $AB=1+x$, из (17.1) приходим к уравнению (14.1) при $a=1$:

$$\frac{1+x}{1}=\frac{1}{x} \Rightarrow x^2+x-1=0,$$

которое имеет единственный положительный корень

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\varphi.$$

Поскольку $1-\varphi=\varphi^2$ (проверьте это), то находим: $x=DB=AE=EF=...=\varphi$, $AD=DC=$ $=CB=AF=...=1$, $ED=EG=...=1-\varphi=\varphi^2$.

Повторяя наши рассуждения для треугольника DGH, в котором $DG=\varphi$, легко видеть, что стороны внутренней звезды будут равны φ^3, а стороны ее внутреннего правильного пятиугольника — φ^4. И т. д.

Таким образом, последовательность правильных пятиугольников и вписанных в них звезд образует ряд золотого сечения (14.4) при $a=1$: $\div\, 1,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3,\ \varphi^4,\ \dots$, причем стороны правильных пятиугольников образуют ряд четных степеней:

$$\div\, 1,\ \varphi^2,\ \varphi^4,\ \dots,$$

а стороны звезд — ряд нечетных степеней:

$$\div\, \varphi,\ \varphi^3,\ \varphi^5,\ \dots .$$

Наконец, если продолжить стороны правильного пятиугольника до пересечения, то получим звезду, сторона которой x находится со стороной исходного пятиугольника $AF=1$ в золотом отношении, т. е. $1/x=\varphi \Rightarrow x=1/\varphi=(\sqrt{5}+1)/2=\Phi$.

Итак, ряд золотого сечения можно неограниченно продолжить и в сторону увеличения, и в общем виде ряд золотого сечения будет иметь вид: ..., Φ^{-3}, Φ^{-2}, Φ^{-1}, Φ^{0}, Φ, Φ^{2}, Φ^{3}, ..., или

$$\ldots,\ \varphi^3,\ \varphi^2,\ \varphi,\ 1,\ \Phi,\ \Phi^2,\ \Phi^3,\ \ldots \quad (17.2)$$

Ряд (17.2) является геометрической прогрессией со знаменателем Ф. Однако из бесконечного множества геометрических прогрессий ряд (17.2) отличается уникальным свойством, называемым *аддитивным свойством:* сумма двух соседних членов ряда равна следующему члену ряда:

$$a_{n-2}+a_{n-1}=a_n, \text{ или } \Phi^{n-2}+\Phi^{n-1}=\Phi^n. \quad (17.3)$$

В самом деле, поскольку $1+\Phi=\Phi^2$ (проверьте это), то $a_{n-2}+a_{n-1}=\Phi^{n-2}+\Phi^{n-1}=\Phi^{n-2}(1+\Phi)=$ $=\Phi^{n-2}\cdot\Phi^2=\Phi^n=a_n$. Благодаря аддитивному свойству ряд золотого сечения играет важную роль в архитектуре, о чем подробнее поговорим позже. А пока заметим, что вместо ряда (17.2) удобнее рассматривать две его «половинки»: возрастающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\Phi\approx1{,}618033988$:

$$\div\ 1,\ \Phi,\ \Phi^2,\ \Phi^3,\ \ldots,\ \Phi^n,\ \ldots$$
$$(\Phi^{n-2}+\Phi^{n-1}=\Phi^n) \quad (17.4)$$

и убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\varphi=\Phi^{-1}\approx0{,}618033988$:

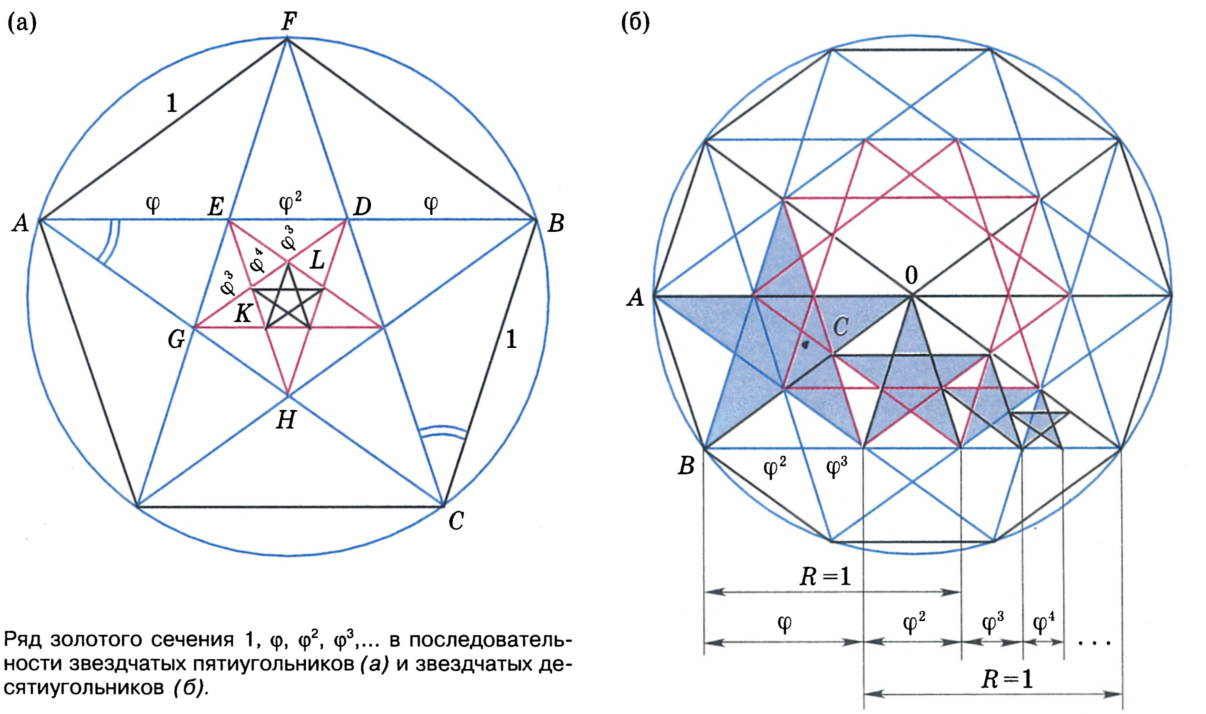
$$\div\ 1,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3,\ \ldots,\ \varphi^n,\ \ldots$$
$$(\varphi^n=\varphi^{n+1}+\varphi^{n+2}). \quad (17.5)$$

Аддитивное свойство ряда (17.5) прекрасно иллюстрируется последовательностью вписанных друг в друга правильных пятиугольников и пятиконечных звезд: $AD=$ $=AE+ED$ $(1=\varphi+\varphi^2)$, $DG=DK+KG$ $(\varphi=\varphi^2+\varphi^3)$ и т. д.

Правильный пятиугольник и пятиконечная звезда, образованная его диагоналями, обладают массой интересных свойств:

1. Пересекающиеся диагонали правильного пятиугольника делят друг друга в золотой пропорции $\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DB}=\Phi$.

2. Сторона правильного пятиугольника, сторона вписанной в него пятиконечной звезды и сторона образованного звездой



Ряд золотого сечения 1, φ, φ², φ³,... в последовательности звездчатых пятиугольников *(а)* и звездчатых десятиугольников *(б)*.

внутреннего пятиугольника также относятся в золотой пропорции $\frac{AF}{AE}=\frac{AE}{ED}=\Phi$.

3. Стороны правильных пятиугольников и вписанных в них звезд образуют ряд золотого сечения (17.5), который является бесконечно убывающей геометрической прогрессией и обладает аддитивным свойством ($\varphi^n=\varphi^{n+1}+\varphi^{n+2}$, $n=0$; 1, 2, ...).

4. Отрезки пятиконечной звезды $AB=\Phi$, $AD=1$, $AE=\varphi$ и $ED=\varphi^2$ связаны между собой всеми видами «древних» средних, а именно:

$AD=\frac{AB+ED}{2}$ — арифметическое среднее;

$\left.\begin{aligned} AD&=\sqrt{AB\cdot AE} \\ AE&=\sqrt{AD\cdot ED}\end{aligned}\right\}$ — геометрическое среднее;

$AE=\frac{2AB\ ED}{AB+ED}$ — гармоническое среднее.

Для четырех последовательных членов ряда (17.5) φ^n, φ^{n+1}, φ^{n+2}, φ^{n+3} нетрудно доказать справедливость соотношения

$$\varphi^{n+1}=\frac{\varphi^n+\varphi^{n+3}}{2}=\sqrt{\varphi^n\cdot\varphi^{n+2}},$$

$$\varphi^{n+2}=\frac{2\varphi^n\varphi^{n+3}}{\varphi^n+\varphi^{n+3}}=\sqrt{\varphi^{n+1}\cdot\varphi^{n+3}}.$$

5. Сторона AB пентаграммы задает трехчастную симметричную структуру золотого сечения вида $\varphi+\varphi^2+\varphi=\Phi$, играющую выдающуюся роль морфологии искусства (см. часть 5 книги).

6. Из всех равнобедренных треугольников только треугольник, у которого углы при основании (72°) вдвое больше угла при вершине (36°), обладает особым свойством: биссектриса угла при основании делит противоположную сторону в золотом сечении. Такой треугольник (например, $\triangle ABC$ на с. 218) получил название «возвышенного».

Подведем некоторый итог: мы выполнили обещание, данное на с. 216, и показали, что пятиконечная звезда (пентаграмма) наряду с золотой пропорцией содержит все «древние» средние. Такое необычайно пропорциональное строение пентаграммы, красота ее внутреннего математического строения и являются основой красоты ее внешней формы. Можно только догадываться, в какой восторг приводило пифагорейцев столь редкое обилие математических свойств в одной геометрической фигуре. Поэтому неудивительно, что именно пентаграмма была выбрана пифагорейцами в качестве символа жизни и здоровья.

Разделим теперь окружность на 10 равных частей. Это легко сделать с помощью метода Птолемея (см. с. 217), в котором отрезок OA дает сторону правильного десятиугольника (докажите это). Соединяя подряд точки деления окружности, получим правильный десятиугольник, а соединяя точки деления через две,— звездчатый десятиугольник. Внутри звездчатого десятиугольника вновь образуется правильный десятиугольник, в который можно вписать новый звездчатый десятиугольник, и т. д. (см. рисунок на с. 218).

Проведя радиусы в вершины десятиугольников, легко увидеть (именно увидеть глазами) целое созвездие пятиконечных звезд. А зная свойства последних, мы предчувствуем обилие золотых пропорций. Действительно, прежде всего заметим, что треугольник AOB является возвышенным, поэтому $AB:OB=\varphi$, т. е. *сторона правильного десятиугольника a_{10} относится к радиусу описанной окружности R в золотой пропорции $a_{10}:R=\varphi$.*

Далее, считая радиус окружности $R=1$ и учитывая свойства пятиконечной звезды, легко обнаружить весь ряд золотого сечения (17.5) в последовательности вписанных друг в друга звездчатых десятиугольников. В частности, на рисунке (*б*) $BC=\varphi$, $OC=\varphi^2$, поэтому $BC/OC=1/\varphi=\Phi$ (тем самым мы погасили еще один «долг» и доказали, что (рис. *в*, с. 214) $B_1C_1/C_1A_1=\Phi$). Попутно мы чисто геометрическим путем доказали равенство $\varphi^2+\varphi^3+\varphi^4+...=1$, которое легко доказать и алгебраически, вспоминая формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=\frac{a_1}{1-q}$.

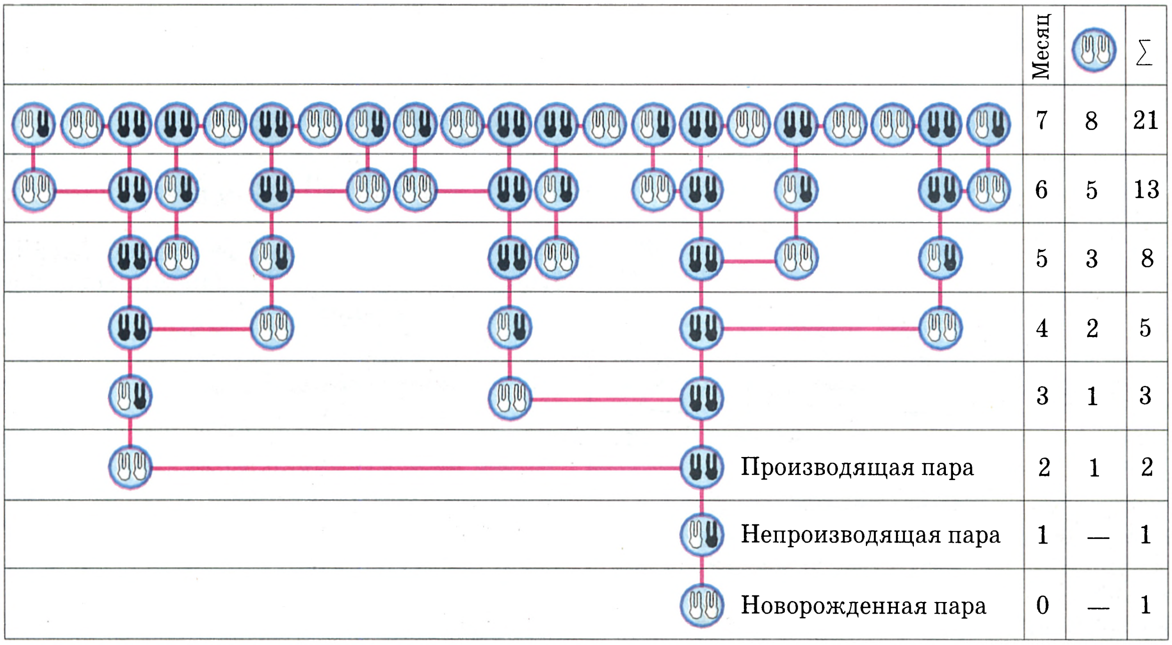
В нашем случае $a_1=\varphi^2$, $q=\varphi$, поэтому $S=\varphi^2/(1-\varphi)=\varphi^2/\varphi^2=1$.

Заметим, что обнаруженное нами созвездие вложенных друг в друга пятиконечных звезд позволило сразу увидеть ряд золотого сечения при десятикратном делении окружности и избавило от громоздких алгебраических выкладок.

Теперь становится понятным, почему именно десятикратное деление окружности было выбрано Месселем в качестве метода архитектурного пропорционирования. При десятикратном делении окружности легко получить весь ряд золотого сечения (17.5).

Рассмотренные нами геометрические свойства золотого сечения в числе других были с восторгом описаны в 1509 г. в книге монаха ордена францисканцев Луки Пачоли (ок. 1445 — ок. 1514) «О божественной пропорции». Пачоли приводит лишь тринадцать свойств золотого сечения (дабы почтить двенадцать апостолов и их учителя Христа), отмечая, что для перечисления всех свойств золотого сечения не хватило бы чернил и бумаги. Каждому свойству золотого сечения Пачоли ставит особый эпитет, говоря «...о его третьем исключительном свойстве... о его четвертом невыразимом свойстве... о его десятом возвышенном свойстве... о его двенадцатом почти сверхъестественном свойстве...». Пачоли преподавал в разных университетах Италии и был талантливым педагогом. Любопытно, что хорошо известная каждому современному школьнику задача о трубах, наполняющих бассейн, описана в 1494 г. в книге Пачоли «Сумма арифметики, геометрии, учения о пропорциях и отношениях».

ДЖАКОПО ДЕ БАРБАРИ. Портрет Луки Пачоли. *Ок. 1510 г.*
Справа изображен ученик Пачоли Гвидобальдо д'Урбино. Возможно, это автопортрет художника. В левом верхнем углу подвешен ромбокубооктаэдр — одно из тел Архимеда. Справа на старинном фолианте стоит додекаэдр.



«Генеалогическое древо кроликов» в задаче Фибоначчи. Общее число пар кроликов, так же как и число новорожденных пар, образует последовательность чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Рассмотрим теперь ряд (17.4) золотого сечения:

$$1,\ \Phi,\ \Phi^2,\ \Phi^3,\ \Phi^4,\ \ldots,\ \Phi^n,\ \ldots$$
$$\Phi^n=\Phi^{n-2}+\Phi^{n-1}\ (n\geqslant 2)$$

и, пользуясь аддитивным свойством ряда, будем выражать степени Φ^n через Φ:

$n=1 : \Phi=\Phi$,
$n=2 : \Phi^2=1+\Phi$,
$n=3 : \Phi^3=\Phi+\Phi^2=\Phi+(1+\Phi)=1+2\Phi$,
$n=4 : \Phi^4=\Phi^2+\Phi^3=(1+\Phi)+(1+2\Phi)=2+3\Phi$,
$n=5 : \Phi^5=\Phi^3+\Phi^4=(1+2\Phi)+(2+3\Phi)=3+5\Phi$,
. . . .

Легко видеть, что коэффициенты при Ф, также как и первые слагаемые, образуют последовательность натуральных чисел:

$$\{U_k\}=1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ \ldots, \quad (17.6)$$

каждый член которой, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих членов, т. е.

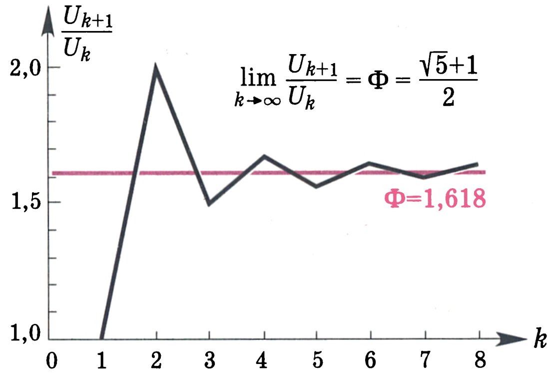
$$U_k=U_{k-2}+U_{k-1}\quad (k\geqslant 3). \qquad (17.7)$$

Последовательности, в которых каждый член определяется как некоторая функция предыдущих, называются *рекуррентными* или *возвратными*.

Последовательность (17.6) имеет древнюю историю. Она впервые была описана в 1202 г. в «Книге об абаке» итальянским купцом и математиком Леонардо из Пизы, известным более по его прозвищу — Фибоначчи — сын доброй природы. С тех пор последовательность (17.6) называется *рядом Фибоначчи*, а ее члены — *числами Фибоначчи*. «Книга об абаке» Фибоначчи была своего рода математической энциклопедией средневековья и сыграла заметную роль в развитии математики в Европе. Значительную часть этого трактата составляли задачи, одна из которых гласила:

«Сколько пар кроликов в один год от одной пары рождается?

Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца своего рождения. Так как первая пара в первом



Для ряда Фибоначчи $[U_k]$ отношение U_{k+1}/U_k последующего члена ряда к предыдущему с ростом k стремится к коэффициенту золотого сечения $\Phi=(\sqrt{5}+1)/2$.

месяце дает потомство, удвой, и в этом месяце окажется 2 пары; из них одна пара, а именно первая, рождает и в следующем месяце, так что во втором месяце оказывается 3 пары; из них в следующем месяце 2 пары будут давать потомство, так что в третьем месяце родятся еще 2 пары кроликов, и число пар кроликов в этом месяце достигнет 5; ...» И т. д. В заключение Фибоначчи пишет: «...мы складываем первое число со вторым, т. е. 1 и 2; и второе с третьим; и третье с четвертым; и четвертое с пятым; и так одно за другим, пока не сложим десятое с одиннадцатым, т. е. 144 с 233; и мы получим общее число упомянутых (пар.— *А. В.*) кроликов, т. е. 377; и так можно делать по порядку до бесконечного числа месяцев».

Свое решение Фибоначчи дал для взрослой пары кроликов. Если же решать задачу для новорожденной пары, то мы получим полный ряд Фибоначчи (17.6) и к концу года будем иметь 233 пары кроликов.

Но какое отношение задача о размножении кроликов имеет к золотому сечению? А вот какое. Если возьмем отношение последующего члена ряда (17.6) к предыдущему U_{k+1}/U_k, то весьма скоро обнаружим, что это отношение с ростом k стремится к коэффициенту золотого сечения Ф. В самом деле, $\frac{U_2}{U_1}=1$, $\frac{U_3}{U_2}=2$, $\frac{U_4}{U_3}=\frac{3}{2}=1{,}5$, $\frac{U_5}{U_4}=\frac{5}{3}=1{,}66...$, $\frac{U_6}{U_5}=\frac{8}{5}=1{,}6$, $\frac{U_7}{U_6}=\frac{13}{8}=$ $=1{,}625$, $\frac{U_8}{U_7}=\frac{21}{13}=1{,}615$, ...

Поэтому, глядя на рисунок, нетрудно убедиться (хотя не так-то просто доказать!), что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{U_{k+1}}{U_k}=\Phi=1{,}618\ ... \qquad (17.8)$$

и наоборот,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{U_k}{U_{k+1}}=\frac{1}{\Phi}=\varphi=0{,}618\ ... \qquad (17.9)$$

Процесс асимптотического приближения отношения U_{k+1}/U_k к Ф напоминает затухающие колебания маятника.

Рассмотрим цепную дробь

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

Обозначая эту дробь через $x>0$, нетрудно увидеть то же самое x в знаменателе первой дроби. Поэтому $x=1+\frac{1}{x}$, откуда находим уравнение для x: $x^2-x-1=0$, которое имеет единственный положительный корень

$$x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\Phi.$$

Итак, коэффициент золотого сечения Ф можно представить в виде цепной дроби

$$\Phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}} \qquad (17.10)$$

Выпишем подходящие дроби (см. с. 159) цепной дроби (17.10):

$$1=\frac{U_2}{U_1},\quad 1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1}=\frac{U_3}{U_2},\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}=\frac{5}{3}=\frac{U_5}{U_4},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}=\frac{8}{5}=\frac{U_6}{U_5}\ \text{и т. д.}$$

Как видим, подходящие дроби, которые являются рациональными приближениями иррационального числа Ф, равны отношениям соседних чисел Фибоначчи U_{k+1}/U_k (1, 2, 3, ...). Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}\frac{U_{k+1}}{U_k}=\lim_{k\to\infty}\left[1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}\right]=\Phi.$$

Итак, *отношение двух соседних чисел Фибоначчи есть рациональное приближение коэффициента золотого сечения*, т. е.

$$\frac{U_{k+1}}{U_k} \approx \Phi, \; \frac{U_k}{U_{k+1}} \approx \varphi.$$

Именно таким рациональным приближением числа Ф и является интервальный коэффициент малой сексты (обращение большой терции $2 : \frac{5}{4} = \frac{8}{5} = \frac{U_6}{U_5}$, которым Гримм выражал отношение главных вертикалей Парфенона (см. с. 214). Другим примером рационального приближения числа Ф является отношение числа четвертей во второй и четвертой паре «проведение — интермедия» в фуге *ре минор* Баха (см. с. 182), которое в точности равно отношению $\frac{U_9}{U_8} = \frac{34}{21} = 1{,}61905$ ($\Phi \approx 1{,}61803$). Еще раз обратим внимание на потрясающую точность (относительная погрешность составляет 0,06%!), с которой у Баха выполнен закон золотого сечения.

В 1843 г., через 641 год после открытия ряда Фибоначчи, определяемого рекуррентно через сумму двух предыдущих членов ряда, французский математик Ж. Бине нашел формулу для вычисления n-го члена ряда Фибоначчи как функции его номера:

$$U_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^n - (-\varphi)^n}{\sqrt{5}}. \qquad (17.11)$$

Пользуясь формулой Бине (17.11), нетрудно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi^{n+1} - (-\varphi)^{n+1}}{\Phi^n - (-\varphi)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi^{n+1}}{\Phi^n} = \Phi$$

(так как $\lim\limits_{n\to\infty} (-\varphi)^n = 0$, поскольку $\varphi < 1$).

Наконец, укажем еще одно представление коэффициента золотого сечения Ф, полученное в начале нашего века:

$$\Phi = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}} \qquad (17.12)$$

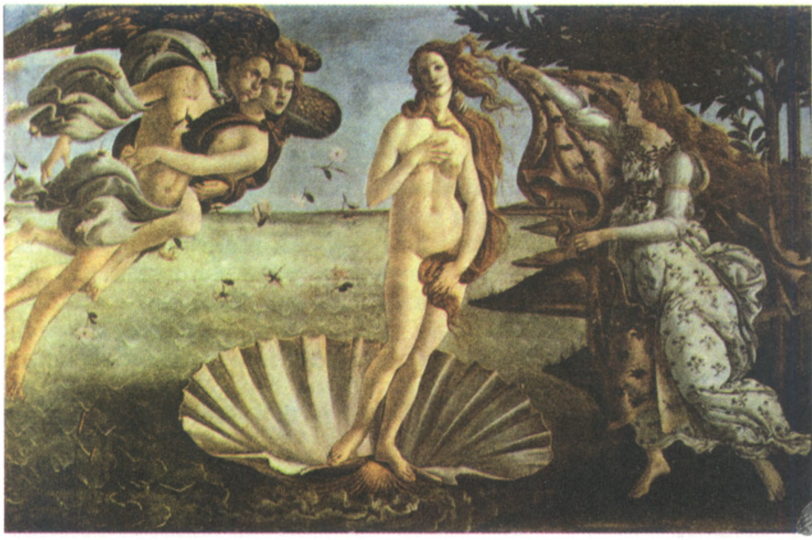
Не правда ли, все формулы (17.10) — (17.12) отличаются особой красотой, простотой и изяществом!

Итак, ряд золотого сечения (17.4), (17.5) и тесно связанный с ним ряд Фибоначчи (17.6) обладают массой исключительных математических свойств, которые каким-то поразительным образом сошлись в этих феноменах. Но золотое сечение и числа Фибоначчи имеют не менее удивительные приложения не только в искусстве (с чем мы немного познакомились в гл. 6 и гл. 14), но и в живой природе. К настоящему времени накоплено множество фактов, показывающих, что ряд Фибоначчи проявляется в формах живой природы как закон единообразного роста. Ряд Фибоначчи обнаружен и в расположении семян подсолнечника или сосновой шишки, и в распределении листьев и хвои на деревьях, и в расположении стеблей. Возьмите линейку и измерьте длину трех фаланг среднего пальца и пясти. Поделив эти числа на длину первой фаланги, вы с поразительной точностью обнаружите 4 члена ряда золотого сечения (17.4):

$$1, \; \Phi = 1{,}618, \; \Phi^2 = 2{,}618, \; \Phi^3 = 4{,}234.$$

Но закон золотого сечения обнаруживается и в более крупных членениях тела человека. Глядя на Боттичеллиеву Венеру, мы видим, что места сочленения отдельных элементов скелета — колени, поясница, шея — являются и точками деления целого в пропорции золотого сечения. Немало мистических рассуждений было высказано по поводу того, что главная точка золотого сечения приходится на точку рождения новой жизни — пуп человека. Нам представляется более правдоподобным чисто механическое объяснение: *оптимальным образом работает шарнирная пара, элементы которой находятся в пропорции золотого сечения*. Решение соответствующей вариационной задачи механики могло бы доказать или опровергнуть нашу гипотезу. Но, независимо от причин возникновения пропорций золотого сечения в теле человека, для нас нет сомнений в том, что именно антропоморфные структуры являются источником золотых пропорций в искусстве, развитие которых идет от золотых пропорций человека к золотым пропорциям художественной формы (см. пример с «Троицей» Рублева на с. 108).

Почему же закон золотого сечения так часто проявляется в архитектуре? Этому есть, на наш взгляд, вполне рациональное, математическое объяснение. Мы знаем, что для достижения гармонии в произведении искусства (в том числе и в архитектурном произведении) должен выполняться принцип Гераклита: «Из всего — единое, из единого — все». В самом деле, гармония в



БОТТИЧЕЛЛИ. Рождение Венеры. *Ок. 1483—1484 гг.*
Нет живописи более поэтичной, чем живопись Боттичелли, и нет у великого Сандро картины более знаменитой, чем его «Венера». Неповторимо нервное изящество боттичеллиевских линий и болезненная хрупкость его вытянутых фигур. Неповторима младенческая чистота Венеры и кроткая печаль ее взора. Неповторим льнущий к телу клубок золотых волос Венеры, в котором, как в клубке змей, таится роковое коварство этого безгрешного существа. Но для неоплатоника Боттичелли его Венера, так же как и для неопифагорейца Поликлета его Дорифор, — это воплощение идеи универсальной гармонии золотого сечения, господствующего в природе. Пропорциональный анализ Венеры (справа) убеждает нас в этом.

архитектурном произведении зависит не столько от размеров самого сооружения, сколько от соотношений между размерами составляющих его частей. Для того чтобы выполнялся основной принцип гармонии «все во всем», взаимосвязь частей и целого в архитектурном произведении должна иметь единое математическое выражение, т. е. архитектурное «целое» a и его части $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ должны находиться в одинаковых отношениях $\frac{a}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}=\ldots=p$. Отсюда $a=a_1p$, $a_1=a_2p$, $a_2=a_3p$, ..., или $a_1=qa$, $a_2=q^2a$, $a_3=q^3a$, ... $(q=1/p)$, т. е. «целое» a и его части a_1, a_2, a_3, ... должны образовывать геометрическую прогрессию

$$\div a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\ (a_n=q^na). \quad (17.13)$$

Но части архитектурного целого должны «сходиться» в целое, т. е., разделив «целое» a на части a_1 и a_2, необходимо, чтобы

$$a_1+a_2=a. \quad (17.14)$$

Учитывая (17.13), условие (17.14) примет вид: $aq+aq^2=a \Rightarrow q^2+q-1=0 \Rightarrow q=\sqrt{5}-1/2=\varphi$, т. е. положительное значение для q равно коэффициенту золотого сечения φ.

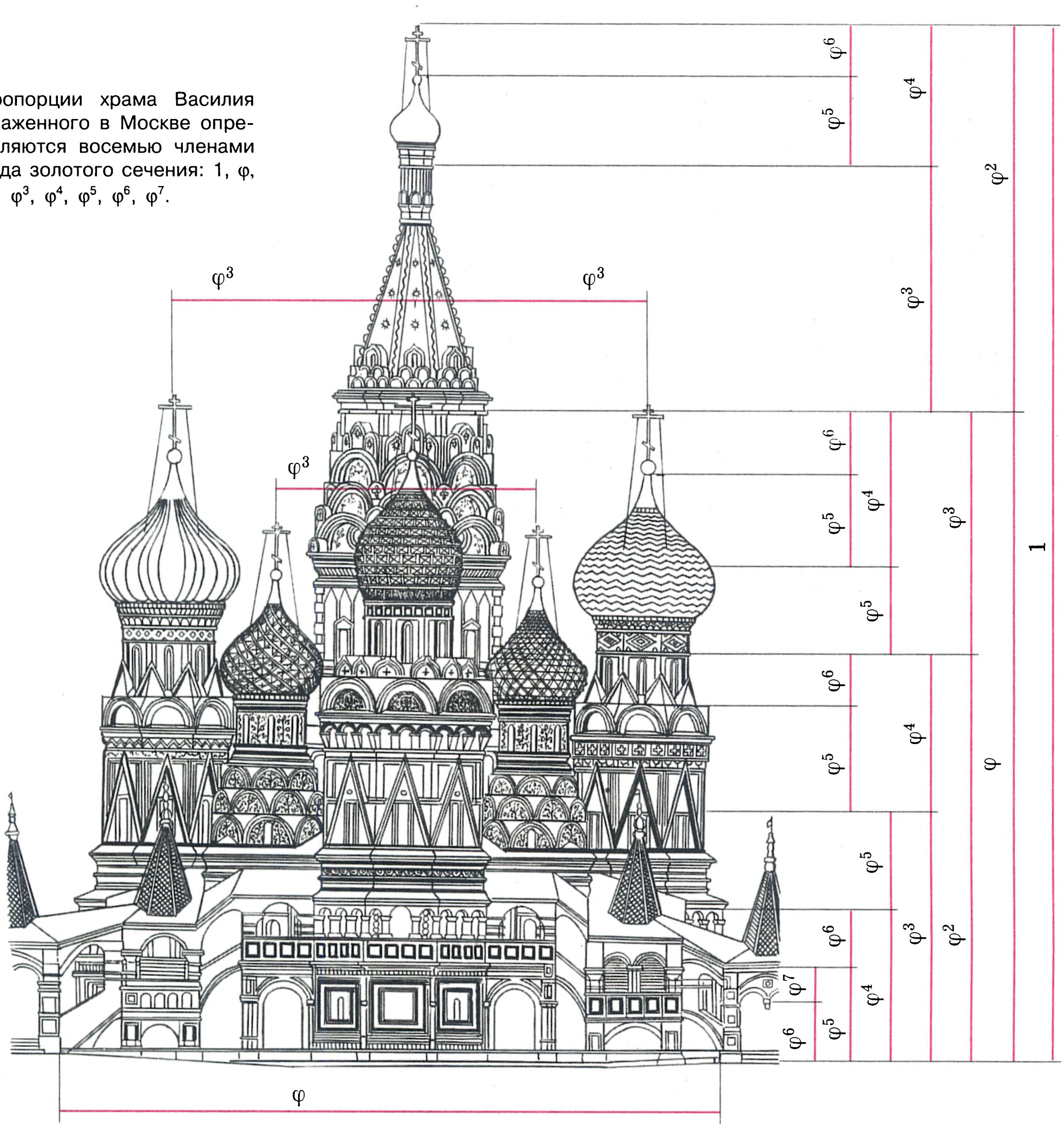
Итак, из всех геометрических прогрессий (17.13) только ряд золотого сечения обладает аддитивным свойством (17.14), поэтому только при делении «целого» a на части a_1 и a_2 в золотой пропорции выполняется принцип «все во всем» и одновременно части «сходятся» в целое. При этом соотношения (17.13) и (17.14) принимают вид (14.4): $\div a$, $a\varphi$, $a\varphi^2$, $a\varphi^3$, ..., $a\varphi^n$, ... $a\varphi^n=a\varphi^{n+1}+a\varphi^{n+2}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Это и есть знакомый нам ряд золотого сечения.

Подробным анализом пропорций некоторых архитектурных шедевров разных эпох, стилей и разных народов мы займемся в следующих двух главах. Но сейчас нам хочется закончить разговор о золотом сечении одним примером, показывающим, насколько органично входит оно в архитектурные пропорции. В качестве примера рассмотрим пропорциональный строй одной из жемчужин древнерусской архитектуры — храма Василия Блаженного в Москве. За «целое» $a=1$ принята высота храма. Пропорции храма определяются восемью членами ряда золотого сечения:

$$1,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3,\ \varphi^4,\ \varphi^5,\ \varphi^6,\ \varphi^7.$$

Многие из членов ряда неоднократно повторяются в пропорциях этого затейливого архитектурного сооружения, но всегда благодаря аддитивному свойству золотого сечения мы уверены в том, что части сойдутся в целое, т. е. $\varphi+\varphi^2=1$, $\varphi^2+\varphi^3=\varphi$, $\varphi^3+\varphi^4=\varphi^2$, $\varphi^4+\varphi^5=\varphi^3$ и т. д. Таким образом, аддитивное свойство золотого сечения делает эту геометрическую пропорцию единственной и неповторимой.

Пропорции храма Василия Блаженного в Москве определяются восемью членами ряда золотого сечения: 1, φ, φ^2, φ^3, φ^4, φ^5, φ^6, φ^7.



18. ПРОПОРЦИИ: ОТ ПАРФЕНОНА ДО НОТР-ДАМА

...Вся наша Франция заключена в наших соборах, как и вся Греция сжата в одном Парфеноне.
О. РОДЕН

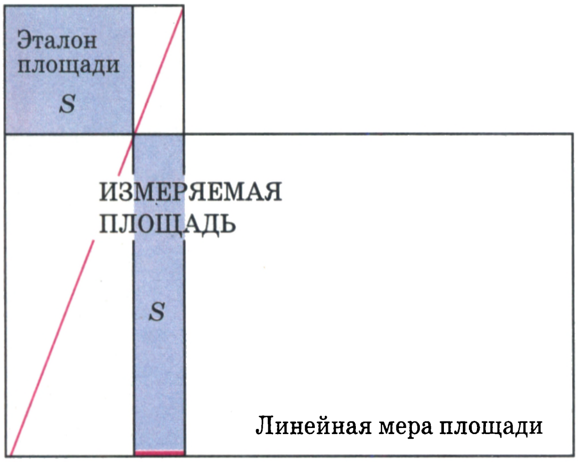
«Человек — мера всех вещей...» Этот знаменитый афоризм древнегреческого философа-софиста Протагора (ок. 490 — ок. 420 до н. э.) является ключом к разгадке тайны пропорций Парфенона, его поразительной гармонии и спокойствия. Как это ни парадоксально, но между живыми линиями человеческого тела и застывшими на тысячелетия каменными очертаниями древнего сооружения существует глубокая связь, выраженная в математических законах пропорциональности. Но по порядку...

Мы уже знаем о многих теориях античных пропорций, пытавшихся объяснить гармонию Парфенона на основе золотого сечения (см. гл. 16). Такой подход понятен ввиду особой роли золотого сечения в морфологии природы и искусства. В главе 16 мы показали, что многие внешне различные теории пропорций Парфенона математически приводят к золотому сечению в отдельных элементах этого архитектурного шедевра. Но целостной теории на базе золотого сечения все-таки не получалось.

Некоторых исследователей отсутствие единой теории античных пропорций вообще разуверило в принципе пропорциональности. Пессимисты подняли на щит высказывание великого теоретика пропорций XX в. Ле Корбюзье о том, что «Парфенон — это более чем архитектура, это — скульптура». Они объявили математическое исследование пропорций Парфенона кощунством. Действительно, тщательное изучение показало, что в Парфеноне, как и в человеческом теле, нет прямых линий. Линии Парфенона наполнены жизнью и пластикой. Однако это отнюдь не означает, что в них нет пропорциональной зависимости, той самой, которую так одержимо искали и находили в теле человека Поликлет, Леонардо да Винчи, Дюрер и др.

А оптимисты продолжают поиск законов строения архитектурных шедевров, поиск тех вечных истин, которые, возможно, являются общими законами формообразования и в природе, и в искусстве. Оригинальную теорию разрабатывает в течение последних двадцати лет архитектор И. Ш. Шевелев. Это теория *парных мер,* которая настолько естественна, что просто удивительно, почему она до середины XX в. никому не пришла в голову. Парные меры — это два эталона длины a и b, которые позволяли устанавливать одинаковые отношения между отдельными парами архитектурного сооружения $a:b=na:nb$ ($n=1, 2, 3, \ldots$).

Какие же величины выступали в качестве парных мер? Сама история развития математики указывает на то, что это были геометрические объекты: сторона и диагональ прямоугольника. В самом деле, математика начиналась с геометрии, а слово «геометрия» означает «землемерие». Основной задачей последнего было измерение площадей земельных участков. Древнейшим методом измерения площадей был *метод приложения*, суть которого состояла в следующем. К измеряемому прямоугольнику прикладывается эталон площади (как правило, квадрат). В прямоугольнике, образованном стороной эталона и стороной измеряемого участка, проводилась диагональ до пересечения с продолжением второй стороны эталона. Получалось три прямоугольника. Два из них, через которые прошла диагональ, подобны, а третий равновелик эталону (докажите это). Сторона равновеликого прямоугольника и служила линейной мерой для определения площади. Так



Измерение площади прямоугольного участка «методом приложения».

измерение площади сводилось к простому подсчету числа линейных мер в стороне измеряемого прямоугольника. Так сторона и диагональ прямоугольника становились основными инструментами древних землемеров-математиков.

Из всего множества прямоугольников квадрат и двойной квадрат обладают тем практическим преимуществом, что требует для построения прямого угла не три, а две меры (в двойном квадрате большая сторона получается двукратным отложением малой). Так появились парные меры $1:\sqrt{2}$ и $1:\sqrt{5}$ (см. с. 211).

Знания, накопленные в геометрии, использовались и в архитектуре. Древние зодчие были прекрасными математиками. Но в отличие от землемерия архитектура обладает третьим измерением — высотой. Поэтому стороны и диагональ прямоугольника, проведенные на земле, пришлось заменить мерными палками, которыми можно было оперировать и в третьем измерении. Парную меру двойного квадрата $1:\sqrt{5}$ мы и видим в руках древнеегипетского зодчего Хесиры.

Парная мера $1:\sqrt{5}$ встречается во множестве древних сооружений, разделенных между собой веками и тысячами километров: пирамиды Джосера, Хеопса, Хефрена и Миккерина, пропорции Парфенона и Эрехтейона, церковь Покрова на Нерли и храм Вознесения в Коломенском, древние храмы Киева и Новгорода... Разумеется, причина популярности этой парной меры не только в том, что для построения прямого угла с ее помощью требуются именно две, а не три меры. Истинная причина заключена в разнообразии математических свойств двойного квадрата.

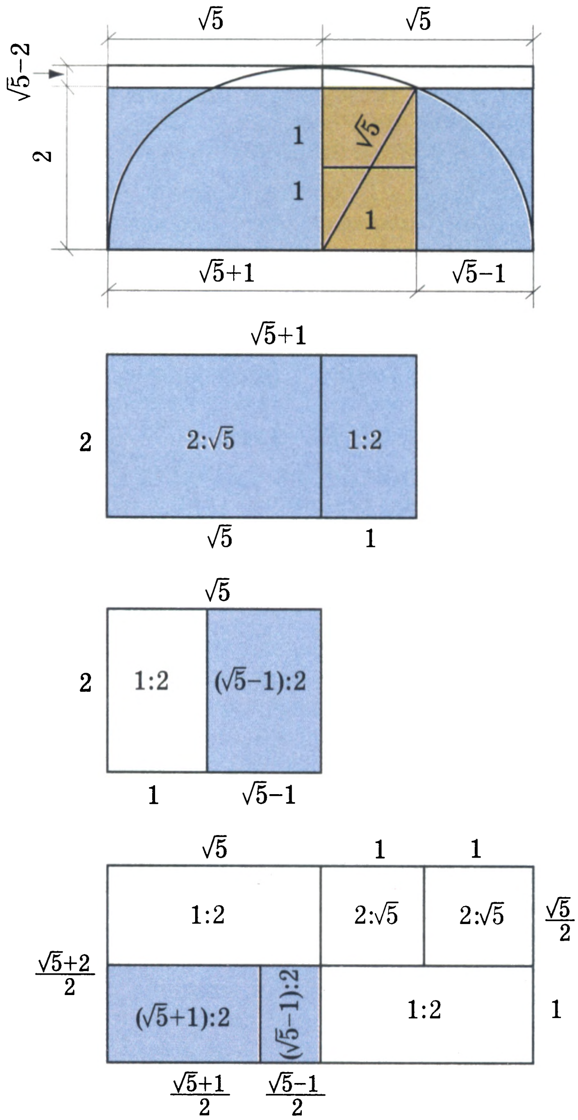
В самом деле, возьмем квадрат со стороной 1, построим двойной квадрат (т. е. прямоугольник со сторонами 1 и 2), проведем в нем диагональ и опишем ею полуокружность (см. рис. на с. 228). Так мы построим новый двойной квадрат с малой стороной $\sqrt{5}$. Продлив стороны исходного двойного квадрата до пересечения со сторонами нового, получим целую гамму пропорций, содержащую практически все коэффициенты пропорциональности от 0,1 ($(\sqrt{5}-2):(\sqrt{5}+1)=0{,}073$) до 1 с шагом 0,1:

$$1:1;\ 1:2;\ 1:\sqrt{5};\ 1:(\sqrt{5}-1);$$

$$(\sqrt{5}-1):2;\ (\sqrt{5}+1):2;\ (\sqrt{5}-2):1$$

и т. д. Заметим: двойной квадрат тесно связан с золотым сечением. Так, в результате наших построений мы получили два прямоугольника золотого сечения ($(\sqrt{5}+1):2$) и ($2:(\sqrt{5}-1)$).

Ну а какое отношение математика двойного квадрата имеет к архитектуре? Широкое распространение в архитектуре пропорции двойного квадрата, как и пропорции золотого сечения, получили благодаря свойству, которое по аналогии с золотым сечением можно назвать *аддитивным свойством площадей*. Дело в том, что каждое архитектурное произведение или его часть можно вписать в прямоугольник. Так вот, прямоугольники системы двойного квадрата могут без остатка разлагаться на другие прямоугольники этой же системы. Это и есть аддитивное свойство площадей системы двух квадратов, аналогичное линейному аддитивному свойству золотого сечения. Например, прямоугольник золотого сечения $(\sqrt{5}+1):2$ одной линией можно разделить на два прямоугольника, стороны которых будут относиться как $1:2$ и $2:\sqrt{5}$, а прямоугольник со сторонами 2 и $\sqrt{5}$ легко разложить на «золотой» прямоугольник $(\sqrt{5}-1):2$ и двойной квадрат $1:2$. Прямоугольник $1:2$ четырьмя линиями разбивается на шесть прямоугольников: два неравных прямоугольника $1:2$, два равных прямоугольника $2:\sqrt{5}$ и два неравных «золотых» прямоугольника $(\sqrt{5}-1):2$. И т. д.



Геометрические свойства системы двух квадратов. Исходный двойной квадрат показан коричневым, прямоугольники золотого сечения — синим. Рисунок демонстрирует также аддитивное свойство прямоугольников системы двойного квадрата.

Таким образом, система двух квадратов дает поразительное разнообразие разбиений целого на части, находящиеся в тех же пропорциональных отношениях. Так, благодаря аддитивному свойству площадей системы двух квадратов достигается взаимосвязь целого и его частей, осуществляется основной принцип гармонии: «из всего — единое, из единого — все».

Заметим, что получаемые в системе двух квадратов прямоугольники с отношением сторон $\sqrt{5}:2\approx1{,}118$ близки к квадратам, а само отношение $\sqrt{5}:2$ представляет так называемую *функцию золотого сечения*, введенную архитектором Жолтовским. В терминах ряда золотого сечения (17.5) функция золотого сечения определяется как отношение

$$\frac{1-2\varphi^3}{2\varphi^3}=F.$$

Поскольку $\varphi^3=\sqrt{5}-2$, то мы легко получаем

$$\frac{1-2\varphi^3}{2\varphi^3}=\frac{5-2\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}-2)}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{2(\sqrt{5}-2)}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Прямоугольник с отношением сторон $\sqrt{5}:2$ Жолтовский называл «живым квадратом», считая, что он должен заменить в архитектуре математический квадрат, который не встречается в природе и не радует глаз своей пропорцией $(1:1)$. Будучи большим энтузиастом золотого сечения и его функции, Жолтовский нашел многочисленные примеры этих пропорций в архитектурных шедеврах, в том числе и в Парфеноне. Итак, среди многих пропорций, обладающих аддитивным свойством площадей, двойной квадрат содержит и такие «выдающиеся» пропорции, как золотое сечение и функцию золотого сечения.

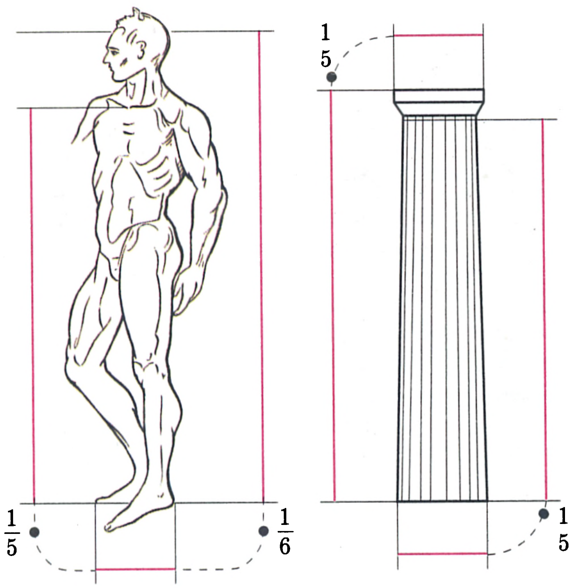
Теория парных мер родилась в 60-е годы. Однако, кроме мерных палок Хесиры, эта теория реальных подтверждений не имела и, по существу, оставалась гипотезой, построенной на математических рассуждениях. Правда, пропорциональные циркули (см. с. 211) также представляют собой парные меры. Но это меры, с помощью которых строился чертеж архитектурного сооружения, а не само сооружение. И вот в 1970 г. теория парных мер получила еще одно блестящее доказательство. При археологических раскопках в Новгороде экспедицией члена-корреспондента РАН А. В. Арциховского был найден обломок мерной трости конца XII в. Мерная трость представляет собой брусок прямоугольного сечения, на трех гранях которого нанесены три различные шкалы. 24 деления каждой из шкал дают разные сажени: тмутараканскую ($C_{\text{Т}}=142{,}1$ см), мерную ($C_{\text{М}}=175{,}6$ см) и косую новгородскую ($K_{\text{Н}}=200{,}9$ см). Но ведь это не что иное, как парные меры системы двух квадратов! В самом деле, $C_{\text{Т}} : C_{\text{М}}=1 : (\sqrt{5}-1)=0{,}809$, $C_{\text{Т}} : K_{\text{Н}}=1 : \sqrt{2} = 0{,}707$. (Подробнее о древнерусских парных мерах и системах пропорционирования мы поговорим в следующей главе.) Так мерная трость[1], а вместе с ней и парные меры из математических абстракций перешли в область реального. Так геометрия двойного квадрата связала воедино мерные палки Хесиры, античные пропорциональные циркули и новгородскую мерную трость.

Вернемся, наконец, к теории пропорций Парфенона, к афоризму Протагора: «Человек — мера всех вещей». Для древнегреческой философии, искусства и религии всегда было характерно очеловечивание сил природы — *антропоморфизм*. Даже греческие боги выглядели как боги (в отличие от древнеегипетских) и были подвержены человеческим слабостям и страстям. Архитектура в антропоморфизме греков не составляла исключения. Вот что по этому поводу писал тонкий знаток античной архитектуры, профессор Н. И. Брунов: «Ордер классического греческого храма является также главным носителем человеческого начала: он осуществляет на языке архитектуры образ монументализированного человека-героя... Самая форма дорической колонны вызывает ассоциации, связанные с человеческим телом. Прежде всего — вертикализм колонны. Вертикаль — главная ось человеческого тела, основная характерная особенность внешнего облика человека, главное его отличие от облика животного».

Но какой именно математической зависимостью связаны пропорции дорической колонны и человеческого тела? В поисках ответа на этот вопрос роковую роль сыграло следующее высказывание Витрувия: «Желая сделать так, чтобы они (колонны.— *А. В.*) были пригодны к поддержанию тяжести и обладали правильным и красивым обличьем, они измерили след мужской ступни по отношению к человеческому росту, и, найдя, что ступня составляет шестую его долю, применили это соотношение к колоннаде, и, сообразно с толщиной основания ее ствола, вывели ее высоту в 6 раз больше, включая сюда и капитель. Таким образом, дорийская колонна стала воспроизводить в зданиях пропорции, крепость и красоту мужского тела». Итак, по Витрувию, справедливы отношения: (стопа человека) : (высота его тела)=(диаметр колонны) : (общая высота колонны)=1 : 6. Между тем обмеры дорических колонн противоречили Витрувию. Неумолимые цифры заставили Брунова отказаться от своих прежних воззрений: «Нельзя утверждать, что дорическая колонна повторяет пропорции тела человека, потому что людей таких пропорций, как колонны Парфенона, не существует». Разгадка была где-то рядом, но ее нашел только в 60-е годы архитектор Шевелев. Вот его решение.

Со времен Поликлета установлено, что если стопу человека принять за единицу измерения — фут (греческий фут= =30,89 см), то рост человека составит 6 футов, а голова вместе с шеей — 1 фут. В этом можно убедиться, глядя на рисунок на следующей странице. Следовательно, на оставшуюся часть тела приходится 5 футов. Именно эта часть и олицетворяет «крепость и красоту мужского тела». В самом деле, в «человеческой колонне» шея — самое слабое место. Груз взваливают на плечи, и даже атланты сгибают шеи и принимают тяжесть на поднятые к плечам руки. Эта простая мысль и привела Шевелева к тому, что ствол колонны, несущий тяжесть, должен ассоциироваться не с полным ростом человека, а с его наиболее крепкой частью — от стоп до основания шеи. Все сразу стало на свои места. Возникла цепочка пропорций, выполнявшихся с прекрасной точностью: (нижний диаметр колонны) : (высота ствола колонны)=(ширина капители по абаке) : (высота колонны с капителью)=(стопа человека) : (высота человека

[1] Первые упоминания о мерной трости имеются в библейских текстах, рассказывающих о строительстве храма царя Соломона и относящихся к X в. до н. э.



Отношение длины стопы человека к длине его тела от основания шеи до стопы 1 : 5 — ключ к пропорциональному строю Парфенона (по Шевелеву).

от стоп до основания шеи)=1 : 5. Далее, поскольку «подобное в мириады раз прекраснее того, что неподобно» (Витрувий), отношение 1 : 5 было распространено на всю соразмерность колоннады в целом: (высота колоннады=колонна+антаблемент) : (длина храма по стилобату)=1 : 5.

Мы употребили немало терминов, относящихся к *классическому ордеру. Ордер* (от лат. *ordo* — порядок) — это тип архитектурной композиции, названный так Витрувием и основанный на художественной переработке стоечно-балочной конструкции. Огромную роль в развитии европейской архитектуры сыграли родившиеся в Древней Греции *классические ордеры: дорический, ионический* и *коринфский*. Название ордера происходит от названия соответствующей области Древней Греции или Малой Азии. Все последующие архитектурные стили, не говоря уже о зодчестве Возрождения и классицизма, развивались под влиянием классического ордера. Наиболее древний — *дорический* — ордер (ордер Парфенона) отличается торжественной монументальностью форм, строгостью пропорций и лаконизмом деталей. Он олицетворял силу и мощь мужского тела, тогда как ионический ордер вобрал в себя грацию и изящество женской фигуры.

Итак, в дорической колонне воспроизведены пропорции несущей части мужского тела 1 : 5. В том же отношении находятся и крайние размеры всего Парфенона — высота колоннады и длина храма. Но вспомним Платона: «Невозможно, чтобы две вещи совершенным образом соединились без третьей...», которая является их средним геометрическим[1]. Следовательно, пропорции Парфенона должны определяться еще одной величиной — средним геометрическим чисел 1 и 5, т. е. $\sqrt{5} = \sqrt{1 \cdot 5}$ $(1 : \sqrt{5} = \sqrt{5} : 5)$. Но ведь $\sqrt{5}$ есть не что иное, как диагональ двойного квадрата! Таким образом, именно парная мера $1 : \sqrt{5}$ является ключом к пропорциональному строению всего Парфенона! Вслед за Шевелевым нам остается только убедиться в справедливости этой гипотезы.

В самом деле, между крайними размерами — высотой колоннады и длиной храма — должно лежать и их среднее геометрическое — ширина сооружения. Размеры Парфенона подтверждают это:

$$\frac{\text{высота колоннады}}{\text{ширина стилобата}} = \frac{\text{ширина стилобата}}{\text{длина стилобата}} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (18.1)$$

Поскольку ширина стилобата точно равна 100 греческим футам, то естественно предположить, что именно этот размер был выбран за исходный размер Парфенона. Итак, если ширина стилобата равна a, то согласно (18.1) его длина $b=a\sqrt{5}$, а высота колоннады $a_1=a : \sqrt{5}$. Так же и шаг колонн связывает всю колоннаду в единое целое и является средним геометрическим диаметра колонны и высоты ее ствола:

$$\frac{\text{диаметр колонны}}{\text{шаг колоннады}} = \frac{\text{шаг колоннады}}{\text{высота ствола}} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (18.2)$$

Высота колоннады a_1 складывается из высот колонны и антаблемента либо из высот нагрузки a_2 и ствола колонны a_3, т. е. $a_1=a_2+a_3$. Последние две высоты также от-

[1] Хотя Платон в период строительства Парфенона еще не родился, но сохранившееся в его сочинениях учение о пропорциональности восходит к самому Пифагору и было, безусловно, известно Иктину и Калликрату — зодчим Парфенона.

носятся как $1:\sqrt{5}$, откуда легко получить выражение a_3 через a_1:

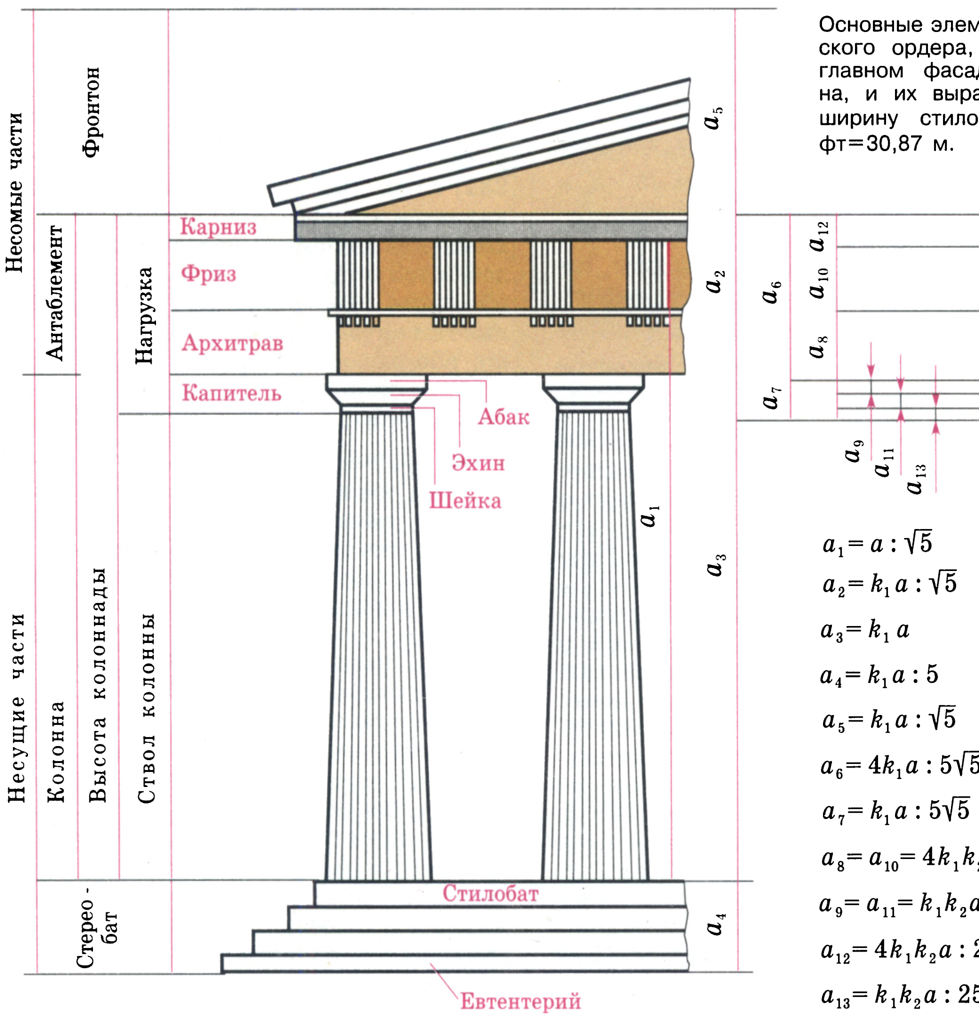
$$\frac{a_2}{a_3}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{a_2}{a_1-a_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2=\frac{1}{\sqrt{5}+1}a_1\Rightarrow a_3=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}a_1. \qquad (18.3)$$

Зная высоту ствола колонны a_3, из (18.2) находим шаг колоннады $b_1=a_3:\sqrt{5}$ и диаметр колонны $b_2=b_1:\sqrt{5}$.

Далее. В композиции главного фасада Парфенона можно выделить две пары связанных между собой элементов. Первая пара — это два горизонтальных каменных пояса: нагрузка a_2 и стереобат a_4. Эта пара связана числом членений: стереобат и нагрузка содержат по четыре элемента. (Возможно, число элементов в этих парах навеяно учением о четырех стихиях, ибо Парфенон является воплощением в камне всей античной философии.) Вторую пару образуют стволы колонн a_3 и фронтон a_5. Обе пары связаны все тем же законом пропорциональности $1:\sqrt{5}$:

$$\frac{a_4}{a_2}=\frac{a_5}{a_3}=\frac{1}{\sqrt{5}}. \qquad (18.4)$$



Основные элементы дорического ордера, видимые на главном фасаде Парфенона, и их выражение через ширину стилобата: $a=100$ фт$=30{,}87$ м.

$a_1=a:\sqrt{5}$

$a_2=k_1a:\sqrt{5}$

$a_3=k_1a$

$a_4=k_1a:5$

$a_5=k_1a:\sqrt{5}$

$a_6=4k_1a:5\sqrt{5}$

$a_7=k_1a:5\sqrt{5}$

$a_8=a_{10}=4k_1k_2a:5\sqrt{5}$

$a_9=a_{11}=k_1k_2a:5\sqrt{5}$

$a_{12}=4k_1k_2a:25$

$a_{13}=k_1k_2a:25$

$k_1=1:(\sqrt{5}+1)$

$k_2=\sqrt{5}:(2\sqrt{5}+1)$

Таким образом, «главный фасад оказался зарифмован через строку,— пишет Шевелев.— Причем движение от меньшего к большему (от стереобата к нагрузке), определенное пропорциональной связью первой пары, уравновешено движением от меньшего к большему второй пары (фронтон — ствол колонны), которое противоположно направлено».

Перейдем к оставшимся вертикальным размерам Парфенона. Высота капители a_7 и диаметр колонны b_2 опять же соотносятся как $1 : \sqrt{5}$, откуда $a_7 = b_2 : \sqrt{5} = a : 5\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)$. Зная a_7, легко выразить высоту антаблемента: $a_6 = a_2 - a_7 = 4a : 5\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)$. Наконец, антаблемент a_6 и капитель a_7 разделены одинаково, зеркально-симметрично, в отношении $1 : 1 : \sqrt{5}$ на части x, x, $x : \sqrt{5}$ и y, y, $y : \sqrt{5}$ соответственно. Тогда из условия $x + x + x : \sqrt{5} = a_6$ и $y + y + y : \sqrt{5} = a_7$ находим: $x = k_2 a_6$, $y = k_2 a_7$, $k_2 = \sqrt{5} : (2\sqrt{5}+1)$, т. е. находим высоты составляющих антаблемент частей — архитрава $a_8 = k_2 a_6$, фриза $a_{10} = k_2 a_6$ и карниза $a_{12} = k_2 a_6 : \sqrt{5}$, а также высоты элементов капители — абака $a_9 = k_2 a_7$, эхина $a_{11} = k_2 a_7$ и шейки $a_{13} = k_2 a_7 : \sqrt{5}$.

Таковы лишь основные идеи пропорционального деления основных элементов Парфенона.

А более пытливому исследователю Парфенон открывает и свои более сокровенные тайны. Оказывается, что угловые колонны в Парфеноне толще остальных рядовых и сближены с ними. Отношение верхнего диаметра к нижнему в угловых колоннах менее контрастно, чем в рядовых. Такая расстановка колонн логична: ведь и в жизни сильных людей ставят на флангах. Но дело не столько в этом. Дело в том, что угловые колонны смотрятся на фоне яркого неба Эллады. Солнечные лучи дифрагируют, огибают угловые колонны. Поэтому если их сделать одинаковыми с рядовыми колоннами, которые смотрятся на темном фоне целлы — святилища храма, то угловые колонны будут казаться тоньше. Итак, в конструкцию Парфенона введены так называемые *оптические поправки*.

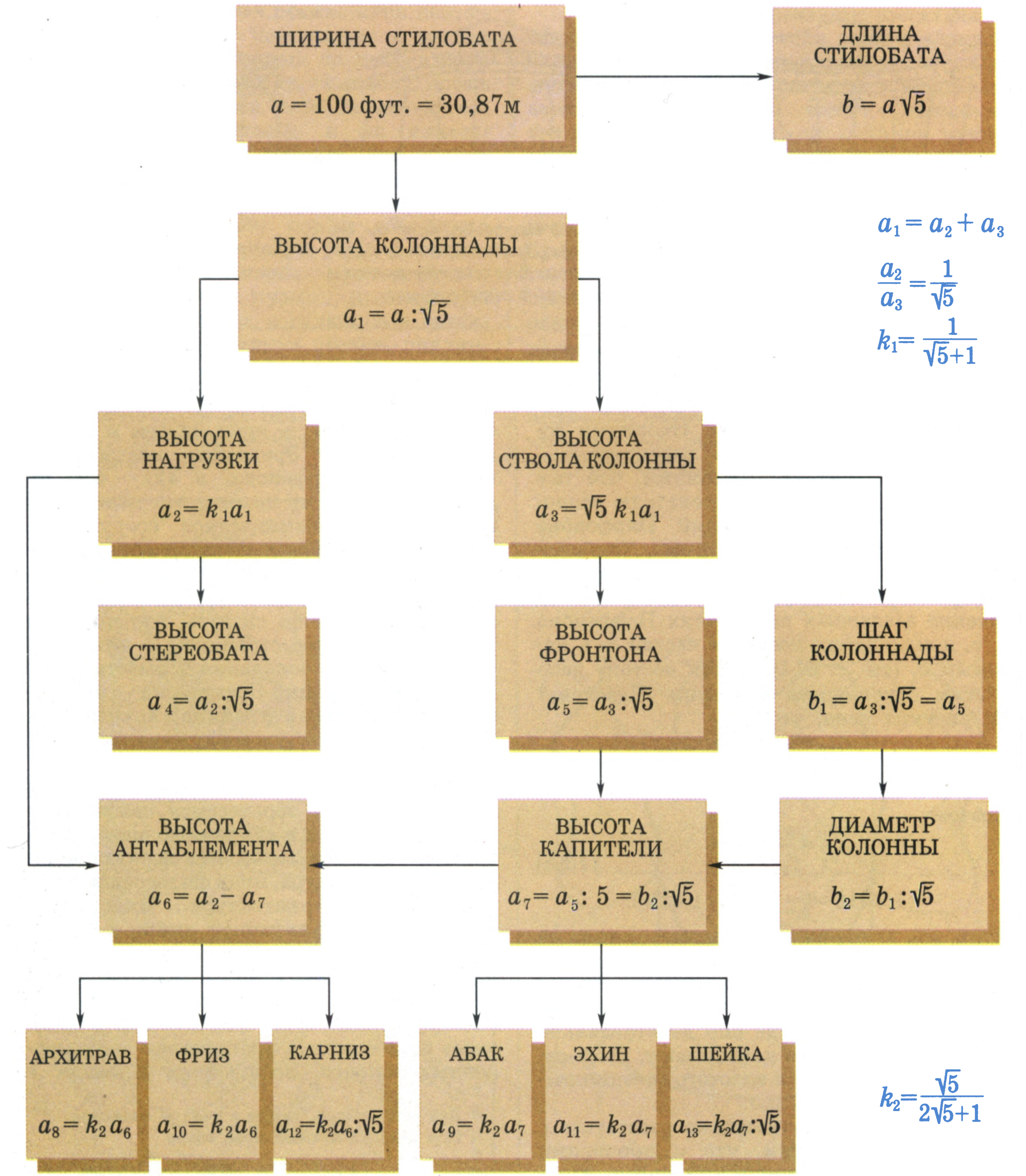
Древние греки прекрасно знали особенности оптического восприятия человеческого глаза: строго вертикальные и параллельные колонны кажутся распадающимися, а горизонтальная балка — прогнувшейся книзу.

Но даже оптические поправки в Парфеноне подчинены закону $1 : \sqrt{5}$! Действительно, нижний диаметр угловых колонн больше «теоретического диаметра» $b_2 = a : 5(\sqrt{5}+1) = 190{,}79$ см на 2,96 см, а у рядовых — меньше на 1,32 см. Взяв отношение этих поправок, мы с изумлением обнаруживаем:

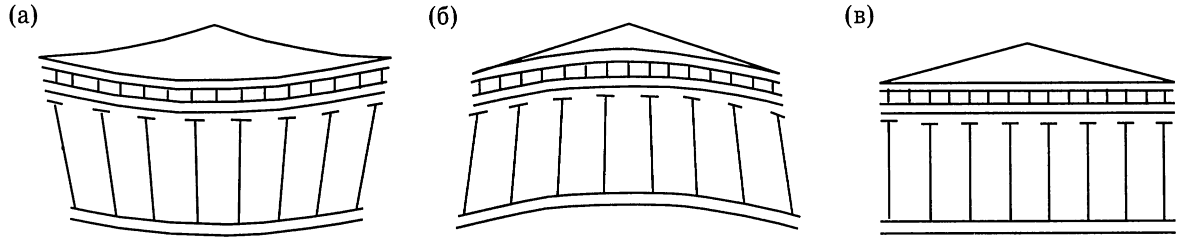
$$1{,}32 : 2{,}96 = 0{,}446 \approx 1 : \sqrt{5} = 0{,}447!$$

Раз уж мы заговорили об отличии «теоретических» размеров Парфенона от истинных, следует расставить все точки над i. Разумеется, совпадение «теоретических» размеров (см. (18.1) — (18.4) и рис. на с. 231) с реальными размерами Парфенона не является абсолютным. Относительные расхождения теории с действительностью колеблются в пределах от 0,5% до 1,6%. Наибольшее расхождение получается для высоты антаблемента — 3,5%. Это и понятно, ибо высота антаблемента — единственный размер в «пропорциональном дереве Парфенона», полученный не с помощью закона пропорциональности $1 : \sqrt{5}$, а выражением через другие размеры. Таким образом, антаблемент является наиболее слабым местом в теории Шевелева, и эта слабость теории автоматически проявилась в математической оценке погрешностей. Впрочем, как нам кажется, и такая точность в расстояниях между горизонтальными линиями сооружения (3,5 см на 1 м) является желанным эталоном для некоторых современных строителей.

Заканчивая наш анализ пропорций Парфенона, естественно поставить вопросы: является ли теория Шевелева окончательной теорией Парфенона? Таков ли на самом деле был план построения чертежа Парфенона мудрым Иктином? Ответы на эти вопросы, возможно, даст время. Ибо как это ни парадоксально, но чем дальше мы уходим от древних, тем лучше мы их узнаем. В этом убеждает нас весь ход развития исторической науки.



Пропорциональное дерево Парфенона (по Шевелеву). Все размеры храма от длины стилобата b=69,5 м до высоты шейки a_{13}=0,158 м выражаются через ширину стилобата: a=100 фт=30,87 м.



Оптические иллюзии восприятия. Так выглядел бы Парфенон, если бы его линии были строго горизонтальны и вертикальны *(а)*. Таков Парфенон в действительности *(б)*. Парфенон, каким мы его видим благодаря оптическим поправкам *(в)*. Наклоны и искривления прямых сильно преувеличены.

И последнее. Внимательный читатель должен задать еще один вопрос: а как теория Шевелева стыкуется с «теориями золотого сечения Парфенона», рассмотренными нами в главе 16? Напомним, что там мы привели к общему знаменателю разнообразные теории пропорций Парфенона Цейзинга, Жолтовского, Гримма, Хэмбриджа и Месселя и показали, что все они, несмотря на внешнее различие, дают золотое сечение в главных вертикалях Парфенона т. е. в отношении несущих частей c_1 к несомым c_2 (см. с. 214). А как обстоит дело с этим отношением в теории Шевелева? Из рисунка ясно, что

$$c_1=a_4+a_3+a_7=k_1a\,(6\sqrt{5}+1):5\sqrt{5}\,,$$

а

$$c_2=a_5+a_6=9k_1a:5\sqrt{5}\,.$$

Поэтому

$$\frac{c_1}{c_2}=\frac{6\sqrt{5}+1}{9}= \qquad (18.5)$$
$$=1{,}6018\approx\Phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1{,}6180.$$

Итак, мы выполнили обещание, данное на с. 215, и показали, что и теория Шевелева, столь не похожая на все остальные теории Парфенона, с большой точностью дает золотое сечение там, где оно действительно есть. Точные обмеры показывают, что в самом Парфеноне закон золотого сечения выполнен приблизительно.

Прежде чем окончательно расстаться с Парфеноном, заметим, что и пропорции этого шедевра, и дорический ордер, в котором он выполнен, были не единственными архитектурными канонами, созданными гениальными древними греками. Неподалеку от Парфенона, на том же священном для древних и для современной цивилизации Акрополе, возвышается и другой бессмертный шедевр — храм Афины и Посейдона-Эрехтея — Эрехтейон, построенный чуть позже Парфенона, в 421 — 406 гг. до н. э. Но как не похоже это изящное и изысканное асимметричное сооружение, исполненное в ионическом ордере, на спокойный, строгий и симметрично уравновешенный Парфенон! Сколь отличны их пропорции! Достаточно сказать, что колонны Эрехтейона «вдвое стройнее»: в них отношение диаметра основания к высоте равно 1 : 10. Но пропорции Эрехтейона — это еще одна увлекательная страница в архитектуре античности. А нас уже ждут гулкие своды готики.

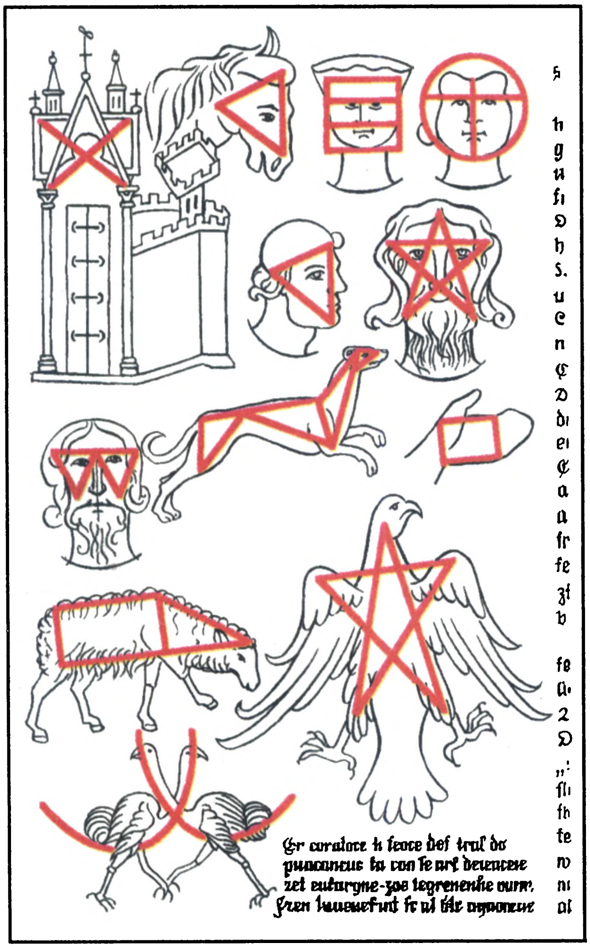
Из светлого и жизнеобильного мира Древней Эллады перенесемся сквозь полтора тысячелетия в сумрачную эпоху европейского средневековья. Как все переменилось! Иная культура, иная философия, иная религия, иная архитектура... Вместо озаренной улыбкой античной любви к жизни и человеку — философия «умерщвления плоти», презрения земных радостей, аскетизма. Любые ростки свободной мысли, всякий вольный полет фантазии проходили через безжалостное прокрустово ложе церковных канонов. Но и в этих условиях

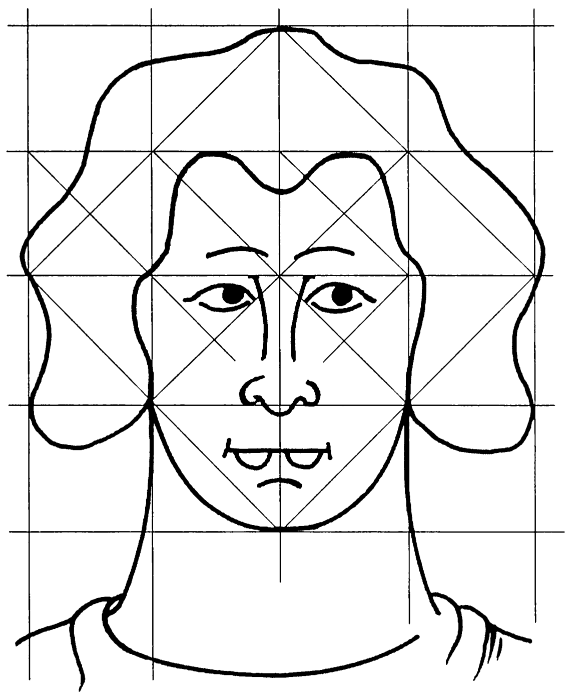
> Дух знанья жил, скрыт в тайном эликсире,
> Поя целебно мутный мрак веков.
> . . . .
> Искал алхимик камень мудрецов,
> Ум утончался в преньях о вампире,
> Познать творца пытался богослов,—
> И мысль качала мировые гири.
>
> (В. Брюсов)

«В те времена каждый родившийся поэтом становился зодчим. Рассеянные в массах дарования, придавленные со всех сторон феодализмом... не видя иного исхода, кроме зодчества, открывали себе дорогу с помощью этого искусства, и их илиады выливались в форму соборов. Все прочие искусства повиновались зодчеству и подчинялись его требованиям... Архитектор — поэт — мастер в себе одном объединял скульптуру, покрывающую резьбой созданные им фасады, и живопись, расцвечивающую его витражи, и музыку, приводящую в движение колокола и гудящую в органных трубах. Даже бедная поэзия, подлинная поэзия, столь упорно прозябавшая в рукописях, вынуждена была под формой гимна или хорала заключить себя в оправу здания...» (В. Гюго. «Собор Парижской Богоматери»).

Но если греческое сознание всегда было обращено к человеку, если даже в дорических колоннах греки видели торжественное могущество мужского тела, а в изящных завитках ионических волют — женскую грацию и кокетство, то ни о каких реминисценциях с пропорциями человеческого тела в готической архитектуре не могло быть и речи. Человеческая плоть презиралась христианской религией, и в пропорциях готики господствует холодная геометрия. Треугольники и квадраты — простейшие геометрические фигуры — вот основа готических пропорций; триангулирование и квадрирование[1] — вот методы до-

[1] *Триангулирование* и *квадрирование* — методы геометрических построений, в основе которых лежат треугольники (лат. *triangulum*) или четырехугольники (лат. *guadratus*) и, в частности, квадраты.





ВИЛЛАР ДЕ ОННЕКУР. Рисунки из альбома. *1235 г. Париж. Национальная библиотека.* Попытки геометризированного рисования человека и животных, приведшие к полному отрицанию естественных пропорций.

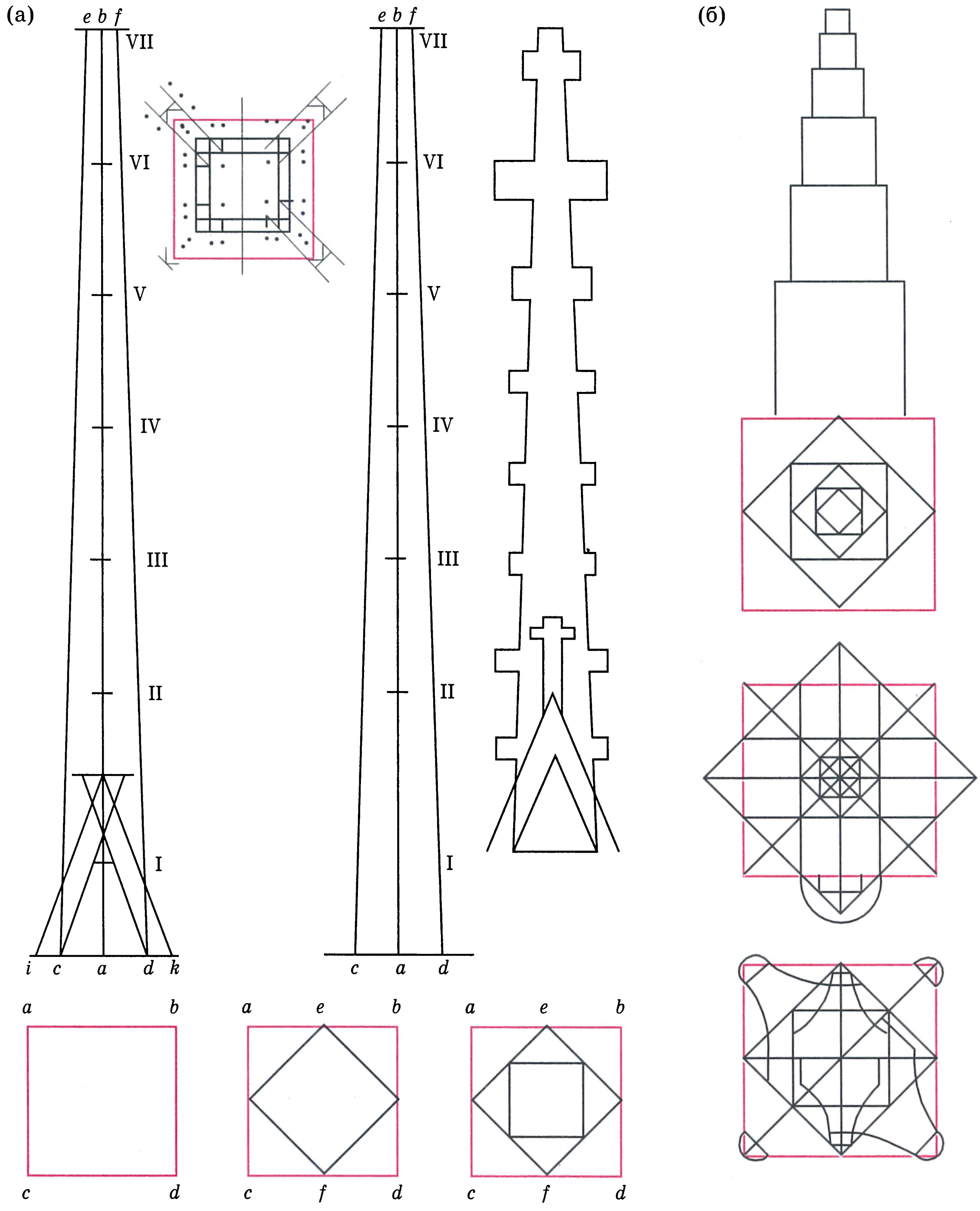
стижения гармонии в готике. Но ведь и чистая геометрия прекрасна, и она смогла стать теоретической базой готической архитектуры, которая, по словам Гоголя, «есть явление такое, какого еще никогда не производил вкус и воображение человека».

Хотя средневековье на полтора тысячелетия ближе к нам, чем Древняя Греция, мы также почти не располагаем подлинными документами о методах строительства готических соборов. И причиной тому не столько пламя военных пожарищ, беспрерывно полыхавшее над Европой, сколько особый характер созданных средневековыми строителями и зодчими организаций. Это были не просто обычные для средневековья цеховые объединения. Это были союзы, именовавшие себя братствами строителей-каменщиков, которые, подобно пифагорейским союзам, были окружены плотной завесой тайны. Члены братства каменщиков считали себя избранными, приобщенными к тайнам высочайшего искусства архитектуры. Как и пифагорейцы, каменщики пользовались лишь им понятным символическим языком, тщательно оберегая от непосвященных свои профессиональные секреты. И если у пифагорейцев их главной богиней была математика, то средневековые каменщики боготворили архитектуру. Собрания членов братства происходили в закрытых помещениях — ложах. Ложи имели строгую иерархию, разделяя братьев на учеников, подмастерьев, мастеров, великих мастеров. Вступая в ложу, ученики приносили клятву верности братству и соблюдения тайны великого искусства архитектуры. Собрания и прием новых членов регламентировались строго разработанным церемониалом, до краев наполненным средневековым мистицизмом. Все это свидетельствует об исключительном авторитете науки и искусства архитектуры в средние века. Заметим, что под влиянием союзов каменщиков-строителей средневековья с начала XVIII в. в Европе возникают религиозно-этические союзы вольных каменщиков-масонов (от франц. maçon — каменщик). Ложи масонов, сохранившие на Западе огромное влияние и поныне, уж не имели никакого отношения к строительству, хотя и заимствовали у своих средневековых предшественников полный набор мистических обрядов и традиций. (Собрание масонской ложи красочно описано в «Войне и мире» Льва Толстого.)

Но истину нельзя удержать в узде: стало достоянием человечества учение Пифагора, обрели жизнь и теоретические изыскания мастеров-каменотесов. Наиболее ранние из них мы находим в альбоме французского зодчего XIII в. Виллара де Оннекура. Альбом содержит ряд геометрических конструкций, позволявших моделировать архитектурные формы, а также размышления автора о пропорциях человеческого тела. Сколь отличны эти рисунки от работ античных мастеров! Если древние греки пытались постичь законы пропорционального строения человеческого тела, а затем перенести эти законы на архитектурные сооружения, то средневековые мастера, наоборот, пытаются втиснуть живые линии в рамки простейших геометрических фигур, полностью игнорируя естественные пропорции. Вот голова мужчины, вписанная в сетку квадратов и их диагоналей (см. рис. на с. 235). Это отнюдь не шарж или шутка, а прорисовка с витражей знаменитого Реймского собора. Человеческое тело не является более «мерой всех вещей». Такой мерой становится система геометрических фигур. Именно сетка геометрических линий является тем скелетом, на котором строится тело здания.

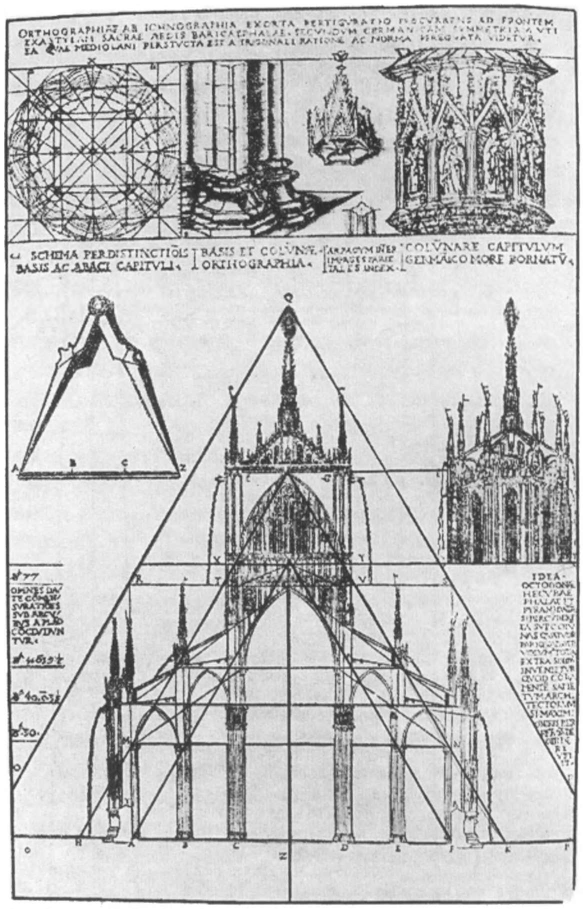
К концу XV в. было издано несколько книг, посвященных секретам строительного мастерства средневековых зодчих. Вот строки из книги «О камне», написанной в 1486 г. немецким мастером Матхаусом Роцирером: «Если хочешь начертить план башни на точной геометрической основе по примеру каменотесов, начерти квадрат, обозначь его углы буквами a, b, c, d ... затем раздели линию $a - b$ на две равные части и обозначь середину буквой e и таким же образом раздели три оставшиеся стороны квадрата. Затем поверни меньший квадрат так, как показано на рисунке». Система квадратов, описанная здесь, очевидна (см. рис. на с. 237).

Однако протест всесильных лож, требовавших строжайшего запрета на разглашение тайн строительства, помешал Роцireру продолжить публикацию своих трудов. Более того, из сохранившихся документов известно, что за нежелание подчиняться



Чертежи для конструирования готических башен
из книги Матхауса Роцирера «О камне». *Регенсбург. 1486 г. (а).*
Система квадрирования из книги Лоренца Лахера
«Наставления мастера Лахера». *Нюрнберг. 1516 г. (б).*

МИЛАНСКИЙ СОБОР. *1386—1858 гг.*
Этот самый большой из всех готических соборов мира вмещает 40 000 молящихся. Строительство собора началось в 1386 г., шпиль был сооружен в 1756—1779 гг., главный фасад завершен в 1805—1813 гг., а последний шпиль — в 1858 г. Таким образом, собор строился 572 года!



Система триангулирования Миланского собора. Иллюстрация из «Комментариев к Витрувию» Чезаря Чезарино. *Милан. 1521 г.*

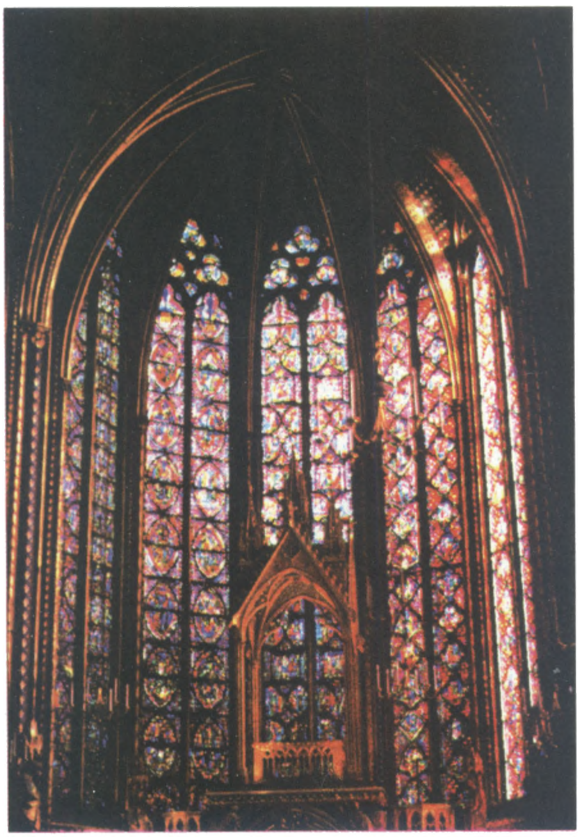
уставу строитель собора мастер Вольфган Роцирер, дядя Матхауса Роцирера, а с ним и резчик Микаэл Лой в 1514 г. были приговорены к смертной казни.

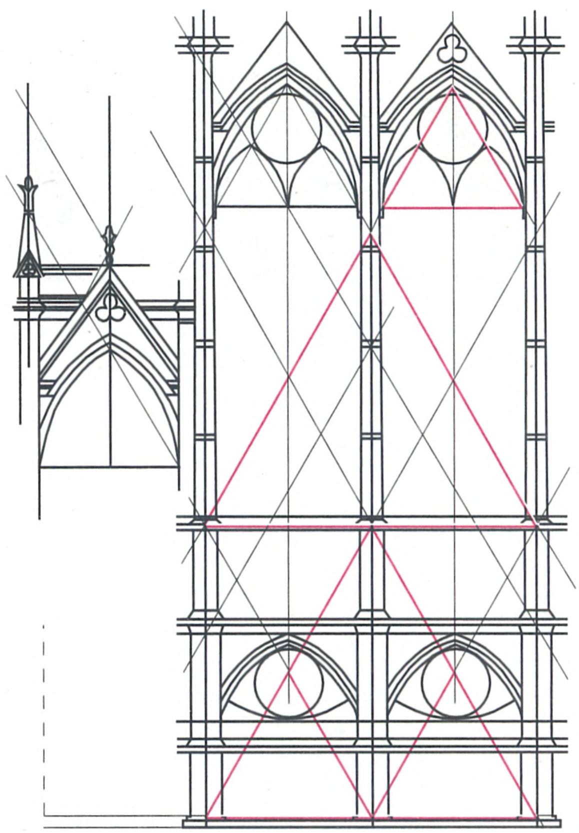
Показательны и строки из завещания сыну другого немецкого мастера Лоренца Лахера, написанного в 1516 г.: «Впиши один в другой три квадрата — и ты получишь длину и ширину, это та единая основа, к которой сводятся почти все необходимые нам чертежи».

Но была у средневековых мастеров и другая система пропорционального построения — система триангулирования. Противоположность мнений сторонников систем «ад квадратум» и «ад триангулам» со всей остротой проявилась в дискуссии, состоявшейся во время строительства Миланского собора. По причине огромных размеров собора, заложенного в 1386 г., при его строительстве возникли серьезные затруднения. Миланские зодчие пригласили иностранных коллег. В 1389 г. из Парижа был вызван мастер Николас де Бонавентура. В 1391 г. миланский мастер Джиованни был направлен для консультаций в Германию к мастеру Кельнского собора. В 1394 г. из германского города Ульма прибыл в Милан Ульрих фон Энсинген, а в 1399 г. — из Парижа Жан Миньо. В этот период положение с собором стало критическим. 11 января 1400 г. состоялось собрание всех архитекторов, на котором возник серьезный спор между Миньо и итальянскими зодчими. Разногласия во мнениях составили 54 пункта, среди которых был и пункт о системах пропорционирования. Сторонники системы триангулирования победили. На чертеже, сделанном в 1521 г. Чезаре Чезарино с оригинала 1395 г., видно, что в основе пропорций собора лежат равносторонние треугольники (см. рис. на с. 238).

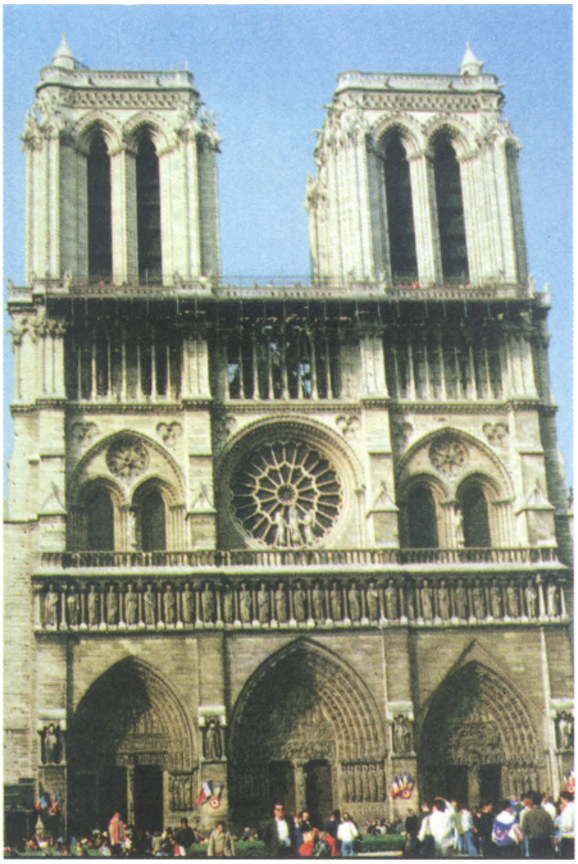
Среди сторонников системы триангулирования также велись споры относительно того, из каких треугольников должна состоять пропорциональная сетка готического собора: равносторонних, «египетских» и т. д. Мы не будем углубляться в эти теоретические премудрости, а только заметим, что и сторонники системы «ад триангулам», и приверженцы схемы «ад квадратум» оставили потомкам первоклассные архитектурные памятники. В качестве примера укажем на две жемчужины французской столицы: королевскую капеллу Сен-Шапель (1242—1248) и знаменитый Нотр-Дам де Пари — собор Парижской Богоматери (1163—1257).

Капелла Сен-Шапель — вершина высокой готики, образец совершенной гармонии и безукоризненной формы. Интерьер капеллы ошеломляет даже знатоков готического искусства: потоки теплого света, струящиеся из ее витражей, мощным аккордом вливаются в застывшую симфонию изысканных архитектурных форм капеллы. Согласно исследованиям Виолле-ле-Дюка, пропорциональная сетка капеллы построена на равносторонних треугольниках.





Витражи королевской капеллы Сен-Шапель — жёмчужины французской высокой готики. *Париж. 1242—1248 гг.*
Равносторонний треугольник — основа пропорциональной сетки капеллы Сен-Шапель (по Виолле-ле-Дюку).

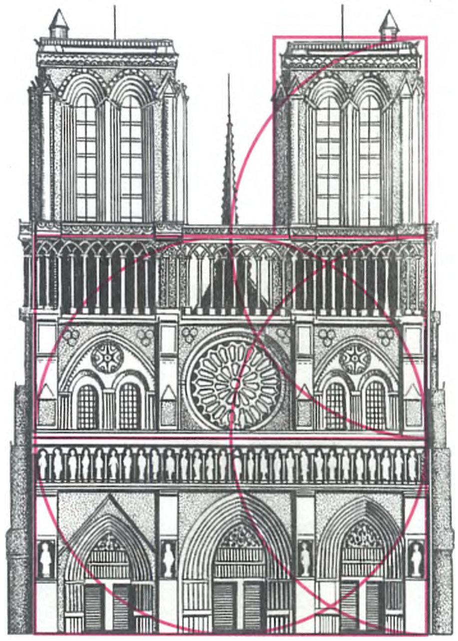


СОБОР ПАРИЖСКОЙ БОГОМАТЕРИ (Нотр-Дам де Пари). Западный фасад. *1163—1257 гг.*

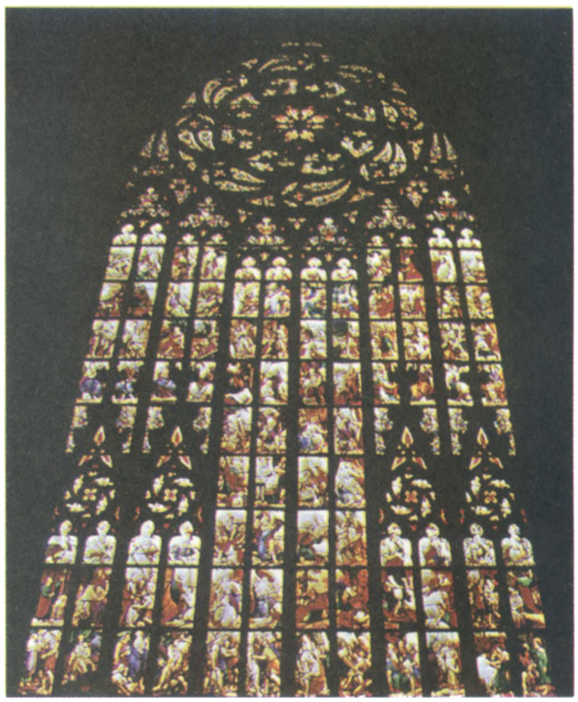
Собор Парижской Богоматери — самый величественный и самый популярный памятник ранней готики. В гордой размеренности западного фасада собора горизонтальные линии еще соперничают с вертикальными. Еще не исчезла стена фасада (ведь это только начало готики), но она уже приобрела легкость и даже прозрачность. Как показал французский историк архитектуры Огюст Шуази, пропорциональную основу западного фасада собора Нотр-Дам составляет квадрат, а высота башен фасада равна половине стороны этого квадрата...

Но чем внимательней, твердыня Notre-Dame,
Я изучал твои чудовищные ребра,
Тем чаще думал я: «Из тяжести недоброй
И я когда-нибудь прекрасное создам...»

(О. Мандельштам)



Пропорции западного фасада собора Парижской Богоматери.



Витражи готических соборов — это музыка света, рожденная архитектурой.

19.

ПРОПОРЦИИ: ОТ ПОКРОВА НА НЕРЛИ ДО МОДУЛОРА ЛЕ КОРБЮЗЬЕ

И однажды возникло из грезы,
Из молящейся этой души,
Как трава, как вода, как березы,
Диво дивное в русской глуши.

Н. РУБЦОВ

Настало время поисков пропорций.
Утверждается дух архитектуры.

ЛЕ КОРБЮЗЬЕ

В 1784 г. смиренный отец боголюбовской монашеской братии испросил разрешения у преосвященнейшего Виктора, архипастыря владимирского, благословения на разборку для монастырских потреб обветшавшей и полузаброшенной церковки. Разрешение было милостиво жаловано, но, как говорится, жизнь распорядилась по-своему: заказчики и подрядчики не сошлись в цене. Работы не начались, а там о них и вовсе забыли. Так волею судьбы остался жив памятник, который обошли стороной полчища Батыя и Мамая, пощадили столетия и пожарища бесконечных войн, шедевр древнерусского зодчества церковь Покрова Богородицы на Нерли.

В ясные летние дни среди зелени заливных лугов ее стройная белизна, отраженная гладью старицы Клязьмы, дышит поэзией сказки. Лишь в короткие минуты заката белая свеча церкви загорается тревожно-багряным пламенем. В суровые зимы бескрайняя снежная пелена, будто заботливая мать, укутывает и прячет свое замерзшее дитя. «Во всей русской поэзии, давшей миру столько непревзойденных шедевров, нет, быть может, памятника более лирического, чем церковь Покрова на Нерли, ибо этот архитектурный памятник воспринимается как поэма, запечатленная в камне. Поэма русской природы, тихой грусти и созерцания» (Л. Любимов).

Прежде чем приблизиться к тайне очарования древнерусской архитектуры, нам необходимо познакомиться с системой мер, существовавшей в Древней Руси. Мы уже отмечали, что в разных местах земного шара, в разные времена и у разных народов эталоны длины были в принципе одинаковыми: они так или иначе происходили от человеческого тела. Эти так называемые *антропоморфные меры* обладали ценнейшим для архитектуры качеством, о котором с введением метрической системы мер забыли, но к которому в XX в. вернулся Ле Корбюзье. Дело в том, что антропоморфные меры в силу своего происхождения соразмерны человеку и поэтому удобны для конструирования искусственной среды обитания людей — архитектурных сооружений. Более того, в человекоподобных мерах заложены пропорции, отобранные самой природой, такие, как деление пополам, золотое сечение, функция золотого сечения. Следовательно, в антропоморфных мерах естественным образом заложена гармония природы.

Основной строительной мерой в Древней Руси была *сажень*, равная размаху рук в стороны. Сажень делилась на 2 *полусажени*, полусажень — на 2 *локтя* — расстояние от кончиков пальцев до локтя, локоть — на 2 *пяди* — расстояние между вытянутыми в противоположные стороны большим пальцем и мизинцем. Все четко и логично. Однако чем пристальнее историки изучали древнерусские летописи, тем больше становилось саженей, а когда их число перевалило за десять, голова у историков пошла кру́гом. Необходимо стало навести математический порядок в древнерусской системе мер. Это сделали историк, академик Б. А. Рыбаков и архитектор И. Ш. Шевелев.

Начало антропоморфным мерам дает рост человека a. Главной из всех видов саженей является *мерная, или маховая, сажень* $C_{\text{М}}$, которая равна размаху рук человека в стороны. Изучение пропорций человеческого тела показывает, что $C_{\text{М}}=1{,}03a$. Другой важной мерой у всех народов являлся двойной шаг, который равен высоте туловища от стоп до основания шеи. Последнее расстояние, как мы знаем (см. с. 229), равно $\frac{5}{6}a$. Таким образом, *двойной шаг,* или *малая (тмутараканская) сажень,* $C_{\text{Т}}=\frac{5}{6}a=0{,}833a$. Но главный сюрприз кроется в отношении этих двух основных размеров:

$$\frac{C_{\text{Т}}}{C_{\text{М}}}=\frac{0{,}833a}{1{,}03a}=0{,}809=\frac{1}{\sqrt{5}-1}. \qquad (19.1)$$

Следовательно, малая сажень $C_{\text{Т}}$ относится к мерной $C_{\text{М}}$ как сторона двойного квадрата к его диагонали без малой стороны:

$$\frac{C_{\text{Т}}}{C_{\text{М}}}=\frac{C_{\text{Т}}/2}{C_{\text{М}}/2}=\frac{AD/2}{AC/2}=\frac{RL}{RS}=\frac{QT}{TR}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}.$$

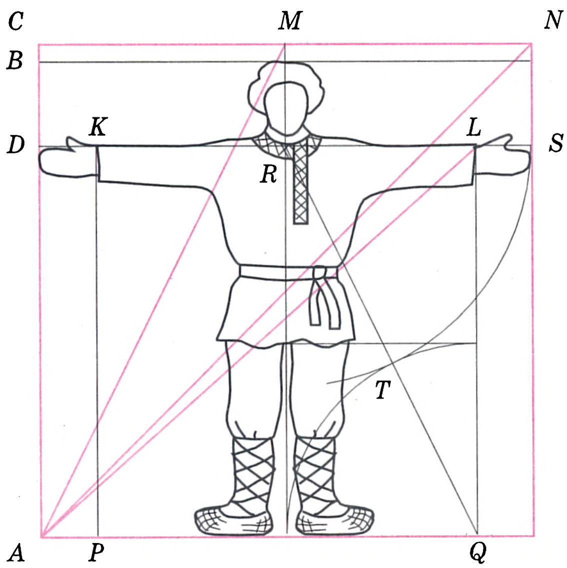
Из (19.1) ясно, что отношение мерной полусажени $C_{\text{М}}/2$ к малой сажени $C_{\text{Т}}$ равно золотому сечению:

$$\frac{C_{\text{М}}/2}{C_{\text{Т}}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\varphi. \qquad (19.2)$$

Итак, в установленном самой природой отношении полуразмаха рук (RS) к высоте туловища (LQ), т. е. в отношении двух основных мер Древней Руси, заключено золотое сечение, столь распространенное в древнерусской архитектуре.

Построив квадраты на малой $C_{\text{Т}}$ и мерной $C_{\text{М}}$ саженях и проведя в них диагонали, мы получаем еще два типа саженей: *косую новгородскую сажень* $K_{\text{Н}}=PL=\sqrt{2}\,C_{\text{Т}}$ и *великую косую сажень* $K_{\text{В}}=AN=\sqrt{2}\,C_{\text{М}}$. В отличие от первых двух саженей (малой и мерной), выражающих природные меры, косые сажени получены чисто геометрическим путем. Ясно, что

$$\frac{C_{\text{Т}}}{K_{\text{Н}}}=\frac{C_{\text{М}}}{K_{\text{В}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (19.3)$$



Рост человека: $a=AB$

Мерная сажень: $C_{\text{М}}=AC=CN=1{,}03a$

Малая (тмутараканская) сажень: $C_{\text{Т}}=AD=KL=\frac{5}{6}a=0{,}833a$

Сажень без чети: $C_{\text{Ч}}=AM=\frac{\sqrt{5}}{6}C_{\text{М}}$

Косая новгородская сажень: $K_{\text{Н}}=PL=\sqrt{2}C_{\text{Т}}$

Косая великая сажень: $K_{\text{В}}=AN=\sqrt{2}C_{\text{М}}$

Соотношения между саженями: $\frac{C_{\text{Т}}}{K_{\text{Н}}}=\frac{C_{\text{М}}}{K_{\text{В}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{C_{\text{Т}}}{C_{\text{М}}}=\frac{1}{\sqrt{5}-1} \Rightarrow \frac{C_{\text{М}}/2}{C_{\text{Т}}}=\frac{RS}{LQ}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ – золотое сечение

$\frac{C_{\text{Ч}}}{C_{\text{М}}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ – функция золотого сечения

Основные древнерусские меры длины и геометрическая взаимосвязь между ними.

Наконец, существовала еще одна сажень, получаемая геометрическим путем. Это так называемая *сажень без чети* $C_{\text{ч}}$, равная диагонали AM половины квадрата, построенного на мерной сажени $C_{\text{м}}$. У этой сажени не было соответствующей косой пары, и поэтому ее называли саженью без пары, без четы, или без чети. Из треугольника ACM следует, что $C_{\text{ч}}=\frac{\sqrt{5}}{2}C_{\text{м}}$, откуда

$$\frac{C_{\text{ч}}}{C_{\text{м}}}=\frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad (19.4)$$

т. е. отношение сажени без чети $C_{\text{ч}}$ к мерной сажени $C_{\text{м}}$ равно функции золотого сечения.

Таковы лишь основные типы саженей, существовавших в древнерусской метрологии. Новгородская мерная трость, найденная в 1970 г., позволила уточнить их размеры. Новгородские меры XII в. соответствуют росту человека: a=170,5 см. Тогда $C_{\text{м}}$=175,6 см, $C_{\text{т}}$=142,1 см, $K_{\text{н}}$= =200,9 см, $K_{\text{в}}$=248,3 см, $C_{\text{ч}}$=196,3 см. Если же рост человека принять равным 6 греческим футам: a=6 · 30,87=185,22 см, то для основных саженей (мерной и малой) получим значения: $C_{\text{м}}$=190,8 см и $C_{\text{т}}$=154,3 см. Именно эти меры наиболее часто встречаются в древнерусских храмах XI в., строительство которых, по-видимому, велось византийскими мастерами. Так, вместе с христианством Русь наследовала византийскую систему мер, которая, в свою очередь, взросла на античной средиземноморской культуре. Абсолютные размеры саженей в России с течением времени сильно колебались вплоть до введения метрической системы мер в 1918 г. Но важно то, что пропорциональные отношения между парными саженями сохранялись. Эти пропорции становились пропорциями архитектурных сооружений.

О том, что меры древнерусскими строителями применялись парами, свидетельствует, например, новгородская грамота XVI в., которая так описывает размеры Софийского храма в Новгороде: «...а внутри главы, где окна,— 12 сажен, а от Спасова образа ото лбу до моста церковного — 15 сажен мерных». О применении парных мер говорит и новгородская мерная трость, в которой малая сажень $C_{\text{т}}$ использовалась либо в паре с мерной саженью $C_{\text{м}}$

$$C_{\text{т}} : C_{\text{м}} = 1 : (\sqrt{5}-1),$$

либо с косой новгородской $K_{\text{н}}$

$$C_{\text{т}} : K_{\text{н}} = 1 : \sqrt{2}.$$

Если же на новгородской трости брались мерные полусажени в паре с малой саженью, то эта пара давала золотое сечение $C_{\text{м}}/2 : C_{\text{т}}=\varphi$. Итак, красота пропорций древнерусской архитектуры заложена в самой системе древнерусских мер, дающей такие важнейшие пропорции, как золотое сечение, функция золотого сечения, отношение двойного квадрата.

Но помимо всех этих пропорций, которые от самой природы перешли в систему мер, а затем и в архитектурные памятники, был у древнерусских мастеров и еще один секрет. Именно этот секрет позволял придавать каждому древнему сооружению неповторимую прелесть, «нюанс», как говорят архитекторы. Секрет этот раскрыт в рядной записи плотника Федора на постройку деревянной церкви Усть-Кулуйского погоста (кон. XVII в.), где сказано: «А рубить мне, Федору, в высоту до порога 9 рядов, а от полу до поволоки — как мера и красота скажет...»

«Как мера и красота скажет...» Эта замечательная формула безвестного русского плотника выражает суть диалектики взаимодействия рационального (мера) и чувственного (красота) начал в достижении прекрасного, союз математики (мера) и искусства (красота) в создании архитектурных памятников.

Перейдем, наконец, к анализу пропорций церкви Покрова на Нерли. Этот архитектурный шедевр для русского человека значит столько же, сколько Парфенон для грека. Поэтому неудивительно, что пропорциональный строй небольшой церкви анализировался многими исследователями и каждый из них старался дать свою разгадку тайны ее очарования. Рассмотрим кратко и мы пропорции церкви Покрова на Нерли с двух точек зрения.

Согласно архитектору Шевелеву, в основе пропорционального строения церкви Покрова лежит отношение сажени без чети к мерной сажени, которое является функцией золотого сечения $C_{\text{ч}}:C_{\text{м}}=\sqrt{5}:2$, а сам план церкви был построен следующим образом. Вначале размечался прямоугольник длиной 3 сажени без чети и шириной 3 мерные сажени, который очерчивал столбы, несущие барабан и своды. Поскольку $3C_{\text{ч}} : 3C_{\text{м}} = \sqrt{5} : 2 = 1{,}118$, то стороны этого прямоугольника относятся в функции золотого сечения, а сам прямоугольник является почти квадратом, или, в терминологии Жолтовского, «живым квадратом». Проведя в исходном прямоугольнике диагонали, зодчий получал центр храма, а отложив на диагоналях от вершин к центру по 1 мерной сажени,— подкупольный прямоугольник и размеры несущих столбов. Так было построено ядро плана, определявшее все дальнейшие горизонтальные и вертикальные размеры сооружения. Мерная сажень строителей церкви Покрова равнялась $C_{\text{м}} = 1{,}79$ м.

Отмерив от центра храма на восток $3C$м и на запад $3C_{\text{ч}}$, мастер получал длину внешнего прямоугольника, равную

$$3C_{\text{м}} + 3C_{\text{ч}} = 3C_{\text{ч}} + 3\frac{2}{\sqrt{5}}\,C_{\text{ч}} \approx 5\frac{3}{4}\,C_{\text{ч}}.$$

А отложив этот размер в мерных саженях, — его ширину $5\frac{3}{4}\,C_{\text{м}}$. Таким образом, внешний прямоугольник плана церкви подобен ядру плана и также является «живым квадратом». Диагональ подкупольного прямоугольника определила диаметр центральной абсиды (подкупольного алтарного выступа) и диаметр барабана храма. Короткая сторона подкупольного прямоугольника задавала диаметры боковых абсид.

Наконец, высота основания храма — *четверика*, читаемая по высоте тонких колонок,— равна удвоенной длине ядра плана, т. е. $2 \cdot 3C_{\text{ч}} = 6C_{\text{ч}}$, а высота барабана с шлемовидной главой[1] — удвоенной ширине ядра, т. е. $2 \cdot 3C_{\text{м}} = 6C_{\text{м}}$. Таким образом, главные вертикальные размеры храма — высота основания и высота завершения — также относятся в функции золотого сечения. Сам же четверик представляет собой «почти куб», основанием которого является «почти квадрат», а высота почти равна сторонам основания. Итак, в построении четверика храма явно виден принцип приблизительной симметрии, который так часто встречается в природе и искусстве (см. гл. 6). Можно указать и на более мелкие членения храма, относящиеся в функции золотого сечения, т. е. в отношении сажени без чети к мерной сажени. Например, каменный поясок, венчающий колончатый фриз, который охватывает всю церковь и является ее важной архитектурной деталью, делит высоту четверика в функции золотого сечения.

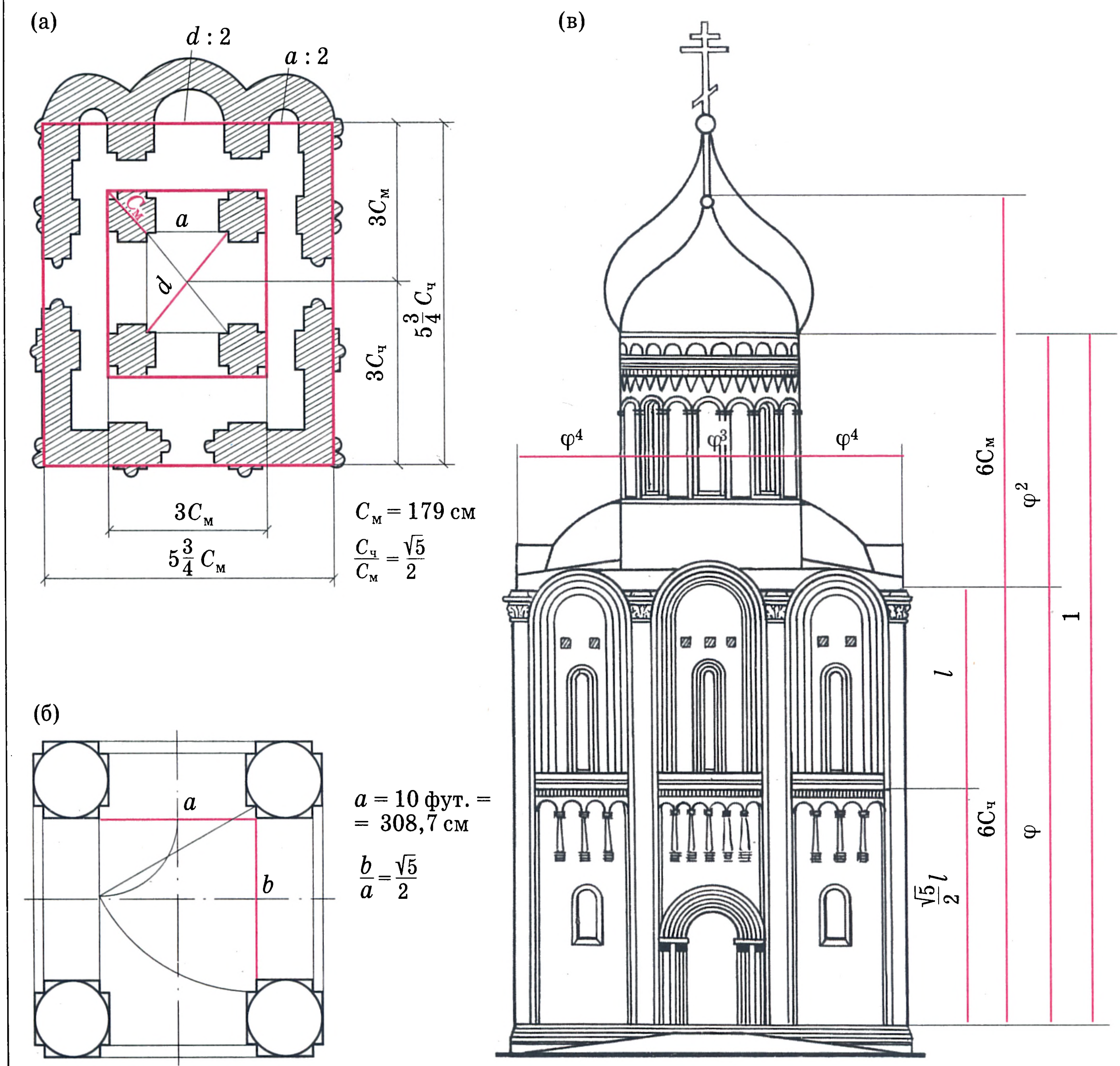
Рассмотрим теперь *ихнографию* храма Покрова на Нерли, какой ее видит знаток древнерусской архитектуры К. Н. Афанасьев. Согласно Витрувию, «ихнография есть надлежащее и последовательное применение циркуля и линейки для получения очертаний плана». Как считает Афанасьев, исходным размером церкви Покрова является меньшая сторона подкупольного прямоугольника, равная 10 греческим футам: $a = 10$ греч. фт $= 308{,}7$ см. Тогда большая сторона подкупольного прямоугольника получается как диагональ двойного квадрата со стороной $a/2$. Таким образом, подкупольный прямоугольник является «живым квадратом», стороны которого соотносятся в функции золотого сечения. Толщина столбов определяется отношением золотого сечения к модулю $a/2$. Дальнейшие построения ясны из рисунка. Так строится ядро плана. Остальные размеры плана получаются аналогичными построениями, опираясь в основном на модуль $a/2$.

Заметим, что вместе с функцией золотого сечения закон золотого сечения также определяет пропорциональный строй церкви Покрова. Это неудивительно, ибо данные отношения связаны геометрией двойного квадрата. Как установил Афанасьев, закону золотого сечения подчинены прежде всего главные вертикали храма, определяющие его силуэт: высота основания, равная высоте тонких колонок четверика, и высота барабана. Диаметр барабана относится к его высоте также в золотой пропорции. Эти пропорции видны с любых точек зрения. Переходя к западному фасаду, ряд золотого сечения можно продолжить: плечи храма

[1] Первоначально церковь Покрова имела характерный для древнерусских храмов шлемовидный купол, напоминавший шлем воина. В XVII в. шлемовидный купол был переделан на луковичный, который мы и видим сегодня.

относятся к диаметру барабана в золотой пропорции. Итак, принимая высоту белокаменной части церкви (от цоколя до купола) за единицу, мы получаем ряд золотого сечения: 1, φ, φ^2, φ^3, φ^4, который определяет силуэт архитектурного сооружения. Этот ряд можно продолжить и в более мелких деталях.

Подведем некоторые итоги. Мы видим, что гармония храма Покрова подчинена математически строгим законам пропорциональности. План церкви построен на пропорциях функции золотого сечения — «живых квадратах», а ее силуэт определяется рядом золотого сечения. Эта цепь математических закономерностей и становит-



Пропорции церкви Покрова Богородицы на Нерли. Построение плана с помощью парных мер по Шевелеву *(а)*. Геометрическое построение ядра плана по Афанасьеву *(б)*. Некоторые пропорциональные членения западного фасада *(в)*.

ся волшебной мелодией взаимосвязанных архитектурных форм. Конечно, законы пропорциональности определяют только «скелет» сооружения, который должен быть правильным и соразмерным, как скелет здорового человека. Но, помимо математических законов меры, в недрах архитектурного шедевра непременно заложены и непознанные законы красоты: «как мера и красота скажет...»!

Заметим, что с точки зрения геометрии рассмотренные нами реконструкции пропорционального строения церкви Покрова аналогичны. Они согласуются между собой и дают в плане три вписанных друг в друга «живых квадрата», отношение сторон которых $\sqrt{5}:2$ определяет весь пропорциональный строй храма. Однако с точки зрения истории архитектуры эти реконструкции отличаются принципиально. Первая из них основана на древнерусской системе мер и, следовательно, предполагает, что церковь Покрова была построена русскими зодчими. Вторая же в качестве основного размера имеет греческую меру и потому дает основание считать, что церковь строилась приглашенными из Византии мастерами... Кто и как создал жемчужину русской архитектуры? Возможно, мы еще узнаем ответ и на этот вопрос...

Церковь Покрова была построена в 1165 г. А через 73 года она стала свидетельницей небывалой в истории России беды: полчища Батыя, превратив в пепелище Рязань, Коломну и Москву, осадили Владимир. Русскому государству, истерзанному княжескими раздорами, был нанесен смертельный удар, оправиться от которого в полной мере Россия смогла только через 200 лет, к концу XV в.

В 1530 г. в царской усадьбе — селе Коломенском под Москвой — родился будущий царь пробуждающейся России Иван Грозный. А через два года здесь же, в Коломенском, на крутом берегу Москвы-реки, было завершено строительство церкви, поставленной в память об этом событии. Зодчие будто предвидели рождение небывало грозного царя: церковь тоже была небывалой. В ней все: и высота (почти 62 м), и каменный шатер, и устремленная ввысь форма — было невиданным. Новый храм словно символизировал прорыв России

ЦЕРКОВЬ ВОЗНЕСЕНИЯ в селе Коломенском (ныне Москва). *1532 г.*
Шедевр древнерусского зодчества, один из первых каменных шатровых храмов на Руси.

в свободное от татарского ига будущее. «...Бе же церковь та велми чюдна высотою и красотою и светлостию, такова не бывала прежде на Руси»,— писал о ней летописец. Весь пропорциональный строй церкви, все ее безудержное стремление ввысь как нельзя более соответствовали названию — храм Вознесения.

Но для нас храм Вознесения интересен еще и тем, что он является не только гимном расправляющей крылья России, но и архитектурным гимном геометрии. Ни один из рассмотренных архитектурных шедевров, в том числе и Парфенон, не пронизан настолько геометрией, как храм Вознесения в Коломенском. Соразмерности храма с предельной ясностью определены двумя парными мерами: горизонтальные — малой (тмутараканской) саженью $С_{\text{Т}}$ и косой новгородской саженью $К_{\text{Н}}$ ($С_{\text{Т}}:К_{\text{Н}}=1:\sqrt{2}$), вертикальные — малой саженью $C_{\text{т}}$ и мерной саженью $C_{\text{м}}$ ($C_{\text{т}}:C_{\text{м}}=1:(\sqrt{5}-1)$) и их комбинацией

$$C_{\text{м}}:2C_{\text{т}}=(\sqrt{5}-1):2=\varphi,$$

дающей золотое сечение. Таким образом, храм Вознесения является также прекрасным примером применения московскими мастерами измерительного инструмента типа новгородской мерной трости, созданной, как мы помним, для работы именно этими двумя парами мер (см. с. 229). Рассмотрим пропорциональный анализ храма, сделанный архитектором Шевелевым (см. рис. на с. 248).

В основу плана церкви Вознесения положен квадрат $ABCD$ со стороной в 10 малых сажень: $a=AB=10C_{\text{т}}$. Ясно, что диагонали квадрата равны 10 косым новгородским саженям:

$$AC=BD=10\sqrt{2}\,C_{\text{т}}=10K_{\text{н}}.$$

Так с помощью парных мер $C_{\text{т}}$ и $K_{\text{н}}$ осуществлялся контроль правильности построения исходного квадрата. Окружность радиуса $R=5K_{\text{н}}$, описывающая квадрат, определяет положение всех 12 наружных углов плана храма. Вписав через середины сторон в квадрат $ABCD$ новый квадрат и сделав построения, очевидные из рисунка на с. 248, мы получим внешний контур плана — *20-угольник*. Выступающие над исходным квадратом части называются притворами, их ширина равна $\frac{a}{2}=5C_{\text{т}}$. Выразив радиус описанной окружности R в мерных саженях и отложив эту величину в малых саженях, строители получали сторону квадрата b, определяющего внутреннее пространство храма:

$$R=5K_{\text{н}}=5\sqrt{2}\,C_{\text{т}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}\,C_{\text{м}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}\,C_{\text{т}}=\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{5}-1)}\,a.$$

Разумеется, коломенские мастера не вычисляли никаких радикалов. Они просто прикладывали мерную трость разными сторонами и автоматически переходили из одной меры в другую. План церкви построен. А мы выразим еще сторону квадрата c, охватывающего притворы: $c=\sqrt{7}a/2$ (треугольник, из которого находится $\frac{c}{2}$, на чертеже не показан, чтобы не портить красоту центральной симметрии плана; найдите его). Зная a, b, c, легко выразить все остальные размеры плана и соотношения между ними.

Перейдем к объемам и вертикальным членениям храма. Церковь Вознесения со всех сторон окружена крытой галереей, поднятой над уровнем земли и называемой *гульбищем*. Гульбище делалось на уровне перекрытия *подклета* — полуподвального помещения, используемого в хозяйственных целях. Вход в церковь устраивался с гульбища, на которое в храме Вознесения ведут три крыльца, и, таким образом, вертикальные размеры церкви с гульбищем воспринимаются от уровня последнего.

Основной объем храма составляет 20-гранная призма, поставленная на подклет. Ее высота равна стороне исходного квадрата a. Таким образом, ядром основного объема является куб — четверик $a\times a\times a$ ($a=10C_{\text{т}}$), украшенный гранями притворов. Вместе с подклетом высота 20-гранной призмы равна диагонали исходного квадрата

$$a\sqrt{2}=10\sqrt{2}\,C_{\text{т}}=10K_{\text{н}}.$$

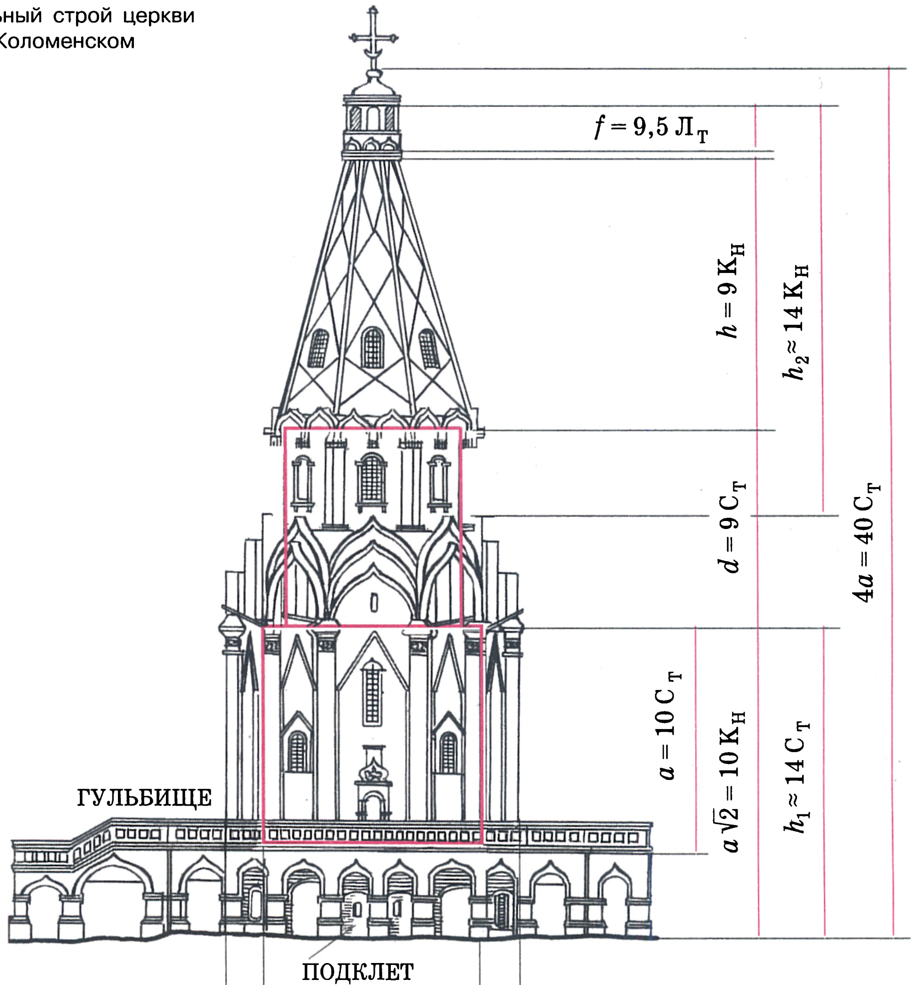
Итак, сторона и диагональ исходного квадрата (ядра плана) полностью определяют вертикальные размеры основного объема (ядра основания).

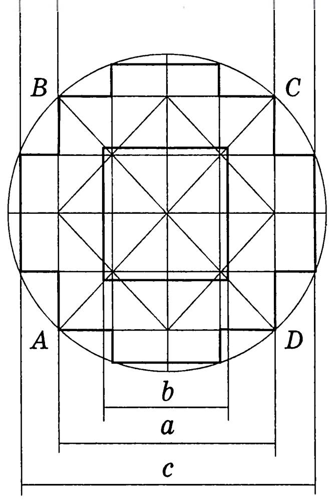
Двадцатигранная призма основного объема через затейливый пояс кокошников переходит в восьмигранную призму — *восьмерик*. Восьмерик также вписан в куб $d\times d\times d$ ($d=9C_{\text{т}}$). Затем восьмерик переходит в восьмигранный шатер, высота которого

$$h=d\sqrt{2}=9\sqrt{2}\,C_{\text{т}}=9K_{\text{н}},$$

т. е. шатер вписан в прямоугольный параллелепипед $9C_{\text{т}}\times 9C_{\text{т}}\times 9K_{\text{н}}$. Площадь верхнего сечения шатра уменьшена в 16 раз, а его линейные размеры — в 4 раза. Поскольку 1/4 сажени равна локтю, то, следовательно, верхнее сечение вписано в квадрат $9Л_{\text{т}}\times 9Л_{\text{т}}$, где $Л_{\text{т}}$ — малый (тмутараканский) локоть ($4Л_{\text{т}}=C_{\text{т}}$).

Пропорциональный строй церкви Вознесения в Коломенском (по Шевелеву).





$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{С_Т}{К_Н} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a = 10\ С_Т$$

$$AC = a\sqrt{2} = 10\ К_Н$$

$$b = \frac{\sqrt{2}a}{2(\sqrt{5}-1)}$$

$$c = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

Наконец, через венчающий карниз шатер завершается восьмигранным барабаном, сечение которого на малый полулокоть превышает верхнее сечение шатра. Барабан чуть нависает над шатром и вписан в куб $f \times f \times f$ ($f=9{,}5Л_т$), а вместе с главкой, взятой без яблока (см. рис. на с. 248), барабан вписан в прямоугольный параллелепипед $f \times f \times \sqrt{2} f$.

Итак, мы видим, как сторона ядра плана a, измеренная то малой саженью, то косой новгородской, рождает все главные вертикали храма. Заметим, что общая высота церкви от верха цоколя до яблока, на котором стоит крест, равна $4a=40С_т$, т. е. также простейшим образом выражается через исходный размер a. И еще одно важное отношение. Пояс кокошников, через который четверик основания переходит восьмерик шатра, делит храм на две части — основание и завершение. Высота основания $h_1 \approx 14С_т$, а высота завершения $h_2 \approx 14К_н$, откуда

$$h_1 : h_2 = С_т : К_н = 1 : \sqrt{2},$$

т. е. главные вертикальные членения храма также относятся как малая и косая новгородская сажени.

Но пропорции храма Вознесения определены не одной, а двумя математическими закономерностями. Помимо пропорции

$$С_т : К_н = 1 : \sqrt{2},$$

определяющей основание, статическое начало храма, есть в нем и другая тема — тема развития вверх, вознесения, которая определена пропорциональной цепью:

$$С_т : С_м = 1 : (\sqrt{5} - 1),$$

а также пропорцией золотого сечения:

$$С_м : 2С_т = \varphi.$$

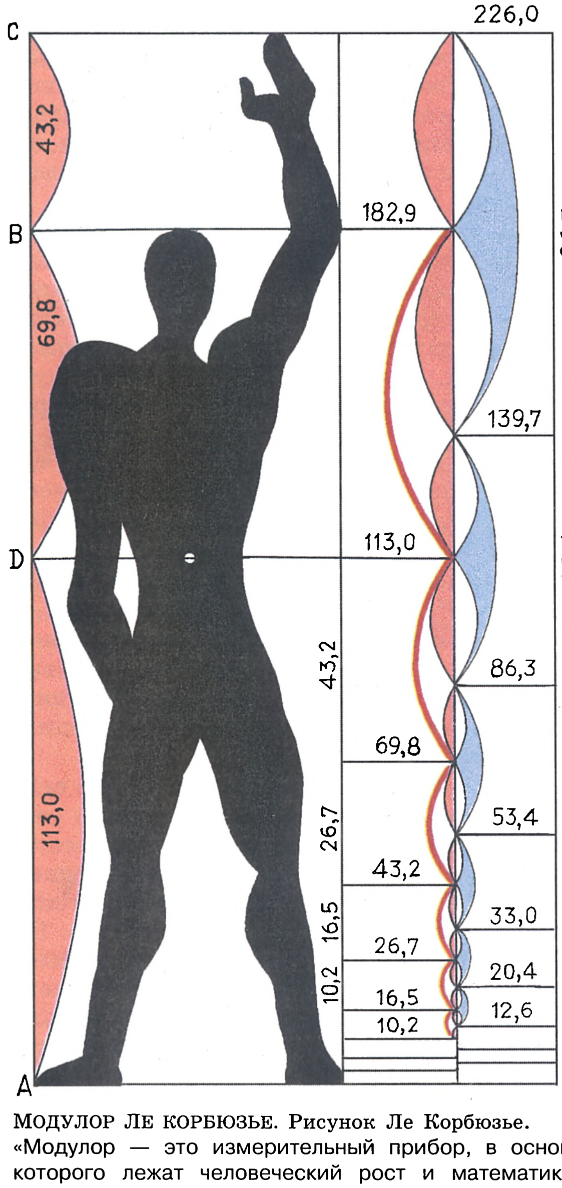
В проведении этой темы соблюден знакомый нам по Парфенону принцип встречного движения пропорций. Две разные пропорциональные цепи накладываются друг на друга, сталкиваются и противоборствуют. В этом столкновении двух противоборствующих начал — горизонтального и вертикального — и заключается архитектурный образ церкви Вознесения. Не останавливаясь на математическом анализе этих двух систем, предоставим слово автору прекрасного эстетического анализа церкви Вознесения, искусствоведу А. Циресу. «В образе этой церкви,— пишет Цирес, — сплетаются два основных лейтмотива: мотив острого, полного столкновений и диссонансов динамизма и мотив гармонически спокойной красоты... Сложный ритм арок нижних галерей... идет, учащаясь от краев к центру,... теснит арки от краев к углам основного массива церкви и к ее середине,... подсказывает смену горизонтального движения движением, направленным ввысь... Так снизу вверх идет последовательное смягчение кристаллизма и нарастание компактности объема, вплоть до его стянутости в крепкий узел, венчающий всю объемную композицию главкой».

Но закончить разговор о пропорциях церкви Вознесения в Коломенском нам хочется словами автора математического анализа ее пропорций Шевелева. «Подчеркнем выразительнейшую деталь размерной структуры, наиболее ярко показывающую особенность логики древнего мастера, стремящегося особенно точно выразить в метрологии главное. Так же как 10 саженей определили, по существу, весь храм, его ядро, так же и 10 локтей определили символ и венчание церкви — крест ($10С_т \times 10С_т \times 10С_т$ — четверик; $10С_т \times 10С_т \times 10К_н$ — призма четверика; $10Л_т \times 10Л_т$ — соразмерность креста, ибо в нем заключен для зодчего и смысловой символ соединения, и символ торжества вертикали, и символ храма, и символ пропорции, построившей этот образ)».

Нам остается только добавить, что село Коломенское давно уже стало частью современной Москвы и тем, кто не знает этого, мы рекомендуем сойти на одноименной станции метро и воочию убедиться в гениальности безвестных русских мастеров. Ну а те, кто знаком с храмом Вознесения, быть может, захотят теперь взглянуть на него другими глазами, увидеть в нем не только причудливую игру воображения художника, но и мудрый расчет изощренного ума мастера.

Коль скоро речь у нас зашла о метро, то перенесемся наконец в современный XX в. Время поисков пропорций и сегодня не кануло в Лету, напротив, по мнению Ле Корбюзье, оно только настало.

Мы уже отмечали, что антропоморфные меры благодаря своему происхождению оказались как нельзя лучше приспособлены для конструирования архитектурной среды и содержали в себе замечательные пропорции, позволявшие древним мастерам создавать прекрасные памятники архитектуры.

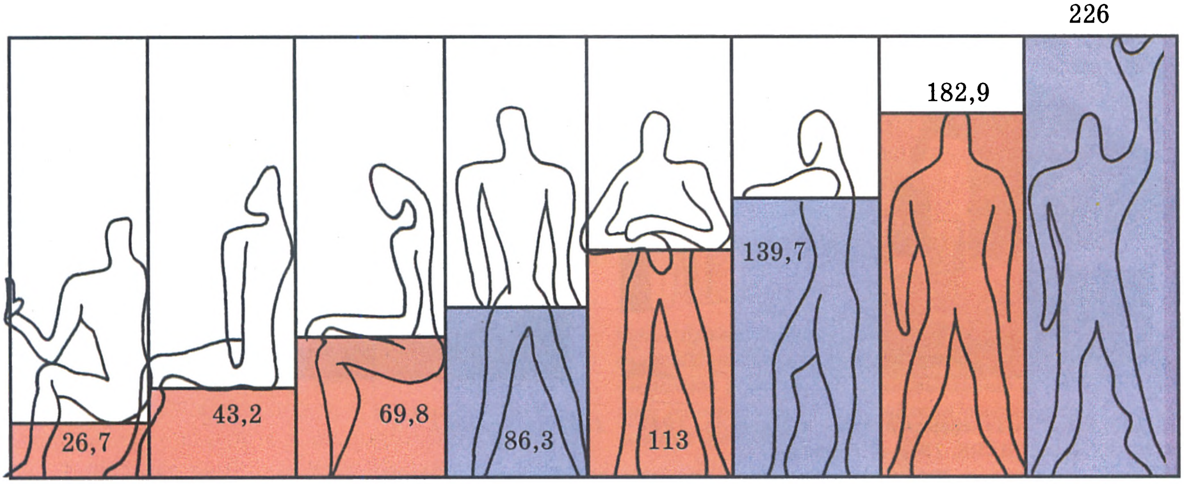


МОДУЛОР ЛЕ КОРБЮЗЬЕ. Рисунок Ле Корбюзье. «Модулор — это измерительный прибор, в основе которого лежат человеческий рост и математика» (Ле Корбюзье).

7 апреля 1795 г. во Франции была введена метрическая система мер, в разработке которой участвовали такие крупнейшие ученые, как Лаплас, Монж, Кондорсе. За единицу длины — *метр* — была принята 1/10 000 000 часть 1/4 длины парижского географического меридиана. Метрическая система обладала бесспорными преимуществами и все шире раздвигала границы своего существования. Однако метр никоим образом не был связан с человеком, и, по мнению Ле Корбюзье, для архитектуры это имело самые серьезные последствия: «Принимая участие в постройке хижин, жилых домов, храмов, предназначенных для потребностей человека, метр, по-видимому, ввел в них чужие и чуждые единицы измерения и, если мы присмотримся к нему ближе, может быть обвинен в дезориентации современной архитектуры и ее искажении... Архитектура, построенная на метрических измерениях, сбилась с правильного пути».

Но главная причина, толкавшая зодчих XX в. на поиски новых систем измерений в архитектуре, была все-таки не в недостатках метрической системы мер. Английская архитектура продолжала пользоваться футами и дюймами, но и у нее возникли те же проблемы. Дело было в том, что начиная с XX в. в архитектуру пришли невиданные объемы и темпы строительства. Проектирование архитектурной среды стало преимущественно типовым, а сама архитектура — индустриальной. В этих условиях строительные элементы необходимо было стандартизировать и унифицировать. Кроме того, архитекторам хотелось бы примирить непримиримое: красоту и стандарт. Требовалось найти такие методы пропорционирования, которые обладали бы максимальной гибкостью, простотой и универсальностью. «Если бы появился какой-нибудь линейный измеритель, подобный системам музыкальной записи, не облегчился бы ряд проблем, связанных со строительством?» — спрашивал Ле Корбюзье. И в 1949 г. он сам отвечает на этот вопрос, предложив в качестве такого измерителя систему модульной унификации — модулор.

Идея построения модулора гениально проста. Модулор — это ряд золотого сечения (17.2):



Числа красной и синей шкал модулора — действительные размеры, соответствующие определенным положениям тела человека. Рисунок Ле Корбюзье.

$$\begin{array}{llllllll} \ldots, & \Phi^{-4}, & \Phi^{-3}, & \Phi^{-2}, & \Phi^{-1}, & \Phi^{0},\ \Phi, & \Phi^{2}, & \ldots \\ \ldots, & 0{,}146, & 0{,}236, & 0{,}382, & 0{,}618, & 1,\ 1{,}618, & 2{,}618, & \ldots, \end{array} \qquad (19.1)$$

умноженный на два коэффициента. Первый коэффициент k_1 равен росту человека; умножая (19.1) на k_1, Корбюзье получает так называемый *красный ряд*. Второй коэффициент k_2 равен расстоянию от земли до конца поднятой руки человека (это большая сажень в древнерусской системе мер). При умножении (19.1) на k_2 получается *синий ряд*. Осталось только выбрать числовые значения коэффициентов. Желая примирить в модулоре английскую и французскую системы мер, а также следуя античной традиции, согласно которой рост человека равен 6 футам, Корбюзье взял в качестве k_1 6 английских футов, т. е. $k_1=6\cdot 30{,}48=$ $=182{,}88$ см. Значение k_2 принято равным 226,0 см. Так были получены красный ряд:

$$\begin{array}{lllllllll} \ldots, & 26{,}7, & 43{,}2 & 69{,}8, & 113{,}0, & 182{,}9, & 295{,}9, & 478{,}8, & \ldots \\ \ldots, & a_{-4}, & a_{-3}, & a_{-2}, & a_{-1}, & a_0=k_1, & a_1, & a_2, & \ldots \end{array} \qquad (19.2)$$

и синий ряд:

$$\begin{array}{lllllllll} \ldots, & 33{,}0, & 53{,}4, & 86{,}3, & 139{,}7, & 226{,}0, & 365{,}8, & 591{,}8, & \ldots \\ \ldots, & b_{-4}, & b_{-3}, & b_{-2}, & b_{-1}, & b_0=k_2, & b_1, & b_2, & \ldots \end{array} \qquad (19.3)$$

Значение k_2 было выбрано еще и так, чтобы между красным и синим рядами существовала простая связь:

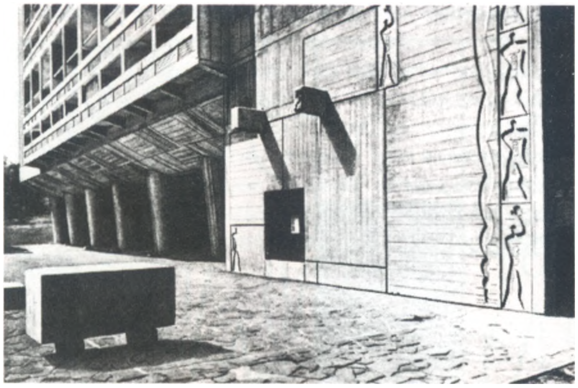
$$b_n=2a_{n-1}\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots). \qquad (19.4)$$

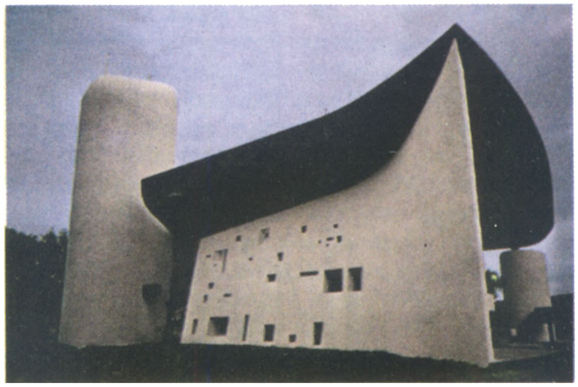
Следовательно, синий ряд фактически есть удвоение красного ряда.

Будучи геометрическими прогрессиями, члены обоих рядов модулора образуют цепь равных отношений:

$$a_{n+1} : a_n = b_{n+1} : b_n = \Phi,$$

т. е. в модулоре воплощается принцип гармонии: «из всего — единое, из единого — все». Благодаря аддитивному свойству золотого сечения «части» модулора сходятся в «целое». Наконец, абсолютные значения шкал модулора происходят от человека и потому хорошо приспособлены для проектирования архитектурной среды. Так, по мнению автора, модулор вносит порядок, стандарт в производство и в то же время связывает все его элементы законами гармонии.





ЛЕ КОРБЮЗЬЕ. «Лучезарный дом» в Марселе. *1947— 1952 гг. (слева).*
КАПЕЛЛА В РОНШАНЕ. *1958 г. (справа).*
Эти два антипода в творчестве великого зодчего, две различные философии в архитектуре связаны воедино гаммой архитектурных пропорций — модулором.

Однако «погоня за двумя зайцами» (желание иметь хорошие числа и в метрах, и в футах) вылилась в серьезный недостаток: размеры модулора оказались несоразмерными со средним ростом человека. Широкого распространения модулор не получил. Но идеи стандарта и гармонии, заложенные в модулоре, не перестают волновать архитекторов. Вечный поиск совершенной гармонии продолжается. Архитектором Я. Д. Гликиным разработана *универсальная система пропорциональности*, которая, как показывает автор, вбирает в себя все известные до сего времени системы пропорционирования: системы триангулирования на египетском и на равностороннем треугольнике; системы Витрувия, Альберти, Хэмбиджа, Месселя, Шевелева; систему древнерусских мер и модулор Ле Корбюзье.

Что же объединяет все системы пропорциональности? Дело в том, что любая пропорциональная система — это основа, «скелет» архитектурного сооружения, это та гамма, а точнее, тот лад, в котором будет звучать архитектурная музыка. Именно это свойство модулора Ле Корбюзье имел в виду Альберт Эйнштейн, давая ему восторженную оценку: «Модулор — это гамма пропорций, которая делает плохое трудным, а хорошее — легким». Но гамма — это еще не мелодия, не музыка. Это хорошо осознавал и сам Корбюзье: «Модулор — это гамма. Музыкант располагает гаммой и создает музыку по своим способностям — банальную или прекрасную». В самом деле, как гамма уже третье тысячелетие дает возможность композитору создавать бесконечное разнообразие мелодий, так и система пропорционирования — модулор — нисколько не стесняет в творчестве архитектора. Сам Корбюзье блестяще доказал это, построив с помощью своего модулора и знаменитый «Лучезарный дом» в Марселе, и не менее знаменитую капеллу в Роншане. Эти два произведения великого зодчего — два антипода, две разные философии в архитектуре. С одной стороны, воплощение здравого смысла, ясного, прямолинейного и рационального. С другой — нечто иррациональное, пластическое, скульптурное, сказочное. Единственное, что объединяет эти два выдающихся памятника зодчества, — это модулор, архитектурная гамма пропорций, общая для обоих произведений Ле Корбюзье.

Но почему великий Эйнштейн систему пропорционирования в архитектуре — модулор — сравнивает с музыкальной гаммой? Почему его великий соотечественник Гёте называет архитектуру отзвучавшей музыкой? Что общего между архитектурой и музыкой? Это и будет последний вопрос, на который мы попытаемся ответить в следующей главе книги.

20. *АРХИТЕКТУРА — МАТЕМАТИКА — МУЗЫКА*

Вообще архитектура есть застывшая музыка.

Ф. ШЕЛЛИНГ

Один благородный философ говорил о зодчестве как о застывшей музыке и за то не раз подвергался насмешкам. Мы думаем, что мы лучше всего передадим эту прекрасную мысль, назвав архитектуру отзвучавшей мелодией.

И. В. ГЁТЕ

С легкой руки великого Гёте афоризм об архитектуре и музыке немецкого философа, идейного вождя немецкого романтизма Фридриха Шеллинга (1775—1854) стал настолько популярным, что сегодня, забыв имя настоящего автора, его настойчиво вкладывают в уста создателя «Фауста». Парадоксальность высказывания Шеллинга, соединившего в себе две столь далекие друг от друга области искусства — архитектуру и музыку, делает его еще более привлекательным. А ведь сопоставление архитектуры и музыки в большей степени закономерно, чем парадоксально, и поистине замечательно, что связующим звеном между архитектурой и музыкой выступает математика.

В чем же проявляется общность архитектуры, музыки и математики? Прежде всего — в максимальной абстрактности этих форм человеческой деятельности. Архитектура является наиболее абстрактным из *пластических искусств*, т. е. искусств, существующих в пространстве и воспринимаемых зрением. Назначение зрения — воспринимать предметы внешнего мира, а назначение пластических искусств — воспроизводить с той или иной мерой чувственной достоверности эти предметы. Однако архитектура не отображает реально существующие объекты, а создает некоторые абстрактные формы, которые являются плодом фантазии ее творца. Конечно, нам известны колонны в форме лотоса в древнеегипетской архитектуре или древнегреческие атланты и кариатиды, растительные мотивы коринфских капителей или звериные маски во владимиро-суздальском зодчестве. Но все это лишь элементы, украшения, архитектурная скульптура, но не сама архитектура в целом.

Музыка на первый взгляд является антиподом архитектуры. В противоположность архитектуре музыка развивается во времени, а не в пространстве; музыка обращена к слуху. Однако роднит эти два искусства та же абстрактность формы. В самом деле, на слух мы воспринимаем звуковую информацию из внешнего мира. Но музыка не воспроизводит словесную речь, она ничего не описывает и обычно не изображает природные звуки и звукосочетания. Музыкальная форма абстрактна, она рождается в голове ее создателя и практически не имеет аналогов во внешнем мире.

Так же и математика. Будучи наукой, целью которой является выработка и систематизация объективных знаний о действительности, математика не имеет материального предмета изучения во внешнем мире. Математика — предельно абстрактная наука, но именно это качество наделяет ее силой, позволяет математике стать универсальным языком науки.

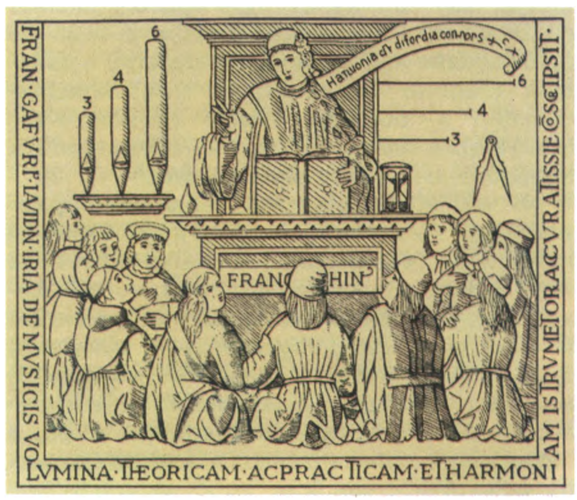
Как и математика, архитектура и музыка от объекта реального мира через многие ступени абстракции поднимаются до совершенных высочайших идеальных образов. И разница между этими сферами творческой деятельности здесь проявляется лишь в том, что в математике абстрактные образы логические, в музыке — чувственные, а в архитектуре, пожалуй, и те и другие, ибо архитектура вбирает в себя качества и науки, и искусства. Ни математик, ни композитор, ни архитектор не могут непосредственно сравнить результаты своего творчества с конкретными явлениями внешнего мира. И лишь одна путеводная звезда — логика развития науки или искусства — направляет их путь. Но разумеется, ни архитектурные, ни музыкальные, ни математические абстракции — это не химеры, существующие в своем ирреальном мире, а те идеализации, которые, отбрасывая преходящее, частное, отражают природу глубже, вернее, *полнее*.

Итак, архитектура и музыка являются искусствами неизобразительными и неописательными. Архитектурная и музыкальная формы абстрактны, и поэтому в них яснее, нежели в других искусствах, проявляются такие законы построения формы, как симметрия, пропорциональность, гармония, равенство, повторы частей и т. д. Лишенные внутренних законов построения, эти абстрактные формы будут лишены и тех внешних ориентиров, которые так необходимы при их восприятии. Именно объективным системным характером внутренних законов построения музыкальной формы объясняется то, что «музыка вызывает сходные мысли в разных головах» (Бодлер). То же в полной мере относится и к архитектуре.

Но откуда и архитектуре, и музыке взять законы построения формы, которые бы стали их фундаментом? Для тех, кто стоит на «природнической» точке зрения на красоту, этой проблемы не существует. Разумеется, у природы. Но ведь законы природы, законы гармоничного, целесообразного и прекрасного устройства мироздания описываются математикой! Вспомним «непостижимую эффективность математики в естественных науках» (см. с. 47), вспомним слова Гейзенберга: «Понимание всего богато окрашенного многообразия явлений достигается путем осознания присущего всем явлениям объединяющего принципа форм, выражаемого на языке математики. Таким же образом устанавливается тесная взаимосвязь между тем, что воспринимается как прекрасное, и тем, что доступно пониманию лишь с помощью интеллекта».

Особенно ценно, что к тому же выводу о необходимости существования в основе архитектуры и музыки «объединяющего принципа формы» приходят не только представители естественных наук (что вполне естественно), но и служители мира искусств. Вот слова архитектора, академика Щусева: «Наряду с меняющимися формами природы и жизни есть и нечто вечное, а именно — закон красоты и гармонии, который проявляется одинаково в жизни природы и человека. Именно этот закон дает возможность построить теорию пропорций и пластических форм, а в музыке — теорию соотношения звуковых ладов». А вот мнение музыковеда, профессора Мазеля: «Без высотной (ладовой) организации музыки невозможно выработать некоторый «музыкальный язык», понятный широкому кругу людей. Без какой-либо ладовой системы, существующей во внутреннем слухе поющих, напев не мог бы запомниться и передаваться».

Но что же является этим загадочным «объединяющим принципом формы», ко-



Гравюра из книги Франкино Гафурио «Теория музыки».
Мы видим атрибуты музыки — органные трубы и струны, связанные отношениями 6 : 4 : 3, а также атрибут архитектуры — циркуль, который, возможно, указывает на применение этих отношений в архитектуре.

торый должен лежать в основе архитектуры и музыки? Нам кажется, что математика стала тем фундаментом, тем «законом красоты и гармонии», на котором строятся абстрактные формы архитектуры и музыки.

Поясним эту мысль на знакомых нам примерах. В главе 13 мы задавались вопросом: почему из 4000 звуков, хорошо различимых человеком, в музыке используется лишь около 90? Да только потому, что в основу музыки положена строгая математическая организация звуков. Только организовав звуки в октавы, только упорядочив их внутри каждой октавы, человек смог навести в мире звуков порядок, который стал «радовать глаз и разум» (в нашем случае «слух и разум»). Только после построения гаммы стало возможным выработать «музыкальный язык» и передать «музыкальные мысли» — мелодии на этом языке. Значит, музыкальная гамма — это основа музыкального языка, заложенная по законам математики. Ну а что сказать на этом языке, зависит от таланта, вкуса, душевного богатства композитора.

Что представляет собой гамма внутри октавы, каково ее математическое строение? Этим вопросом мы занимались практически на протяжении всей второй части. В главе 11 мы показали, что равномерно-темперированная гамма — основа сегодняшней музыки — есть не что иное, как геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt[12]{2}$. Но ведь именно в геометрической прогрессии достигается соразмерность частей и целого, именуемая гармонией. Таким образом, гамма в пределах октавы также есть упорядоченная по законам математики последовательность звуков, которая в силу октавного подобия звуков является основой основ музыки. Не случайно Пифагор придавал огромное значение построению именно этой части музыкальной шкалы (см. эпиграф к гл. 8).

То же самое мы наблюдаем и в архитектуре. Из бесконечного многообразия соотношений между частями и целым в архитектурных шедеврах непременно заложена какая-то математическая закономерность, позволяющая отобрать и упорядочить эти отношения. В основе построения архитектурной формы лежит некоторый математический закон — закон пропорционального строения этой формы. В качестве такого закона в силу особых математических свойств (см. гл. 17) часто выступает геометрическая прогрессия — ряд золотого сечения или его производная — модулор Ле Корбюзье, а также функция золотого сечения или парные меры $1:\sqrt{2}$ или $1:\sqrt{5}$. Эти математические закономерности гармонизируют размеры сооружения, определяют его соразмерную структуру. Разумеется, как в музыке, так и в архитектуре пропорциональная шкала — это только «эстетический фундамент» архитектурного произведения, который никак не сдерживает творческой фантазии автора.

Заметим, что проблема гармонизации частей и целого давно уже перестала быть прерогативой лишь музыки или архитектуры. Повышение эстетических качеств промышленных изделий, придание им красивой формы и одновременно их стандартизация — одна из важнейших задач *технической эстетики*. Естественно, что решается эта задача на базе того же математического аппарата.

Чтобы связать части целого единым пропорциональным отношением, строятся так называемые *ряды предпочтительных чисел* (R), которые являются ни чем иным, как геометрическими прогрессиями. В качестве знаменателей таких прогрессий выбирают степени числа 10. При этом сами степени, в свою очередь, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем: 1/2, 1/5, 1/10, 1/20, 1/40. Так получаются *инвариантные гармонические ряды:* $R5$ ($q=\sqrt[5]{10}\approx1{,}5849$), $R10$ ($q=\sqrt[10]{10}\approx1{,}2589$), $R20$ ($q=\sqrt[20]{10}\approx1{,}1220$), $R40$ ($q=\sqrt[40]{10}\approx$ $\approx1{,}0593$), которые связаны тем, что каждый предыдущий ряд «вложен» во все последующие. Кроме того, поскольку $10^{3/10}=10^{6/20}=10^{12/40}=1{,}9951\approx2$, то в ряду $R10$ происходит удвоение чисел через каждые 3 члена, в ряду $R20$ — через 6 членов, а в ряду $R40$ — через 12 членов. Исходя из этого свойства значения предпочтительных чисел округляются.

Отметим одну любопытную деталь. Так как $\sqrt[40]{10}\approx1{,}0543$, а $\sqrt[12]{2}\approx1{,}0594$, то с достаточной степенью точности можно сказать, что ряд $R40$ лежит в основе равномерно-темперированного строя:

$R10$:	1,00				1,25				1,60				2,00
$R20$:	1,00		1,12		1,25		1,40		1,60		1,80		2,00
$R40$:	1,00	1,06	1,12	1,18	1,25	1,32	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
$2^{\frac{k}{12}}$:	1,00	1,06	1,12	1,19	1,26	1,33	1,41	1,50	1,59	1,68	1,78	1,89	2,00
	ДО		РЕ		МИ	ФА		СОЛЬ		ЛЯ		СИ	ДО$_1$

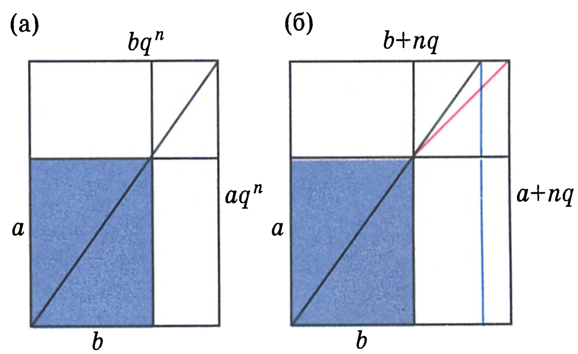
Преимущества гармонизации с помощью ряда предпочтительных чисел (геометрической прогрессии) перед обычным рядом чисел (арифметической прогрессией) очевидны из простого примера. Если стороны прямоугольника a и b увеличивать в геометрической прогрессии ($a_n=aq^n$, $b_n=bq^n$), то пропорции прямоугольника будут сохраняться: $\frac{a_n}{b_n}=\frac{aq^n}{bq^n}=\frac{a}{b}$; более того, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{aq^n}{bq^n}=\frac{a}{b}$. Арифметическая прогрессия ($a_n=a+nq$, $b=a+nq$) не сохраняет пропорции прямоугольника: $\frac{a_n}{b_n}=\frac{a+nq}{b+nq}\neq\frac{a}{b}$, причем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a+nq}{b+nq}=1$, т. е. форма прямоугольника будет приближаться к квадрату. Свойство геометрической прогрессии сохранять пропорции ее членов было использовано еще в 1805 г. во Франции для упорядочения типографских шрифтов.

Отметим еще одну геометрическую прогрессию, имеющую непосредственное отношение к этой книге. Сегодня во многих странах, в том числе и в нашей, применяется стандарт, введенный в начале века немецким ученым Портсманом. Портсман выбрал отношение сторон прямоугольного листа бумаги $a:b$ из условия, чтобы при складывании (фальцовке) эта пропорция сохранялась, т. е. $a:b=b:a/2$ (см. рис.). Решая это элементарное уравнение, находим: $a:b=\sqrt{2}$. В качестве исходного формата был выбран лист площадью 1 м^2 со сторонами 1189×841 мм ($\sqrt{2}:1$), а затем найдены и его доли: 1/2 м^2=841×594 мм; 1/4 м^2= =594×420 мм; 1/8 м^2=420×297 мм; 1/16 м^2=297×210 мм — лист для пишущей машинки; 1/32 м^2=210×148 мм; 1/64 м^2= =148×105 мм — формат почтовой открытки. Так был построен основной ряд форматов бумаги RA. Существуют также и производные от этого ряда.

Как видим, математические вопросы гармонизации частей и целого увели нас далеко и от музыки, и от архитектуры. Как тут не вспомнить высказывание английского естествоиспытателя, соратника Чарлза Дарвина — Томаса Гексли (1825—1895) о том, что математика, подобно жернову, перемалывает то, что под него засыпают. Однако если вдуматься, то все это имеет самое прямое отношение к нашей теме, ибо как на стандартном листе бумаги можно написать все что угодно, так и с помощью гармонизированной шкалы звуков (музыкальная гамма) или шкалы пропорций (модулор Ле Корбюзье) можно создать бессмертное произведение, а можно и...

Но вернемся к архитектуре и музыке. Музыка развивается во времени, она не стоит на месте, подвижна, она меняется каждое мгновение. Но если прозвучавшую музыку целиком охватить в памяти, то в нашем сознании станут проступать закономерности ее архитектурного строения: симметрия, пропорциональность, соразмерность частей и целого — гармония, ритм и т. д.

Именно законы общего построения музыки, которые выявляются памятью только



Изменение сторон прямоугольника с помощью геометрической прогрессии сохраняет его пропорции *(а)*, а с помощью арифметической прогрессии искажает их *(б)*.

в отзвучавшей мелодии, своеобразный *глобальный ритм* музыки и роднят ее с архитектурой. Именно «отзвучавшую музыку», ее глобальный ритм, ее архитектуру мы изучали в главе 14, когда рассматривали целиком всю хроматическую фантазию и всю фугу РЕ *минор* Баха и находили в их строении, в больших и малых формах пропорции золотого сечения, законы симметрии.

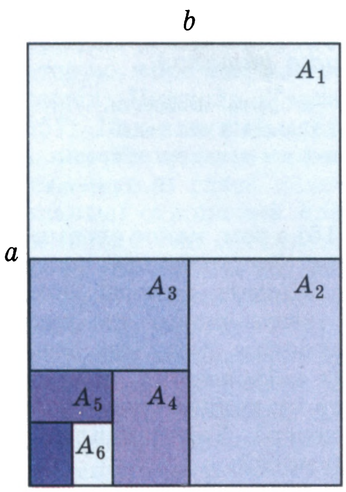
С другой стороны, *локальный ритм* музыки, звучащие сию минуту музыкальные фразы сближают музыку с поэзией. И как связь музыкального произведения с поэтическим словом или сценическим действием делает образное содержание произведения более богатым и многогранным, так и связь произведения архитектуры с пластикой скульптуры и живописи (росписи стен, мозаики, барельефы, скульптурные группы) — *синтез искусств* — позволяет достигнуть эмоционального воздействия, небывалого по силе и полноте чувств.

Архитектура во времени неизменна. Но подвижен человек, и, перемещаясь, он воспринимает архитектуру динамично. Меняя свое положение в архитектурной среде, глядя на памятник архитектуры с разных точек зрения, человек по-разному воспринимает его пластические формы; они оживают, и «застывшая музыка» начинает издавать волшебные звуки.

Но архитектура динамична даже тогда, когда воспринимающий ее человек неподвижен. Меняется положение солнца, и изменяется светотеневая пластика архитектурных форм. Днем и ночью, в предрассветном тумане и в лучах заходящего солнца, укутанные мягким снегом и омытые грозовыми дождями памятники зодчества поют неповторимые чарующие песнопения.

Итак, неподвижная архитектура, подобно звучащей музыке, постигается нами во времени. Однако процессы восприятия архитектуры и музыки существенно отличаются друг от друга. Музыка, как и само время, развивается только в одном направлении; ее нельзя повернуть вспять, остановить или ускорить по воле слушателя. Напротив, при рассмотрении памятника архитектуры мы не связаны никакой наперед заданной последовательностью, мы вольны приблизиться к архитектурному сооружению или отойти от него, зайти слева и справа, остановиться. Поэтому в музыке композитор имеет возможность управлять процессом эстетического восприятия, он может заранее подготовить слушателя к кульминации или для усиления выразительности допустить диссонанс и тут же разрешить его в консонанс.

Архитектор лишен таких возможностей. Архитектурный диссонанс не может



$A_0 = 841 \cdot 1189$

$A_1 = 594 \cdot 841$

$A_2 = 420 \cdot 594$

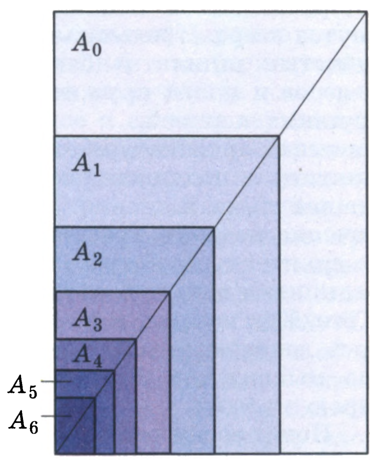
$A_3 = 297 \cdot 420$

$A_4 = 210 \cdot 297$

$A_5 = 148 \cdot 210$

$A_6 = 105 \cdot 148$

$a : b = \sqrt{2} : 1$



Построение основного формата бумаги *RA* с помощью геометрической прогрессии ($q = \sqrt{2}$), сохраняющей пропорции прямоугольного листа при фальцовке.

организованно разрешиться в консонанс и будет постоянно довлеть над зрителем. В отличие от музыки, которая может быть веселой и задумчивой, торжественной и траурной, архитектура — это искусственная среда, где человеку предстоит жить и работать, и она должна доставлять ему только радость. Правда, есть и обратные примеры. Стендаль признавался: «Я бы разучился смеяться через неделю, если бы жил в палаццо Арконати». Немало унылых памятников архитектурной какофонии окружают нас и сегодня. И все-таки по своей эстетической направленности архитектура призвана быть искусством положительных эмоций, она должна вбирать в себя все лучшие духовные ценности человечества и нести их людям. «Архитектура включает в себя всю культуру эпохи, в архитектуре проявляется дух времени», — писал Ле Корбюзье, чье высказывание дополняют слова Луначарского: «Всякому великому времени соответствует великая архитектура».

Есть в архитектуре и еще одно движение — внутреннее. Оно несет в себе один из парадоксов искусства архитектуры — движение, застывшее в вечном покое. В дорических колоннах Парфенона чувствуется невозмутимая и величавая поступь героя, а в ионическом ордере Эрехтейона — легкий шаг античной красавицы. В готике все устремлено вверх: на головокружительную высоту взлетают пучки тонких нервюр и распадаются там в паутину сводов, тянутся вверх стрельчатые окна витражей, зубчатые шпили и башенки. Среди зелени лесов и полей кружится хоровод древнерусских церквей...

Так неподвижная архитектура оживает при ее восприятии, а подвижная музыка застывает в нашей памяти.

И в заключение немного истории, ибо сопоставление архитектуры и музыки имеет давнюю традицию и началось задолго до Шеллинга и Гёте. Как музыка в античную эпоху считалась дочерью математики, так и архитектура мыслителям Возрождения казалась дочерью музыки.

Ренессанс... Новая весна человечества... Возрождался интерес к античному духовному наследию, живой античной мысли и жизнеобильному античному искусству, бесплодные штудии божественного *(studio divina)* сменялись пытливым изучением человеческого *(studio humana)*...

Пифагор (справа), аллегория Арифметики и Боэций. *Гравюра из книги Грегора Райха «Маргарита философика».*
В средневековой Европе Пифагор считался изобретателем счетной доски абака, а Боэций — создателем новой нумерации.

> Стремились все — открыть, изобрести,
> Найти, создать... Царила в эти годы
> Надежда — вскрыть все таинства природы.
>
> (В. Брюсов)

Мы знаем (гл. 16) о том, какое огромное влияние на зодчих Возрождения оказал трактат Витрувия «Десять книг об архитектуре». Но мы также знаем, что архитектурная энциклопедия Витрувия стала источником многих заблуждений, происходивших чаще всего от неправильного толкования мыслей автора. Так случилось с архитектурой и музыкой.

Ссылаясь на авторитет Витрувия, архитекторы Возрождения выдвинули тезис о том, что наиболее приятными для созерцания должны быть те прямоугольники, стороны которых относятся как числа в благозвучных (консонантных) интервалах, т. е. как октава 2 : 1, квинта 3 : 2, кварта 4 : 3, а также большая 5 : 4 и малая 6 : 5 терции и их обращения — малая 8 : 5 и большая 5 : 3 сексты. В 1485 г. во Флоренции был издан трактат «Десять книг о зодчестве». Его автором был славный представитель архитектуры Раннего Возрождения, итальянский ученый, писатель и музыкант Леон Баттиста Альберти, умерший за 13 лет до того, как его детище увидело свет. «Десять книг» Альберти было вторым после «Десяти книг» Витрувия всеобъемлющим сочинением по архитектуре. В нем мы читаем: «И конечно, вновь и вновь следует повторить изречение Пифагора: «нет сомнений, что природа во всем остается себе подобной». Дело обстоит так: существуют числа, благодаря которым гармония звуков пленяет слух, эти же числа преисполняют и глаза, и дух чудесным наслаждением. Мы должны воспользоваться пропорциями, взятыми у музыкантов, кои величайшие мастера в этом виде чисел». Поскольку приятные слуху музыкальные интервалы описываются отношением целых чисел, то, согласно Альберти, и приятные глазу архитектурные формы также должны находиться в целочисленных «музыкальных» пропорциях.

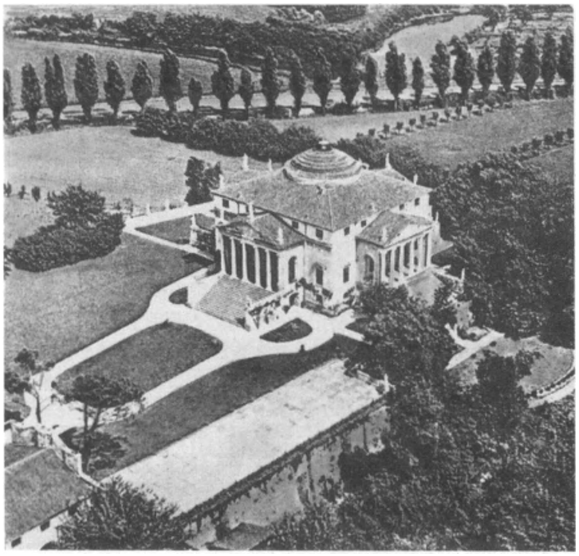
В XVI в. архитектора Альберти поддержал математик Джероламо Кардано (1501—1576), известный сегодня как автор формулы решения кубического уравнения, которую, впрочем, как великую тайну ему открыл Никколо Тарталья (ок. 1499—1557). Как истиный представитель точного знания Кардано утверждал, что приятные для слуха и глаза целочисленные (музыкальные) отношения являются таковыми, поскольку они легкопостижимы разумом. Авторство музыкальной аналогии в архитектуре Кардано также приписывал незыблемому авторитету Витрувия.

В действительности интерес Витрувия к музыке ограничивался вопросами конструирования резонаторов для античных театров, а также правильной настройкой струн в катапультах и боевых машинах, которые находились в ведении архитекторов того времени. Правда, Витрувий дал в качестве прекрасных пропорций три «музыкальных» отношения 2 : 1, 3 : 2, 5 : 3. Но наряду с ними он рассматривал и такое отнюдь не музыкальное отношение, как отношение диагонали к стороне квадрата $\sqrt{2} : 1$.

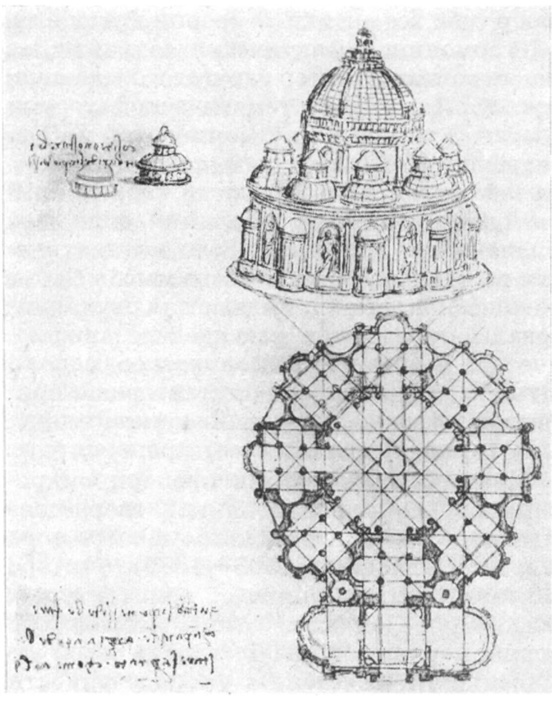
Как бы то ни было, но музыкальная аналогия прочно вошла в сознание архитекторов Возрождения. На первый взгляд кажется странным, что теоретические воззрения зодчих Возрождения в большей мере определялись не трудами самих архитекторов, а математическими разработками по теории музыки. Но если вдуматься, то это, скорее, следовало из универсального характера математики: хорошо известные в музыке «математические законы красоты» (законы целочисленных консонантных отношений и законы среднепропорциональных) архитекторы Возрождения пытались перенести на свою почву. Не говорит ли эта попытка «пройти» из музыки в архитектуру с помощью математики о безграничной вере мыслителей Возрождения в универсальное могущество математики?!

Огромную роль в развитии музыкальной аналогии в архитектуре сыграл трактат Северина Боэция «О музыке», который вобрал в себя все античные теории музыкальной гармонии и фактически сохранил их для потомков. Автор другого выдающегося трактата по математической теории музыки — итальянский композитор XVI в. Джузеппе Царлино — нам также знаком. Как мы знаем (с. 152), среди современников-музыкантов идеи Царлино должного признания не получили. Зато математические выкладки Царлино и его мысль о том, что консонантные (приятные для слуха) интервалы получаются как среднее арифметическое и среднее гармоническое, запали в душу современников-архитекторов и применялись ими для получения «консонантных» (приятных для глаза) пропорций.

Музыкальная система пропорционирования нашла живой отклик в творчестве выдающегося итальянского архитектора Андреа Палладио (1508—1580) — автора трактата «Четыре книги об архитектуре». Созданные Палладио типы городского дворца, церкви, виллы благодаря своей завершенности, сочетанию упорядоченности и пластики не только получили распространение в Италии XVI в., но и составили целое направление (*палладианство*) в европейском зодчестве XVII —XVIII вв.



ПАЛЛАДИО. Вилла Ротонда в Виченце. *1581 г.* Воплощение идеи симметрии, математической строгости и музыкальных пропорций в архитектуре Ренессанса.



ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ. План собора, основанный на правильной восьмиконечной звезде, обладает поворотной симметрией 8-го порядка и отнюдь «не музыкальной» системой пропорций $\sqrt{2}:1$.

Идея всепроникающей музыкальной гармонии, структурно-математическое понимание красоты, идея симметрии как неотъемлемого качества красоты наиболее полно воплощены Палладио в вилле Ротонда. С высоты птичьего полета в этом каноне архитектуры Ренессанса хорошо видны как поворотная симметрия 4-го порядка всего здания, так и зеркальная симметрия его фасадов, а также ощущается музыка простых целочисленных пропорций.

Вообще, убеждение в том, что архитектура — это наука и что красота здания определяется симметрией и математическими законами гармонии, можно считать главной аксиомой архитектуры Возрождения. Мыслители Возрождения были неоплатониками. Они верили в то, что платонов гептахорд (9.1), который содержит все консонансы, определяет гармонию мироздания, а значит, и единую гармонию всех искусств, а значит, и архитектуры.

И все-таки Палладио был больше архитектором, нежели философом-неоплатоником. Именно поэтому Палладио включил прямоугольник, стороны которого равны стороне и диагонали квадрата, т. е. прямоугольник с иррациональным соотношением сторон $\sqrt{2}:1$, в список семи форм, рекомендуемых для планирования комнат. А ведь одного этого прямоугольника достаточно для того, чтобы полностью разрушить музыкальную аналогию в архитектуре.

В самом деле, как мы помним, интервал тритона $\sqrt{2}:1$ является острейшим диссонансом в музыке и назывался «дьяволом в музыке». С другой стороны, мы знаем, насколько широко парная мера $\sqrt{2}:1$ применялась в архитектуре. Знали это и архитекторы Возрождения. И не только из сочинений Витрувия. Достаточно вспомнить проект собора, выполненный Леонардо да Винчи и основанный на последовательности восьмиконечных звезд. Разбиение окружности на 8 разных частей порождает угол в 45°, а восьмиконечная звезда — систему равнобедренных прямоугольных треугольников, т. е. треугольников с соотношением $\sqrt{2}:1$.

Таким образом, красота архитектурных форм явно не умещалась в прокрустово ложе целочисленных отношений. Это понимали архитекторы Позднего Возрождения, что было для них такой же трагедией, какой открытие несоизмеримости было для их кумиров — пифагорейцев. «Можно сказать, что Ренессанс вообще раздирается этим ужасающим противоречием: возрожденцам хотелось видеть и изображать живое и одушевленное трехмерное тело и в то же самое время им хотелось все свести на арифметику целых чисел» (А. Лосев. «Эстетика Возрождения»).

Тем не менее музыкальная аналогия в архитектуре оставалась очень популярной и продолжала жить в творчестве архитекторов-палладианцев XVII и XVIII вв. А попытки примирить музыку архитектуры с иррациональными отношениями не прекращаются и в XX в. Так, одни исследователи пропорций обращают внимание на то, что золотое сечение $\Phi=1{,}618...$ достаточно хорошо аппроксимируется (приближенно выражается) отношениями членов ряда Фибоначчи (17.6): $5/3=1{,}666...$ и $8/5=1{,}6$ (это большая и малая сексты в музыкальной терминологии). Действительно, без наложения друг на друга эти три пропорции отличить практически невозможно, и, таким образом, с точки зрения эстетического восприятия споры о преимуществах той или иной пропорции кажутся академическими. Другие объясняют «приятность для глаза» диссонантных иррациональных отношений тем, что при восприятии архитектурной формы глаз соизмеряет не линейные размеры, а площади поверхности. Тогда два квадрата с «немузыкальным» отношением сторон $\sqrt{2}:1$ дают «музыкальное» отношение площадей 2:1 (октаву). Квадраты с немыслимым в музыке соотношением сторон $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ дадут в площадях квинту 3 : 2 и т. д.

Мы не будем вдаваться в обсуждение вопроса, почему одни отношения приятны для слуха или для глаза, а другие — нет. Несмотря на давнюю историю, вопрос этот на карте науки остается почти белым пятном. Напомним, что консонансы в музыке Гельмгольц объяснял отсутствием неприятных биений между обертонами составляющих их гармоник (см. с. 170). Однако в настоящее время в теории Гельмгольца обнаружено много изъянов и восприятие консонансов не считается чисто физиологическим явлением. Тем более нет каких-либо установившихся соображений для объяснения эстетики восприятия тех или иных пропорций.

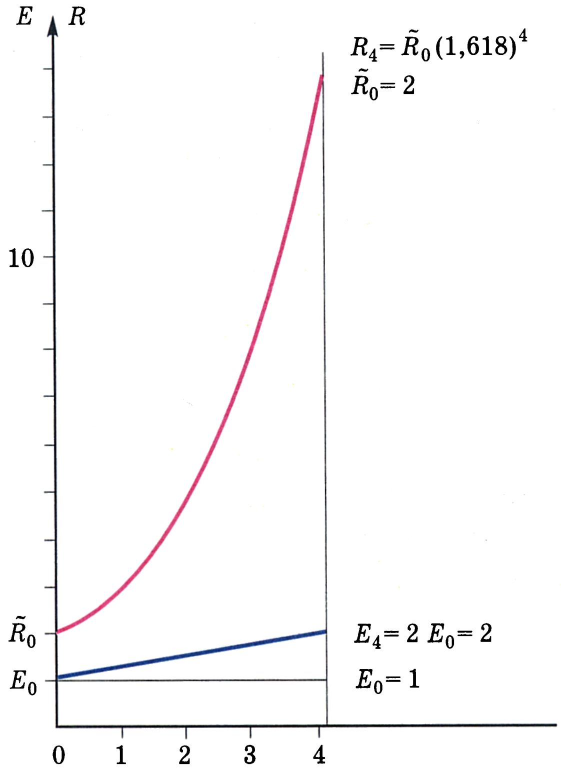
«Не углубляясь еще дальше в эту спорную область, хотелось бы подчеркнуть большое значение *какой бы то ни было теории* в архитектурном проектировании». Этими словами известный английский математик и знаток искусства Дан Пидоу в книге «Геометрия и искусство» закончил обсуждение проблемы эстетики восприятия музыкальных пропорций в архитектуре. Конечно, нам нужно было бы последовать его мудрому примеру, но хочется сказать еще два слова вот о чем.

В 1830—1834 гг. немецкий физиолог Эрнст Вебер (1795—1878) на основании многочисленных экспериментов установил, что человек воспринимает не абсолютный, а относительный прирост силы раздражителя (света, звука, груза, давящего на кожу, и т. д.), т. е. $\frac{dR}{R}$, где R — сила раздражителя, dR — прирост этой силы. Каждый по своему жизненному опыту знает, что, например, электрическая лампочка, включенная днем, не вызывает у нас никакой реакции, так как по отношению к солнечному свету прирост этой силы раздражения слишком мал ($\frac{dR}{R} \ll 1$, так как R велико). Зато в темноте нас слепит даже зажженная спичка (здесь $\frac{dR}{R} \gg 1$, так как $R \approx 0$).

20 лет спустя немецкий физик, психолог, философ и писатель Густав Фехнер (1801—1887) математически обработал результаты экспериментов Вебера, т. е. на языке математики записал факт, установленный Вебером: *приращение интенсивности ощущения dE пропорционально относительному приращению силы раздражения* $\frac{dR}{R}$:

$$dE = a\frac{dR}{R}, \tag{20.1}$$

здесь a — коэффициент пропорциональности. Получилось простейшее дифференциальное уравнение, решая которое Фехнер нашел связь между интенсивностью ощу-



Согласно закону Вебера — Фехнера, для того чтобы интенсивность ощущений E нарастала в арифметической прогрессии, вызывающая их сила раздражения R должна нарастать в геометрической прогрессии.

щения E и силой раздражения R, действующей на какой-либо орган чувств:

$$E = a\,(\ln R - \ln R^0), \qquad (20.2)$$

или

$$R = R_0 e^{E/a}, \qquad (20.3)$$

здесь R_0 — сила начального раздражения.

Формулы (20.1) — (20.3) и есть математическое выражение *основного психофизического закона — закона · Вебера — Фехнера*.

Что же мы можем извлечь из закона Вебера — Фехнера? Естественно предположить, что нам будет приятно, если наши ощущения в процессе восприятия музыки или архитектуры будут нарастать равномерно, т. е. в арифметической прогрессии. Положим $E_n = E_0 + \alpha n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$; α — разность арифметической прогрессии). Тогда согласно (20.3) вызывающая эти ощущения сила раздражения должна нарастать по закону

$$R_n = R_0 e^{\frac{E_0 + \alpha n}{a}} = R_0 e^{\frac{E_0}{a}} e^{\frac{\alpha}{a} n} = R_0^* (e^{\frac{\alpha}{a}})^n,$$

т. е. сила раздражения R_n должна нарастать в геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{\alpha/a}$.

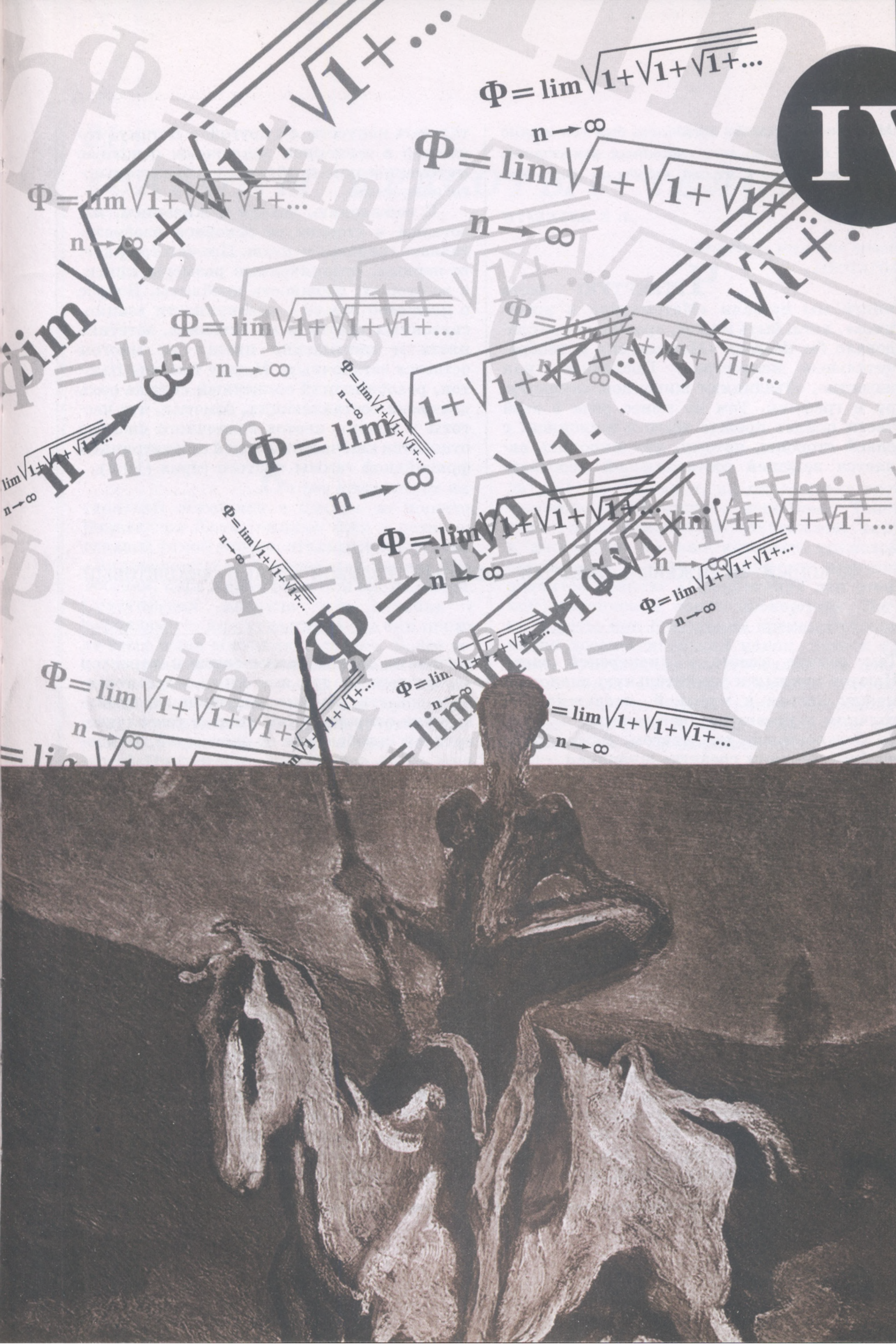
Но ведь и гамма равномерно-темперированного строя (11.1), и ряд золотого сечения (17.4) или (17.5), и красная (19.2) и синяя (19.3) шкалы модулора Ле Корбюзье являются геометрическими прогрессиями! Следовательно, все эти «раздражители» наших органов чувств обеспечивают *равномерное* возрастание (или убывание) наших ощущений. Таким образом, именно закон Вебера — Фехнера, скорее всего, и является тем математическим законом, который лежит в основе основ как музыки (музыкальная гамма), так и архитектуры (шкала пропорциональностей), той «математикой», которая связывает и музыку, и архитектуру!

Подтверждением этому могли бы стать экспериментальные значения коэффициента α/a, полученные в результате психофизических опытов. Поскольку для равномерно-темперированной гаммы $q = \sqrt[12]{2} = 1{,}06$, а для ряда золотого сечения $q = 1{,}618$ ($q = e^{\alpha/a}$), то легко находим: для музыкальной гаммы $\alpha/a = 0{,}058$, а для ряда золотого сечения $\alpha/a = 0{,}482$. Если эти значения совпадут с экспериментальными, то это и будет хотя бы в первом приближении объяснением, почему именно 12-ступенная гамма и золотое сечение в течение тысячелетий продолжают радовать наш слух, глаз и разум.

Насколько это справедливо, покажут будущие исследования. Хочется верить, что законы красоты все-таки будут разгаданы, и, памятуя традиции Баха и Моцарта, закончить главу об архитектуре и музыке мажорным аккордом.

IV

МАТЕМАТИКА И ЖИВОПИСЬ



Мне хочется, чтобы живописец был как можно больше сведущ во всех свободных искусствах, но прежде всего я желаю, чтобы он узнал геометрию.

Л. Б. АЛЬБЕРТИ

Четвертую часть книги мы назвали «Математика и живопись», хотя, быть может, правильнее ее следовало бы назвать «Математика и изобразительные искусства». Последние, как известно, объединяют живопись, скульптуру и графику. Тем не менее речь в этой части пойдет прежде всего о живописи: с одной стороны, потому, что живопись является ведущей составляющей изобразительных искусств, а с другой — потому, что именно в живописи заключены основные математические проблемы изобразительного искусства.

К сожалению, говоря о живописи, мы оставим в стороне ее основное изобразительное средство — *цвет*. Причин тому две: во-первых, ограниченные размеры книги, а во-вторых, сложность проблемы. Вопрос о *цветовой гамме* — совокупности взаимосвязанных цветов и их оттенков, эстетике цвета и математике цвета — во многом остается загадочным. Между тем еще Ньютон, разложивший солнечный свет на семь цветовых составляющих, заметил, что частоты ν границ цветов солнечного спектра относятся как частоты самой симметричной фригийской гаммы чистого строя (10.8):

$\frac{\nu}{\nu_{кр}}$: 1 $\frac{9}{8}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{16}{9}$ 2

КРАСНЫЙ ОРАНЖЕВЫЙ ЖЕЛТЫЙ ЗЕЛЕНЫЙ ГОЛУБОЙ СИНИЙ ФИОЛЕТОВЫЙ

Т Т/2 Т Т Т Т/2 Т

Тем самым вместе с дисперсией света Ньютон открыл и удивительную аналогию между цветом и музыкой, послужившую толчком к развитию цветомузыки.

Остановимся на другом важнейшем изобразительном средстве живописи — *рисунке*, который, по словам Вазари, является «отцом живописи». Рисунок играет важнейшую роль в определении очертаний предметов, их форм, объемов и взаимного расположения в пространстве. Таким образом, рисунок является «скелетом» живописи, и именно в нем заложена основная математическая проблема живописи — проблема изображения трехмерного пространства на двумерной плоскости картины, проблема *перспективы*.

Говоря о живописи, мы не будем касаться и таких средств языка живописи, как сюжет, композиция, колорит, светотень, контраст, фактура, тон, валёр, рефлекс, лессировка и т. д. Список этот можно продолжить: он говорит лишь о неисчерпаемых возможностях художественного образа. Однако, сколько бы мы ни продолжали этот список, он не поможет нам понять закономерности языка живописи, раскрыть логику взаимосвязи и характер «содружества» тех или иных выразительных средств. Логика живописного произведения откроется нам лишь в том случае, если мы освободимся от частностей, вычленим лишь самую суть, предельно абстрагируемся, и как вершина такой абстракции встанет перед нами геометрия живописи.

Во вступлении ко второй части мы говорили о том, что поиски математических закономерностей в области изобразительных искусств имеют едва ли не древнейшую традицию. Достаточно вспомнить канон Имхотепа, жившего в Древнем Египте более чем за 2000 лет до того, как Пифагор открыл законы целочисленных отношений в музыке. Эти попытки найти «формулу человека», «законы красоты человека» красной нитью проходят через всю историю изобразительных искусств.

Другой важнейшей математической темой в живописи, которая также на протяжении тысячелетий стимулировала поиски и дарила находки как художникам, так и ученым, является проблема построения перспективы. Эти две темы и составят предмет предпоследней части книги.

21.
«ЗАКОНЫ КРАСОТЫ» ЧЕЛОВЕКА

Человек — мера всех вещей.
ПРОТАГОР

Во все времена, от наскальной живописи в Сахаре до полотен Сальвадора Дали, человек был и остается главной темой изобразительного искусства. «Виллендорфская Венера» или Венера Милосская, царь Хаммурапи или бог Аполлон, Сикстинская мадонна или девочка с персиками — для художника все они прежде всего были образами человека. Более того, в предыдущей части мы узнали, что образ человека, его пропорции нашли воплощение и в архитектурных произведениях от античных и древнерусских храмов до современных сооружений Ле Корбюзье. Настало время подробнее поговорить об этих пропорциях — «законах красоты» человека.

С древнейших времен пропорции человека составляли предмет изучения художника, его «математическую лабораторию». На первых порах художником руководило, быть может, не столько стремление «дойти до самой сути», сколько необходимость в каких-то объективных — числовых или геометрических — формах передать свой опыт и свое мировоззрение преемникам. Так в искусстве возникали *каноны*.

Известны три древнеегипетских канона: первый канон эпохи Древнего царства, приписываемый Имхотепу (XXVIII в. до н. э.), слагает рост человека из 6 ступеней ноги; второй — эпохи Среднего и Нового царства (XXI—XII вв. до н. э.) разбивает каждую ступню еще на три части и таким образом составляет рост человека из 18 единиц; третий канон позднего периода[1] (XI—IV вв. до н. э.) складывает рост человека из 21 части с четвертью. Текст египетских канонов не сохранился, хотя в дошедшем до нас каталоге храмовой библиотеки в Эдфу под шестым номером значится трактат «Предписание для стенной живописи и канон пропорций». Легко видеть, как с течением времени усложнялся древнеегипетский канон, хотя и на такие «уточнения» потребовалось ни много ни мало 2500 лет! Заметим также, что древнеегипетский канон последовательно двигался к числу Фибоначчи 21, а значит, и к пропорциям золотого сечения по вертикали.

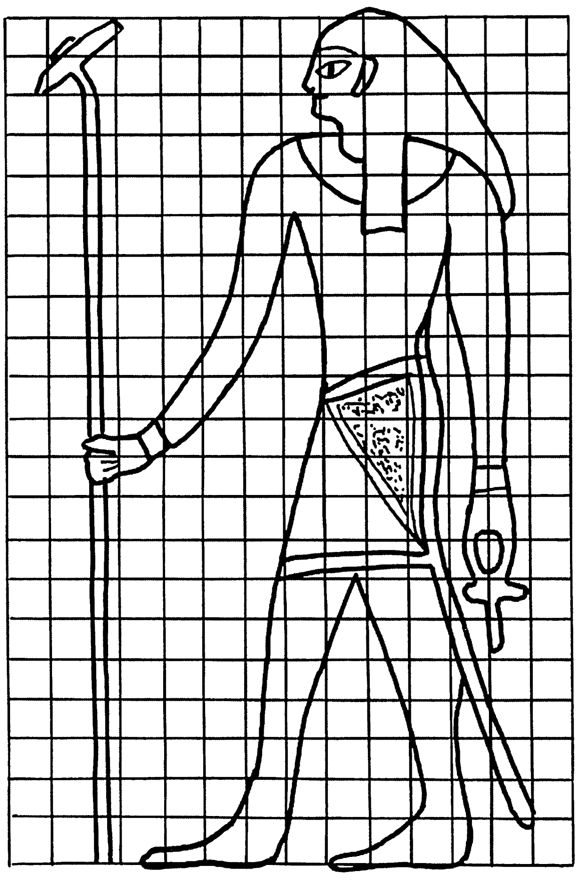
Да, мерно, как воды Нила, текло время в Древнем Египте. И столь же неторопливым, статичным было египетское искусство. Более того, следование раз и навсегда принятым канонам, в том числе и художественным, неизменность всего сущего были философией древнеегипетского общества. И эта философия оцепенения мастерски воплощена древним художником в камне. Впрочем, для нас важно другое: почти за 3000 лет до н. э. изобразительное искусство подверглось математическому анализу и анализ этот был весьма объективен, коль скоро он устраивал древнеегипетских художников на протяжении тысячелетий. Только в математических закономерностях и можно было на века сохранить художественные каноны.

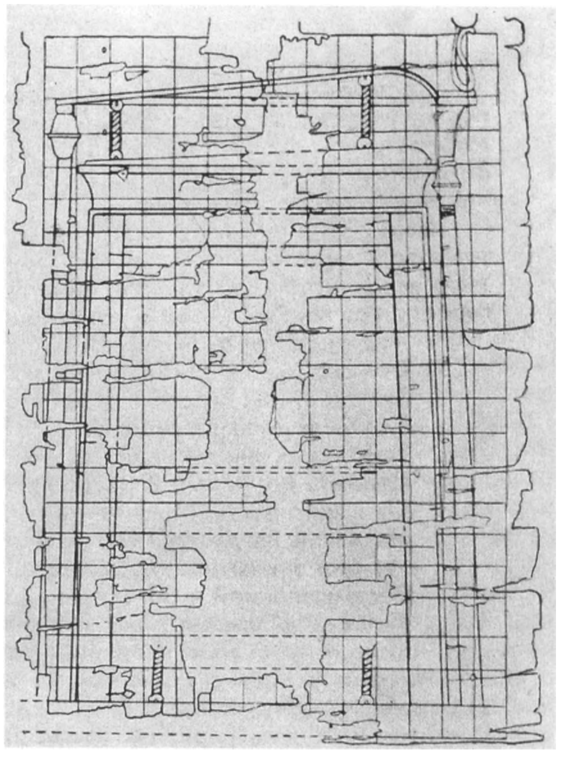
[1] Распределение канонов по периодам истории Древнего Египта весьма условно.

Вера египтян в универсальность математического знания отражена в одном из математических папирусов, который начинается словами: «Точное сложение — врата в знание всех вещей и мрачных тайн». А вера в универсальность канона доходила до того, что один и тот же канон египтяне применяли как в живописи, так и в архитектуре. Сетка квадратов, применявшаяся с равным успехом и в ваянии, и в зодчестве, была у египтян математической основой, организующей изображение. Меняться могли лишь абсолютные размеры этой сетки, само же изображение, его пропорции оставались неизменными.

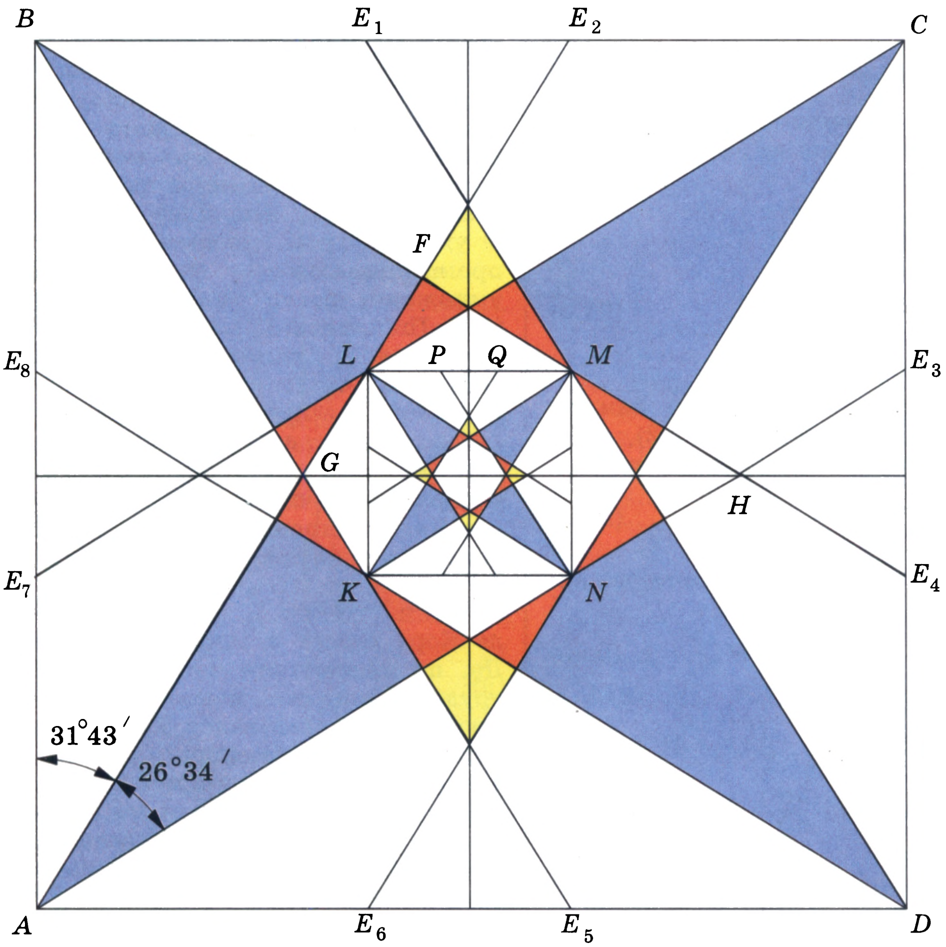
Но и внутри сетки положение фигуры строго регламентировалось математическими законами. Рассмотрим одно геометрическое построение, которое, как полагают, было известно древним египтянам. Стороны квадрата *ABCD* разделим в золотой пропорции точками E_i ($i=1, 2, \ldots, 8$). (Это легко сделать, разбив данный квадрат на четыре квадрата и в каждом двойном квадрате выполнив построения, указанные на рисунке, с. 267.) Из вершины квадрата проведем в точки деления по два отрезка. Образуется восьмиконечная звезда, внутри которой заключены два малых квадрата, образующих звездчатый восьмиугольник. Соединяя через одну точки пересечения малых квадратов, построим меньший квадрат со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата. В последнем квадрате всю процедуру можно повторить. Таким образом, получится созвездие вписанных друг в друга восьмиконечных звезд, столь же красивое, как и созвездия пятиконечных и десятиконечных звезд, которые мы наблюдали на рисунках (см. с. 218).

Не будем перегружать рисунок дополнительными построениями и лишать любителей математики удовольствия самим найти на чертеже две гаммы треугольни-





Сетка квадратов $21\frac{1}{4} \times 14$ — канон древнеегипетского искусства, применявшийся как в живописи, так и в зодчестве.



$AB=1$

$AE_8=\varphi$

$E_8b=\varphi^2$

$E_7E_8=\varphi^3$

$LQ=\varphi^4$

$QM=\varphi^5$

$PQ=\varphi^6$

...

Созвездие восьмиконечных звезд, вписанных в квадрат, содержит целую гамму золотых пропорций и использовалось древнеегипетскими художниками в пропорциях человека.

ков, подобных прямоугольным треугольникам ABE_2 и AFH. Отметим лишь, принимая сторону исходного квадрата за единицу, главное. В $\triangle ABE_2$ $AB=1$, $BE_2=\varphi$, $AE_2=\sqrt{1+\varphi^2}=\psi$. В $\triangle ABF$, подобном $\triangle ABE_2$, $AF=\frac{1}{\psi}$, $BF=\frac{\varphi}{\psi}$, $AB=1$. Из $\triangle ABF$ и $\triangle BFG$, имеющих общую сторону BF, можно найти элементы $\triangle BFG$: $BF=\frac{\varphi}{\psi}$, $FG=\frac{\varphi}{2\psi}$, $BG=\frac{\psi}{2}$, а значит, и элементы $\triangle AFH$: $AF=\frac{1}{\psi}$, $FH=\frac{1}{2\psi}$, $AH=\frac{\psi}{2\varphi}$. (Напомним, что $\varphi=(\sqrt{5}-1)/2$ и при выводе соотношений в треугольниках используется аддитивное свойство ряда золотого сечения: $1=\varphi+\varphi^2$, $\varphi=\varphi^2+\varphi^3$, ...)

Продолжая рассмотрение подобных треугольников, легко увидеть, что отношения соответствующих элементов треугольников, подобных $\triangle ABE_2$, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию:

$$\div\ 1,\ \frac{1}{\psi},\ \frac{1}{\psi^2},\ \frac{1}{\psi^3},\ \ldots\left(\frac{1}{\psi}<1\right), \qquad (21.1)$$

а отношения соответствующих элементов

треугольников, подобных $\triangle AFH$, образуют прогрессию:

$$\div\ 1,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3,\ \dots\ (\varphi<1). \qquad (21.2)$$

Кроме того, имеют место комбинации двух основных типов прогрессии, а именно прогрессии вида

$$\div\ \varphi,\ \frac{\varphi}{\psi},\ \frac{\varphi}{\psi^2},\ \frac{\varphi}{\psi^3},\ \dots$$

$$\div\ \varphi^2,\ \frac{\varphi^2}{\psi},\ \frac{\varphi^2}{\psi^2},\ \frac{\varphi^2}{\psi^3},\ \dots \qquad (21.3)$$

. . . .

Итак, построения рисунка дают нам не только ряд золотого сечения (21.2), но и гамму геометрических прогрессий вида

$$\div\ \varphi^n,\ \frac{\varphi^n}{\psi},\ \frac{\varphi^n}{\psi^2},\ \frac{\varphi^n}{\psi^3},\ \dots, \qquad (21.4)$$

соответствующие члены которых также находятся в золотой пропорции.

Любопытно, что в $\triangle AFH \frac{AF}{FH}=2$. Заметим также, что в $\triangle ABE_2$ $\sin BAE_2= =\frac{BE_2}{AE_2}=\frac{\varphi}{\psi}=0{,}525731 \Rightarrow \angle BAE_2=31°43'6''$, а в $\triangle AFH$ $\sin FAH=\frac{FH}{AH}=\frac{\varphi}{\psi^2}=0{,}447217\Rightarrow$ $\Rightarrow\angle FAH=26°33'54''$.

Таким образом, меньшие углы в треугольниках ABE_2 и AFH *почти равны*; следовательно, эти треугольники *почти подобны*, а углы исходного квадрата делятся отрезками *почти точно на три части*. Итак, рассмотренное построение дает нам прекрасный пример *приблизительной симметрии*.

Интересно, что... Впрочем, достаточно. Оставим радость открытия любителям математики, тем более что у любителей искусства, видимо, давно уже созрел вопрос: «А какое отношение вся эта геометрия и алгебра имеют к теме нашего разговора — пропорциям человека?» А вот какое.

По мнению французского египтолога Фурнье де Кора, восемь величин из ряда (21.4), а именно

$$A_1=\frac{\varphi}{\psi^2},\ A_2=\varphi^2,\ A_3=\frac{\varphi^2}{\psi^2},\ A_4=\varphi^3,$$

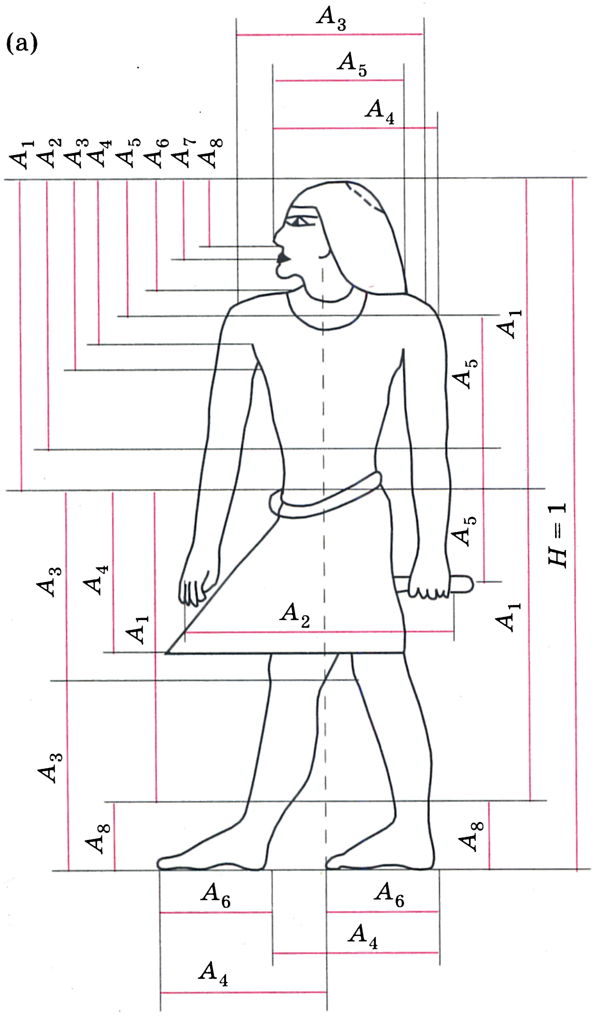
$$A_5=\frac{\varphi^3}{\psi},\ A_6=\frac{\varphi^3}{\psi^2},\ A_7=\frac{\varphi^4}{\psi},\ A_8=\frac{\varphi^4}{\psi^2}, \qquad (21.5)$$

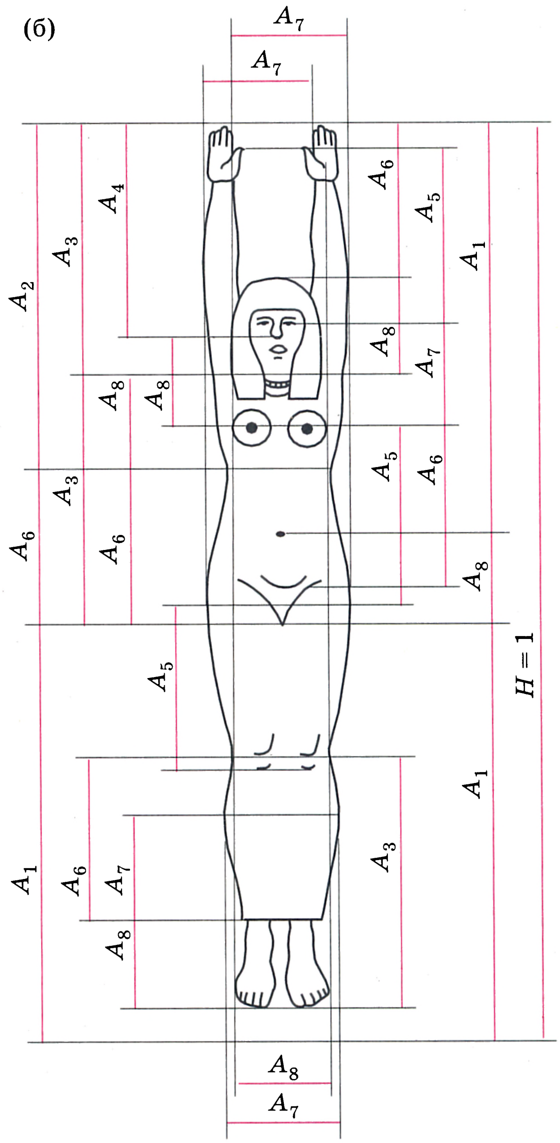
определяют весь пропорциональный строй древнеегипетской живописи. Этот вывод де Кора основан на кропотливом изучении пропорции многих памятников изобразительного искусства Древнего Египта. На рисунке мы видим, что местоположение всех основных элементов фигур — уровень глаз, носа, рта, шеи, плеч, пояса и т. д. — с удивительной точностью определяется пропорциональными величинами (21.5), умноженными на общую длину фигурки (H). Пользуясь (21.5) и соотношениями $\varphi^n=\varphi^{n+1}+\varphi^{n+2}$, легко доказать равенства типа $2A_1+A_8=1$, $A_1+A_2+A_6=1$, $A_1+2A_3=1$, $A_6+A_8=A_3$, $A_3+A_8=A_2$, $A_3+A_6=A_1$ и т. д.

Конечно, ряд (21.4) дает настолько богатую гамму пропорций, что при достаточном числе членов она может быть точнее миллиметровой линейки. Математику, разумеется, не понравится, что в (21.5) пропущены члены φ, $\frac{\varphi}{\psi}$, $\frac{\varphi^2}{\psi}$ и φ^4, отчего теория де Кора теряет в логической стройности. Да, по прошествии четырех тысячелетий трудно установить, какой именно системой пропорций пользовался древнеегипетский художник. Но бесспорно другое: древнеегипетский художник применял жестко детерминированную систему математических правил, которая на века определила стиль древнеегипетского изобразительного искусства. Эта математика рисунка, ставшая каноном, на века определила искусство Древнего Египта.

Описание египетского канона позднего периода и любопытную историю, связанную с ним, мы находим у древнегреческого историка Диодора Сицилийского (ок. 90—21 гг. до н. э.). По преданию, отец Пифагора Мнесарх построил на родном острове Самос храм в честь Аполлона Пифийского, статую для которого поручили изваять прославленным греческим скульпторам. «Из древних скульпторов наибольшею славою пользовались у них Телекл и Феодор, сыновья Река, которые соорудили для самосцев статую Аполлона Пифийского. Рассказывают, что одна половина этой статуи была приготовлена Телеклом на Самосе, другая же часть была сделана его братом Феодором в Эфесе. Будучи сложенными, эти части настолько соответствовали одна другой, что казалось, будто все произведение исполнено одним мастером. Однако этот

Математическое построение древнеегипетских рисунков на базе восьми пропорциональных величин (по Ф. де Кора). Фигурки жреца *(а)* и богини Ночи *(б)*.

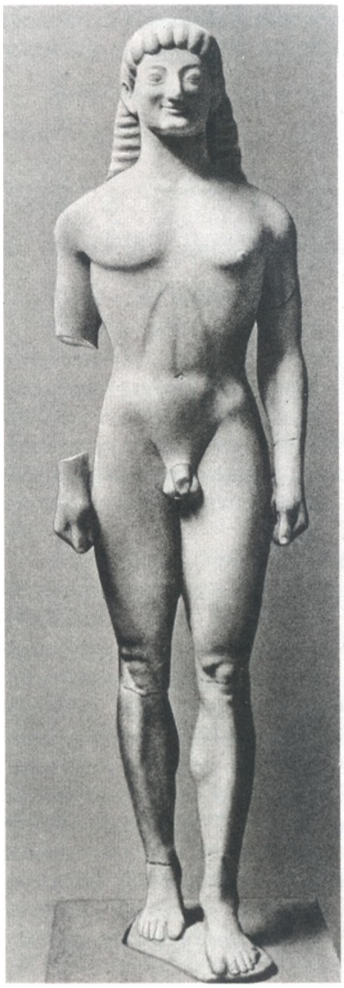


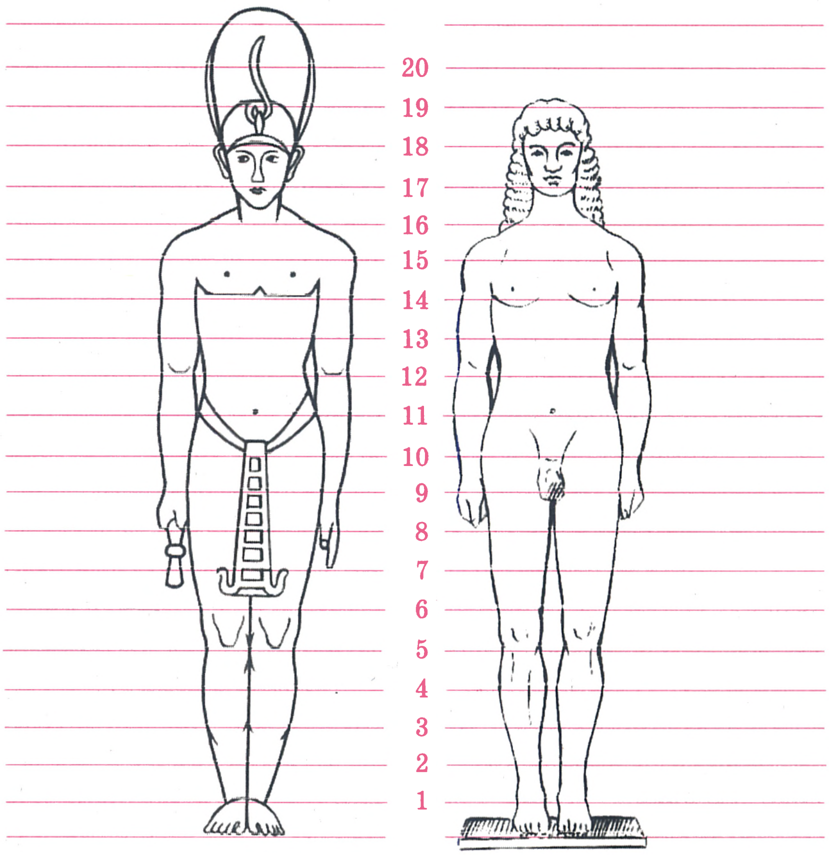


род работы никогда не применяется у греков, но большей частью употребляется у египтян... У них соразмерность статуи определяется не на глаз, но они, после того как высекут камни и обработают, разделив их на части, берут пропорцию от мельчайших до наибольших частей; рост тела они делят на $21\frac{1}{4}$ часть и так дают все соразмерности живого человека. Поэтому после того, как работники сговорятся о размерах, то, разделивши между собой труд, обрабатывают согласно заданной величине так точно, что работа их наполняет изумлением». Возможно, что эта история, рассказанная Диодором, не более чем легенда. Но важен в ней даже не факт совпадения сложенных изваяний, сколько сама постановка такого вопроса. В этой истории, даже если она и легенда, отражена безграничная вера древних греков в могущество математики, которую с равным успехом можно применять не только в инженерных расчетах (вспомним о самосском туннеле, с. 117), но и в искусстве ваяния. Создавая свои бессмертные творения, древние не боялись «алгеброй разрушить гармонию» и верили: математика поможет там, где, по словам Дюрера, «рука из-за спешки обманет тебя».

На рисунке изображен египетский канон, описанный у Диодора. Высота фигуры разделена точно на $21\frac{1}{4}$ части, причем одно целое деление соответствует длине среднего пальца. Высота фигуры без головного убора составляет 19 частей. Рядом расположена греческая скульптура Аполлона Тенейского, относящаяся к середине VI в. до н. э. — так называемому архаическому (от греч. «архайос» — древний) периоду греческого искусства. Точное совпадение пропорций этих двух фигур является математическим доказательством достаточно очевидной истины: греческое искусство периода архаики взросло на почве древнеегипетского искусства. Конечно, художественные образы этих фигур совершенно различны. Аполлон Тенейский, юноша-атлет (курос), светится жизнью и радостью: еще мгновение — и он сойдет с места навстречу новому искусству Эллады. Однако его пропорции — «математика Аполлона» — полностью сохраняют влияние древнеегипетского канона.

Греческое искусство развивалось очень динамично. Уже через 100 лет после Аполлона Тенейского, в середине V в. до н. э., греческая цивилизация достигает своего апогея. Наступает период наивысшего расцвета искусства Древней Греции, именуе-





КУРОС из Тенеи («Аполлон Тенейский»). *Ок. 560 г. до н. э.*
Тождественность пропорций Аполлона Тенейского и египетского канона ваяния позднего периода еще раз доказывает факт влияния древнеегипетского искусства на раннее греческое искусство периода архаики.

мый периодом *высокой классики*. Возвышенные идеалы классики, вера в духовное, нравственное и физическое совершенство свободного эллина нашли отражение в скульптурах Поликлета, творившего во второй половине V в. до н. э. Поликлет был не только гениальным скульптором, автором «Дорифора», «Дуадумена» и «Раненой амазонки», но и выдающимся теоретиком искусства.

Свои теоретические воззрения о пропорциях человека Поликлет изложил в трактате «Канон». Трактат этот, увы, не сохранился. Но как бы предчувствуя бренность написанного и бессмертие изваянного, Поликлет создает статую, в которой в бронзе воплощает свои теоретические воззрения. (Статуя эта также не сохранилась, но, к счастью, сохранилась ее римская мраморная копия.) Вот почему прославленная статуя юноши-копьеносца «Дорифор» имеет также и другое название — «Канон».

К сожалению, мы опять-таки не знаем, в каких конкретных математических отношениях выражался канон Поликлета. Но знание философских воззрений Поликлета, а главное — его скульптура помогают восстановить эти отношения. Поликлет был пифагорейцем, следовательно, он был неплохим математиком и, безусловно, был знаком с золотой пропорцией, которую пифагорейцы считали верхом совершенства. Можно только догадываться, какое изумление и радость испытал пифагореец Поликлет, когда обнаружил, что золотая пропорция присуща не только абстрактной геометрической фигуре, главному пифагорейскому символу — пятиконечной звезде, но и естественным образом входит в пропорции человека. Человеческое тело оказалось благодатным материалом для философа-пифагорейца: как нам известно, золотая пропорция пронизывает тело человека от малых размеров (три фаланги среднего пальца) до самых больших (см. с. 223). Анализ пропорций «Дорифора» и других скульптур Поликлета подтверждает наши предположения: в скульптурах Поликлета с большой точностью выдержаны пропорции ряда золотого сечения

$$1,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3,\ \varphi^4,\ \varphi^5,\ \varphi^6.$$

Заметим, что в самом методе построения пропорций Поликлета есть принципиальное отличие от метода пропорционирования египтян. Египтяне исходили из какой-то условной единицы измерения, например длины среднего пальца, которую затем целое число раз «укладывали» в ту или иную часть изображения человека. Поликлет же рост человека принимает за единицу, затем фиксирует определенную часть тела, какова бы она ни была по размерам, и находит их отношение. Такое отношение могло выражаться не только отношением целых чисел, как у египтян, но и быть иррациональным числом, как в случае золотого сечения.

Таким образом, открытие золотой пропорции в строении человека, которое, по-видимому, принадлежит Поликлету, можно считать вслед за открытием закона целочисленных отношений в музыке вторым важнейшим событием в «математической теории искусств».

Разумеется, в рамках этой главы невозможно даже кратко остановиться на всех теориях пропорций человека, имеющих тысячелетнюю традицию. Желая ярче передать тот или иной образ, художник намеренно усиливал одни пропорции и сглаживал другие и таким образом создавал свой собственный канон. Так, уже через сто лет после Поликлета, в IV в. до н. э., в Древней Греции сложился другой, более «утонченный» канон скульптора Лисиппа, бывшего придворным художником Александра Македонского. Как писал Плиний, Лисипп изображал людей не «какими они есть», но «какими они кажутся». Впрочем, вопрос о том, какие пропорции и насколько соответствуют тому или иному художественному образу, является вопросом искусствоведения и нам не следует погружаться в него. Однако имена двух гениальных художников и мыслителей, двух титанов эпохи Возрождения — Леонардо да Винчи и Альбрехта Дюрера — мы не можем обойти здесь молчанием.

В построении пропорций человека Леонардо да Винчи исходит прежде всего из анализа многочисленных измерений самого человека, из его анатомии, а не из каких-то «высших» соображений, как это делали средневековые художники. Жажда научного знания, основанного на опыте и только опыте, отражает переворот в мышлении эпохи Возрождения, знаменует начало экспериментального естествознания.

Стремление как можно глубже изучить пропорции и вообще строение человека, столь необходимые Леонардо-художнику, переросло в страсть к науке анатомии Леонардо-ученого. Составленные им анатомические тетради явились вершиной анатомии того времени и по сей день остаются непревзойденным образцом синтеза науки и искусства.

Свои исследования Леонардо не успел (а может, и не хотел) систематизировать, и они остались рассыпанными в виде рукописных набросков, в которых говорится буквально обо всем на свете, а текст перемежается великолепными рисунками. Мы остановимся лишь на одном наиболее популярном рисунке Леонардо на тему о пропорциях. Вот отрывок текста, которым он сопровождает рисунок: «Если ты раздвинешь ноги настолько, что убавишься в росте на 1/14, и если ты тогда разведешь руки и поднимешь их так, что коснешься средними пальцами макушки головы, то должен ты знать, что центром круга, описанного концами вытянутых членов, будет пупок и что пространство между ногами образует равносторонний треугольник. А пролет распростертых рук человека равен его росту». Заметим, что идея этого рисунка восходит к известному нам сочинению Витрувия.

Свое высшее развитие учение о пропорциях человека получило в трудах Дюрера. С немецкой скрупулезностью проводит Дюрер свои измерения и в конце концов доводит разбиение человеческого тела до

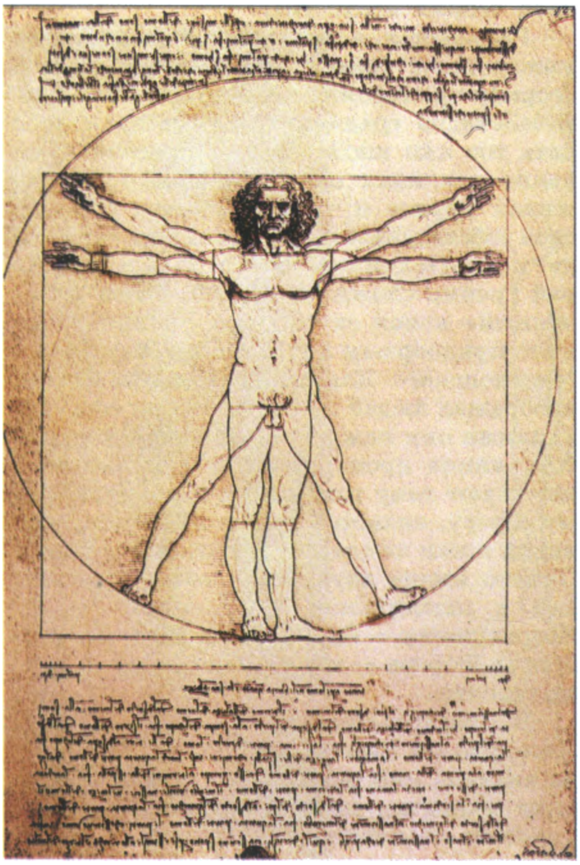
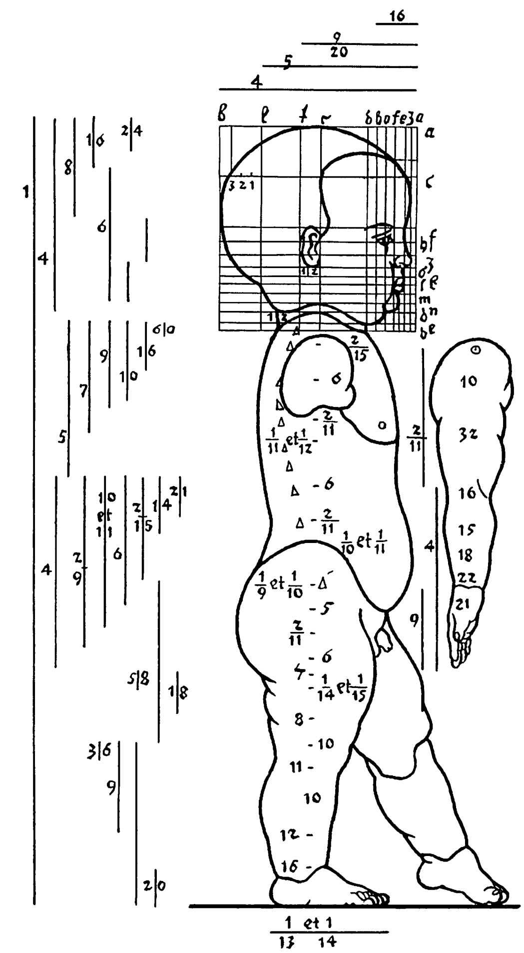


Рисунок Леонардо да Винчи из анатомических рукописей, связавший совершенные геометрические фигуры с пропорциями человека, стал своеобразным символом синтеза математики и искусства.



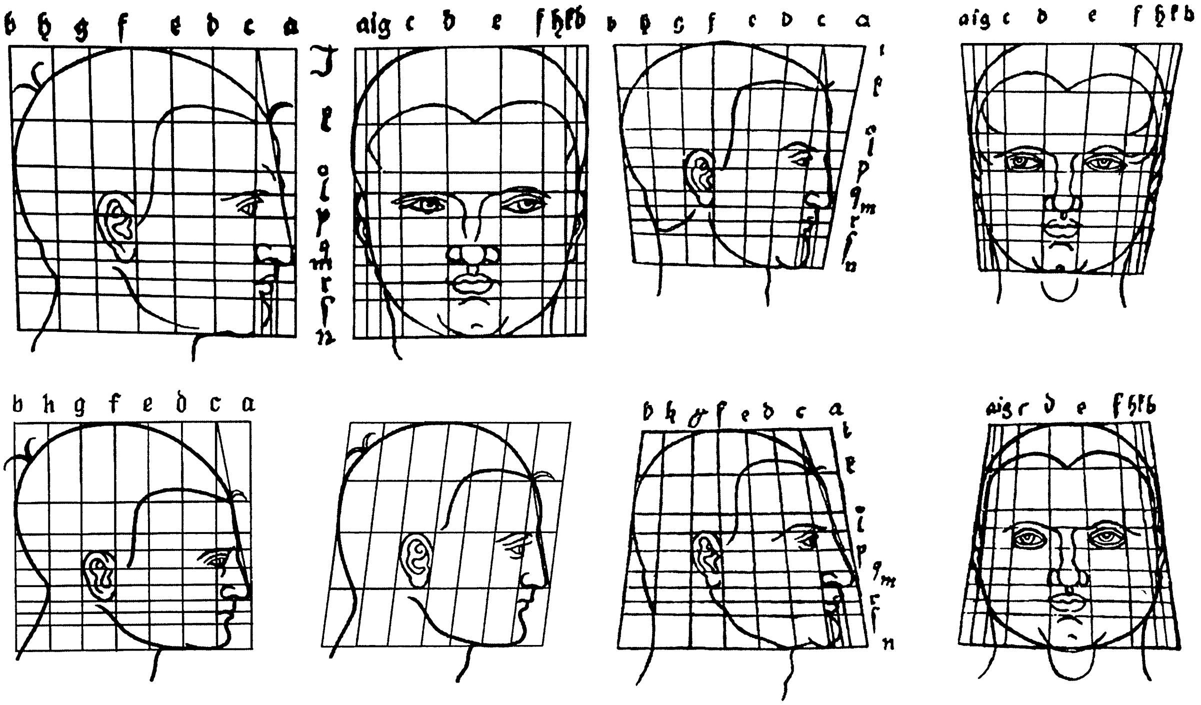
Пропорции фигурки младенца из трактата Дюрера «Четыре книги о пропорциях».

1/1800 части его длины, т. е. до величины, не превышающей одного миллиметра! По мнению А. Лосева, столь тщательное измерение «стало самоцелью и каким-то измерительным спортом!». Ни до, ни после Дюрера учение о пропорциях не доводилось до такой степени точности. Но главное, пожалуй, было в другом: Дюрер отказался от создания какого-либо «идеального» канона, а разработал не менее 26 различных типов пропорций человека.

Обратимся к трактату Дюрера «Четыре книги о пропорциях». «Если я намереваюсь сделать изображение человека,— читаем мы,— то прежде всего я поступаю таким образом: я беру линейку длиннее, чем фигура, и провожу на ней прямую линию такой длины, какой должна быть изображенная фигура, так, чтобы один конец касался макушки головы, а другой подошв... И я старательно делю всю длину, которую я обозначаю цифрой 1, на части от двух до пятидесяти или ста частей, сколько мне нужно, наношу их точками на линейку возле длинной линии, провожу из них линии вверх до высоты макушки и обозначаю их цифрами 2, 3, 4 и т. д. Таким образом, меньшие цифры будут обозначать более длинные части, а большие — короткие. Так, половина всей длины будет 2, треть — 3, четверть — 4 и т. д.». Затем Дюрер указывает «важнейшие расчленяющие линии»: «верхнюю я называю макушкою, следующую под нею — лбом, следующую — бровями, затем идут нос, подбородок и далее плечевые мускулы, шейная впадина, верх груди...» и так далее вплоть до подошвы.

Хотя Дюрер и отмечает, что таковых линий «можно сделать больше или меньше», бóльшая тщательность в анализе фигуры человека современному читателю кажется просто немыслимой. Далее следуют промеры указанных линий, которые даются для различных типов фигур: от мужских и женских фигур до фигурки младенца. Последняя дает ясное представление о том, сколь филигранными были геометрические построения Дюрера.

В третьей книге трактата Дюрер показывает, «как можно изменять или искажать эти вышеописанные размеры... благодаря чему фигура становится неузна-



Рисунки из «Четырех книг о пропорциях» Дюрера. В своем трактате художник пытался найти совокупность геометрических преобразований, позволяющую охватить все многообразие человеческих лиц.

ваемой...». Предложенный Дюрером для этой цели «изменитель» представляет собой не что иное, как систему подобных треугольников. При этом Дюрер ясно осознает, что если пропорционально изменить все размеры фигуры, то ее вид останется прежним. И напротив, «если увеличить одни части и уменьшить другие, вид вещи станет иным».

Но если пропорции человеческой фигуры еще можно как-то классифицировать, то лицо человека никак не укладывалось у Дюрера в жесткие рамки пропорциональной сетки. Дюрер изобретает массу геометрических способов, которыми можно до неузнаваемости трансформировать изображение лица. Однако чем большим становится набор таких способов, тем яснее видно, что их число уходит в бесконечность. Дюрер-художник интуитивно осознает это: в его трактате не раз проскальзывает фраза о том, что «контуры человеческой фигуры нельзя начертить при помощи циркуля и линейки». И в то же время Дюрер-геометр упрямо продолжает поиски универсального геометрического метода в построении изображения человека.

На рисунке приведены некоторые из геометрических преобразований Дюрера. В первой строке слева показано исходное «правильное» лицо. Вторая строка слева представляет собой геометрические преобразования, которые в математике называются *аффинными*. Аффинное преобразование, или отображение,— это такое взаимно однозначное отображение, при котором параллельные прямые исходной плоскости (верхняя строка) переходят в параллельные прямые на плоскости отображения (вторая строка). Рисунки справа дают пример более сложных геометрических преобразований.

Глядя по прошествии 500 лет на геометрические построения Дюрера, хорошо видно, как в его исследованиях назрела потребность в точной науке о непрерывных процессах, науке о проявлении прерывного в непрерывном, науке о бесконечно большом числе бесконечно малых изменений. Такая наука родилась лишь через полтора века после Дюрера в трудах Ньютона и Лейбница, когда вместе с понятием производной «в математику вошли движение и диалектика» (Ф. Энгельс). Творчество Дюрера еще раз убеждает нас в том, что пути науки и искусства связаны тысячами нитей. В геометрических поисках Дюрера мы видим, как одно из величайших завоеваний человеческой мысли — дифференциальное исчисление — зрело не только в лоне науки, но и в недрах искусства.

А как развивалась теория пропорций человека после Дюрера? В XVII в. движение вошло не только в науку, но и в искусство. На смену застывшим формам объекта, где царствовали покой и пропорция, в искусстве пробуждается интерес к изменчивому, как солнечный луч, субъекту, его настроению и мироощущению. Голландским люминаристам XVII в. и французским импрессионистам XIX в. уже не нужны были пропорции, ибо форма, объект растворялись в их полотнах в потоках воздуха, цвета и света. Искусство XX в. еще более динамично: оно разрушает все каноны, часто не успевая провозгласить свои. Сегодня каждый художник стремится создать свой собственный канон, что порождает бесконечные споры об искусстве.

Так что же, теория пропорций стала отжившим рудиментом искусства? Автору так не кажется. Да, в своем «арифметическом» выражении теория пропорций

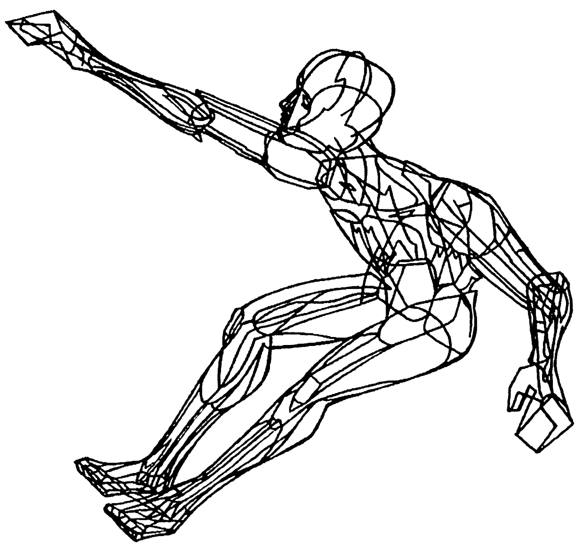


Рисунок человека, выполненный на компьютере в исследовательском отделе фирмы «Боинг». Система топологических правил, введенных в ЭВМ, позволяет нарисовать различные стадии движения человека. Робкое начало эры компьютерного искусства.

себя исчерпала. Да, человек — мера всех вещей — настолько разнообразен, что его нельзя втиснуть в рамки дискретных канонов. Но пропорции живы, как жив и сам человек.

Теория пропорций сегодня не умерла, а лишь замерла в ожидании качественно нового скачка, в ожидании перехода от «арифметического» к «аналитическому» и даже «компьютерному» выражению. Почва для такого скачка сегодня созрела: есть современный математический аппарат, позволяющий описать контуры человека не «на уровне циркуля и линейки»; есть современные компьютеры с их графопостроителями и дисплеями. Нужно содружество художников и математиков.

Примеры такого содружества мы сегодня видим в компьютерной графике, компьютерных играх и фильмах. А безудержный рост электронных технологий зовет нас к новой виртуальной реальности. Но как не вспомнить первые шаги компьютерного искусства, которые поразительно напоминают искания Дюрера в области пропорций. Вот рисунок, выполненный на компьютере (тогда их называли ЭВМ — электронно-вычислительная машина) в исследовательском отделе американской фирмы «Боинг» более четверти века назад. Рисунок математически сконструирован по стандартным дюреровским пропорциям человека и ряду топологических правил, определяющих работу суставов и обеспечивающих непрерывность контура человека при его перемещениях. Таким образом, этот «машинный человечек» мог двигаться по «человеческим» правилам, и это были первые шаги человечества к эре компьютерного искусства. Однако эта увлекательная тема — искусство и компьютеры — выходит далеко за рамки нашей книги.

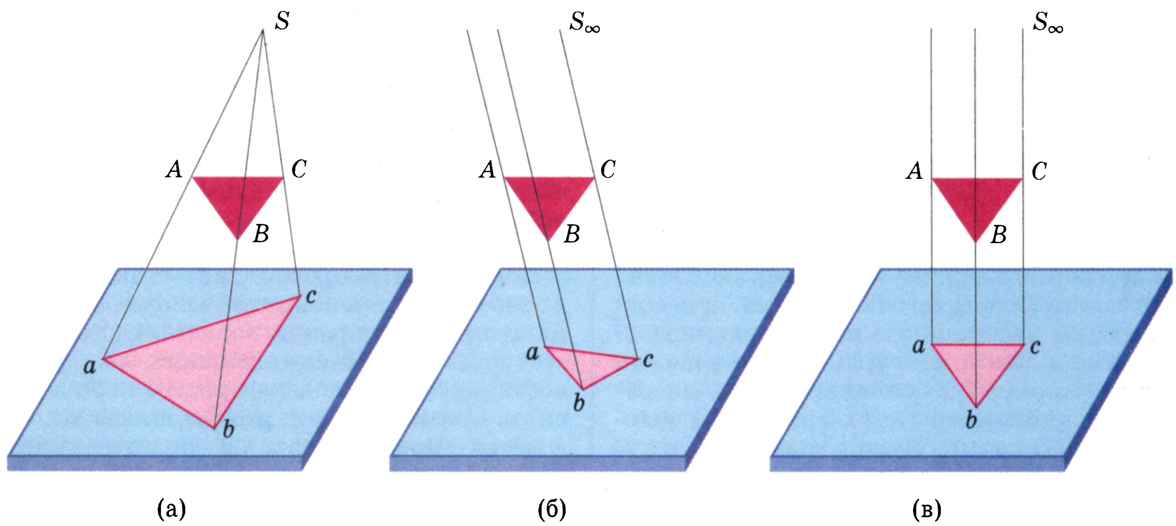
22. *ПЕРСПЕКТИВА — ГЕОМЕТРИЯ ЖИВОПИСИ*

Все проблемы Перспективы можно пояснить при помощи пяти терминов Математики: точка, линия, угол, поверхность и тело.

ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ

В первом наскальном изображении первый первобытный художник столкнулся с непростой математической задачей: отобразить трехмерный оригинал на двумерную плоскость «картины». Сама природа помогла ему в решении этой задачи, ибо, как заметил Леонардо да Винчи, «первая картина состояла из одной-единственной линии, которая окружала тень человека, отброшенную солнцем на стену». Почему художник не довольствовался трехмерной скульптурой, а стремился к двумерному изображению оригинала, понять нетрудно: плоская поверхность пещеры или стены храма, глиняной таблички или папируса, пергамента или бумаги была удобным носителем графической информации. В последних случаях такую поверхность можно было попросту свернуть в рулон и унести с собой.

Люди издревле научились отображать всевозможные объекты окружающего их трехмерного мира на двумерную плоскость картины. Однако по мере развития такого искусства отображения все чаще возникал вопрос: насколько точно и насколько убедительно эти плоские образы отражают реальные трехмерные прообразы? На эти вопросы призвана была ответить наука, и прежде всего геометрия. И она по мере сил



Важнейшие виды проекций: центральные *(а)*, параллельные *(б)* и ортогональные *(в)*.

отвечала на них, хотя решение столь простой на первый взгляд задачи растянулось на тысячелетия.

В этой главе мы рассмотрим с точки зрения геометрии, какие основные возможности имеются в решении задачи отображения трехмерного пространства на двумерную плоскость. А в главе 24 увидим, как эти возможности реализовывались в живописи.

Раздел геометрии, в котором изучаются различные методы изображения пространственных форм на плоскости, называется *начертательной геометрией*. В основе начертательной геометрии лежит *метод проекций*, сущность которого такова. В пространстве выбирают фиксированную точку S — *центр проектирования и плоскость проекций K (картинную плоскость)*, не проходящую через S. Для получения изображения — *проекции*[1] — объекта на плоскость K через центр проекций S и каждую точку A, B, C,... объекта проводят *проектирующие лучи* до пересечения с плоскостью K. Совокупность точек пересечения проектирующих лучей с картинной плоскостью и даст изображение объекта, которое называют *центральной проекцией*.

Представим, что центр проектирования S уходит в бесконечность. Тогда проектирующие лучи становятся параллельными между собой. Считая центр проектирования расположенным в бесконечно удаленной точке S_∞, мы приходим к важному частному случаю центрального проектирования — *параллельному проектированию*. Наконец, важным частным случаем параллельных проекций являются *ортогональные проекции*, когда проектирующие лучи ортогональны K, т. е. образуют прямые углы с плоскостью проекций K.

При построении проекций некоторые свойства оригинала сохраняются и на его проекции. Такими неизменными свойствами — *инвариантами* — при центральном проектировании обладают:

1) точки (проекция точки — точка);
2) прямые;
3) свойство точки принадлежать прямой.

При параллельном проектировании помимо того сохраняются следующие свойства:

4) параллельность прямых;
5) отношение отрезков прямых;
6) метрические свойства плоских фигур, параллельных картинной плоскости.

Обратим внимание на то, что свойство параллельности прямых при центральном проектировании не сохраняется.

Приложение начертательной геометрии к технике выдвинуло требование «обрати-

[1] *Проекция* (лат. *projectio*) — бросание вперед.

мости» чертежа, т. е. возможности точного определения пространственной фигуры по плоскому чертежу, или, говоря языком математики, взаимно однозначности отображения пространства на плоскость. Рассмотренные проекции являются однозначными, но не взаимно однозначными отображениями, т. е. каждой точке пространства соответствует единственная точка плоскости, но не наоборот. Нетрудно убедиться и в том, что для определения положения точки в пространстве по ее чертежу необходимо иметь две проекции точки, полученные из двух центров или при двух направлениях проектирования. Эта гениально простая мысль и составляет основу начертательной геометрии, заложенную выдающимся французским математиком, активным деятелем Великой французской революции, другом и советником Наполеона Гаспаром Монжем (1746—1818).

Суть метода Монжа можно изложить двумя предложениями, как это сделал член-корреспондент РАН Б. Н. Делоне: «Пространственный объект проектируется ортогонально (т. е. перпендикулярами) на плоскость и также проектируется на некоторую другую ей перпендикулярную плоскость, и затем одна из этих плоскостей поворачивается вокруг прямой пересечения этих плоскостей, пока не совместится с другой. В результате на одной и той же плоскости оказываются две различные проекции (вида) рассматриваемого объекта, по которым уже можно, методами Монжа, восстановить размеры, углы и т. д., имеющиеся у данного пространственного объекта в натуре».

Несмотря на то что ортогональные проекции известны человечеству с незапамятных времен (вся живопись Древнего Египта есть не что иное, как ортогональные проекции на плоскость рисунка), простая мысль использовать две ортогональные проекции для получения взаимно однозначного отображения пространства на плоскость пришла Монжу лишь в конце XVIII в. Имея огромное практическое значение в теории фортификации, метод Монжа еще в течение 15 лет оберегался как военная тайна. Простота метода Монжа ошеломила современников. Познакомившись с его идеями, Лагранж, перемежая иронию с восторгом, воскликнул: «До слушания лекции Монжа я не знал, что мне известна начертательная геометрия!»

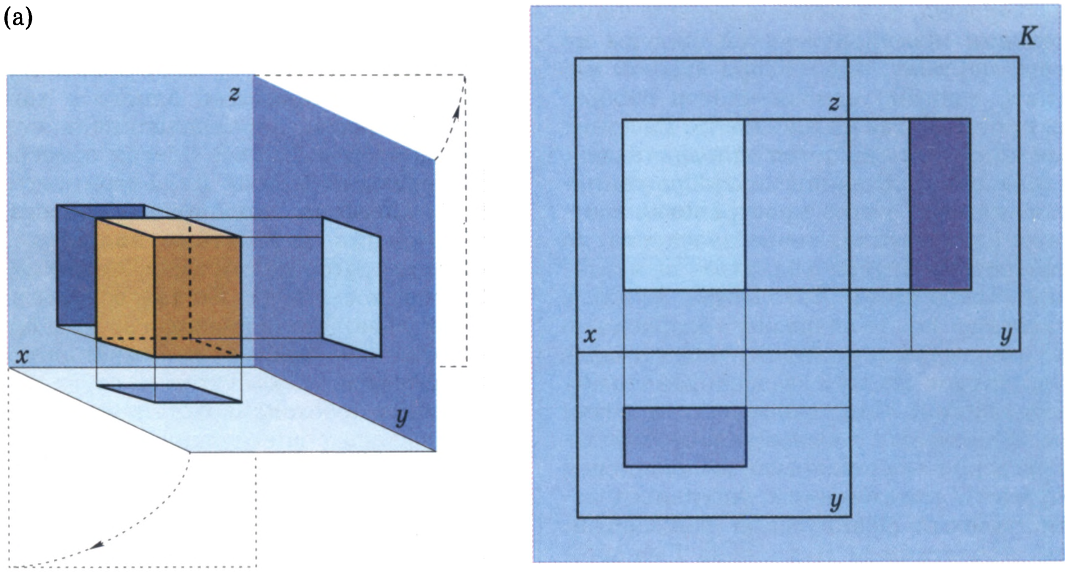
На рисунке (см. с. 278) показаны различные типы проекции одного и того же прямоугольного параллелепипеда с отношением сторон 1 : 2 : 3. Метод ортогональных проекций Монжа иллюстрирует рисунок *а*. Заметим, что третья проекция с точки зрения математики является лишней, но ею часто пользуются, чтобы создать более полное представление о пространственном теле. Как отмечалось, при ортогональном проектировании сохраняются истинные размеры контуров тела.

Однако ортогональные проекции не дают целостного впечатления о форме пространственного объекта. Более наглядное представление о форме тела дают *аксонометрические*[1] *проекции* — частный вид параллельных проекций, отображающих на плоскость K все точки пространственного объекта вместе с декартовой системой координат, к которой этот объект отнесен. На рисунке *б* построена аксонометрическая проекция нашего параллелепипеда. Мы видим, что в аксонометрии происходят искажения линейных размеров, различные по разным осям. Согласно основной теореме аксонометрии — теореме Польке, три произвольных отрезка на плоскости, выходящие из одной точки, могут быть приняты за параллельную проекцию трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков, выходящих из некоторой точки пространства. Следовательно, аксонометрические оси и коэффициенты искажения по ним (отношение длины по аксонометрической оси к истинной длине по соответствующей оси) могут быть выбраны произвольно. (В нашей аксонометрии углы между осями координат равны 120°, а коэффициенты искажения — 1.)

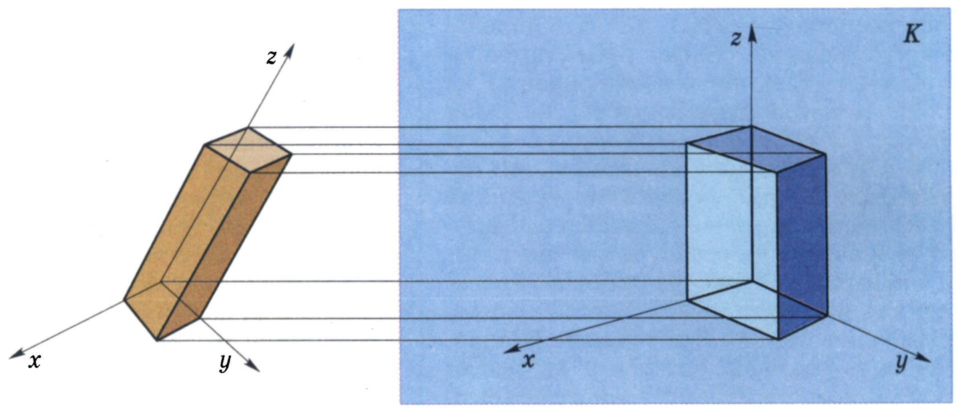
Наконец, на рисунке *в* построена центральная проекция нашего параллелепипеда. Сопоставляя все три проекции, мы видим, что перспектива наиболее адекватно, т. е. «похоже», передает видимый нами объект. Это замечательное свойство центральной проекции и снискало ей славу в искусстве живописи, где она получила особое название — *перспектива* (от лат.

[1] *Аксонометрия* — от греч. αξων — ось и μετρεω — измерять.

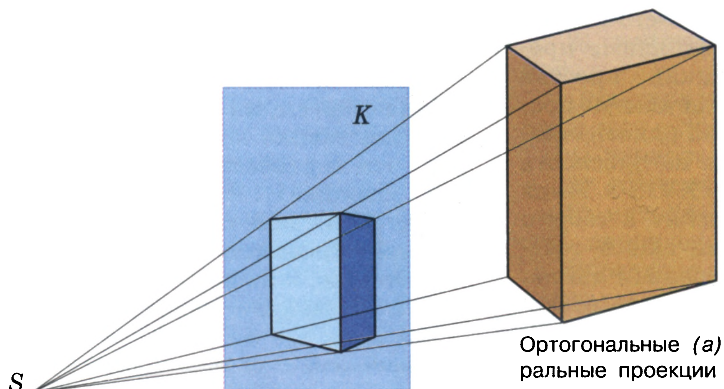
(а)



(б)



(в)



Ортогональные *(а)*, аксонометрические *(б)* и центральные проекции *(в)* прямоугольного параллелепипеда с отношением сторон 1 : 2 : 3.

perspicio — ясно вижу). Перспективные проекции являются и наиболее трудными из рассмотренных нами, поэтому остановимся на перспективе более подробно.

Прежде всего заметим, что реально существующий мир и видимый нами мир — не одно и то же. Вспомним хорошо знакомый пример: рельсы железной дороги кажутся нам сходящимися на горизонте, хотя мы прекрасно знаем, что это не так.

Объяснение этому «парадоксу» было известно еще до нашей эры. В своем сочинении «Оптика» Евклид постулировал, что мы воспринимаем предметы, когда исходящие от них прямолинейные лучи света сходятся в нашем глазу. Таким образом, всю систему лучей зрения можно представить в виде «пирамиды зрения», вершина которой находится в глазу, а основанием служит рассматриваемый объект. В предложении 4 «Оптики» Евклид доказал, что из двух предметов одинакового размера более удаленный, т. е. видимый под меньшим углом зрения, кажется меньшим. Итак, почему дальние предметы кажутся меньшими, было понятно. Оставалось сделать еще один шаг — рассмотреть картину как сечение пирамиды зрения картинной плоскостью. Однако на этот шаг человечеству потребовалось более 1500 лет.

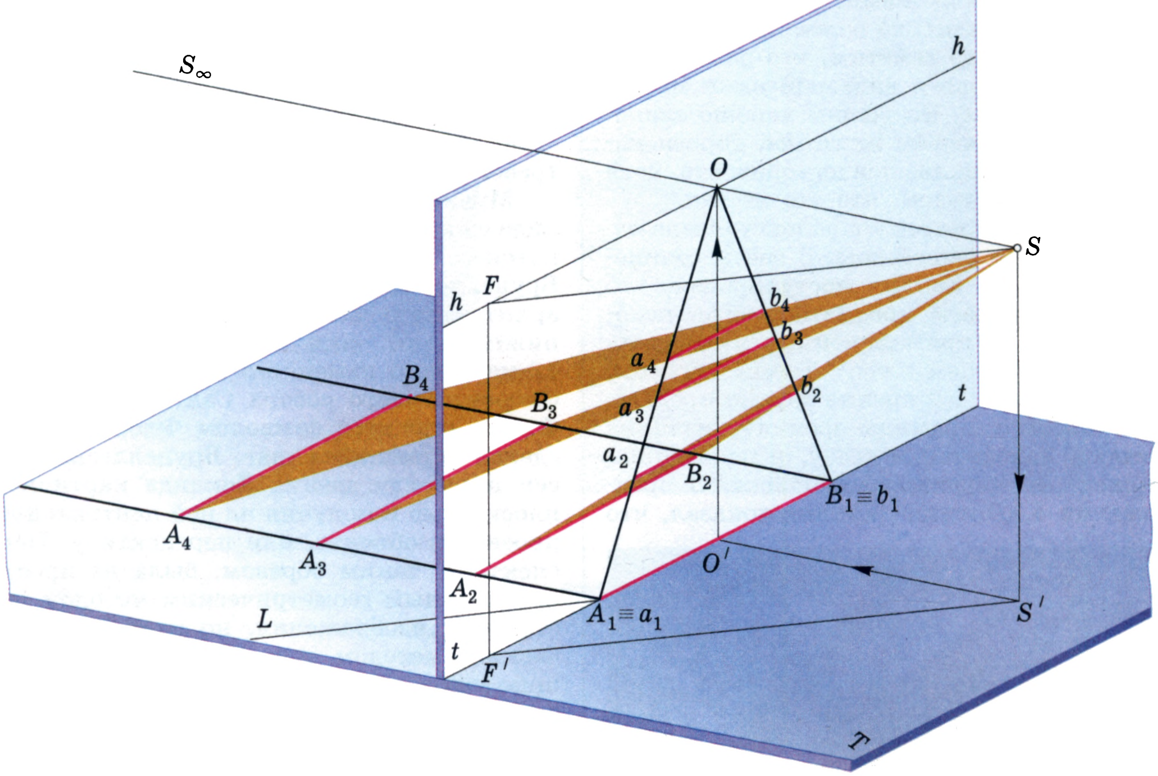
ДЮРЕР. Св. Иероним в келье.
Гравюра на меди 1514.
Математически безупречное построение перспективы кельи и светлая радость обладания Иеронимом высшей истиной — геометрия и философия возносят эту работу Дюрера к шедеврам мирового искусства.

Мучительно долго ожидали идеи Евклида своего часа, и только в XIV в. могучий поток Возрождения подхватил их. Филиппо Брунеллески (1377—1446), итальянский архитектор и ученый, автор выдающегося инженерного сооружения — грандиозного 42-метрового каменного купола над хором флорентийского собора Санта-Мария дель Фьоре, ставшего символом Флоренции, — сделал оставшийся шаг. Брунеллески рассек пирамиду зрения Евклида картинной плоскостью и получил на ней центральную проекцию объекта, или перспективу. Перспектива, таким образом, была не просто объективным геометрическим методом построения изображения, но и «физиологическим» методом, т. е. методом, учитывающим закономерности работы человеческого глаза. Именно поэтому перспектива давала изображения, столь замечательно «похожие» на видимую глазом натуру.

Вслед за Брунеллески поднимается мощная волна работ по перспективе. Титаны Возрождения не замыкаются в геометрических построениях, а воплощают теоретические разработки в своих бессмертных полотнах. Геометрия и живопись идут рука об руку. Вместе с трактатами «О живописи» Леона Баттисты Альберти, «О живописной перспективе» Пьеро делла Франчески[1] (ок. 1420—1492), «Трактатом о перспективе» Леонардо да Винчи, «Руководством к измерению» Альбрехта Дюрера, «Шестью книгами о перспективе» Гвидо Убальди (1545—1607) рождаются и такие памятники перспективе, как «Бичевание Христа» Пьеро делла Франчески, «Тайная вечеря» Леонардо да Винчи, «Обручение Марии» Рафаэля, «Меланхолия» и «Св. Иероним» Дюрера, «Нахождение тела святого Марка» Тинторетто...

[1] Пьеро делла Франческа был не только живописцем, но и математиком, автором «Книги о пяти правильных телах», учителем Луки Пачоли.

Построение перспективного изображения прямых, перпендикулярных и параллельных картинной плоскости.



Но вернемся к нашему примеру с железной дорогой. Посмотрим, как изобразятся на плоскости картины «рельсы» — прямые, ортогональные плоскости картины, и «шпалы» — равноотстоящие прямые, параллельные этой плоскости. Пусть *точка зрения* S есть центр проекций, который определяет положение глаза художника; T — горизонтальная плоскость, на которой лежат изображаемые объекты; K — плоскость картины ($K \perp T$). Из точки S мы смотрим[1] на «точки закрепления рельс к шпалам» A_1, A_2, A_3, ... и B_1, B_2, B_3, ... Точки пересечения лучей зрения SA_i и SB_i с плоскостью K дают нам изображения этих точек a_1, a_2, a_3, ... и b_1, b_2, b_3, ... на картине K. Очевидно, что точки, лежащие в *основании картины*, tt — линии пересечения плоскостей K и T,— при проектировании переходят сами в себя, т. е. линейные размеры в основании картины не искажаются.

Ясно, что по мере удаления точек A_i и B_i в бесконечность лучи SA_i и SB_i становятся все более пологими и все ближе подходят друг к другу (так как угол зрения, под которым мы видим равные отрезки A_iB_i, уменьшается), пока наконец не сольются, заняв предельное положение SS_∞. Можно считать, что луч SS_∞ пересекается с обоими «рельсами» (и вообще, с любой прямой, параллельной «рельсам») в бесконечно удаленной точке S_∞, которая проектируется в *главную точку картины O*. Точка O лежит на прямой hh, называемой *линией горизонта*, которая есть линия пересечения картинной плоскости K и плоскости, проходящей через точку S параллельно плоскости T. Расстояние $SS' = OO'$ называется *высотой точки зрения.*

[1] Следует отметить, что теория перспективы — это наука о видении одним глазом (монокулярная теория). Бинокулярная теория зрения пока далека от завершения.

Таким образом, мы приходим к *основной теореме теории перспективы*: семейство параллельных прямых на плоскости T, не параллельных основанию картины, изображается семейством пересекающихся отрезков на плоскости K, причем точка пересечения этих отрезков — *точка схода* — лежит на линии горизонта hh. Различным направлениям на плоскости T соответствуют различные точки схода на линии горизонта. Следовательно, линия горизонта есть геометрическое место точек схода для всевозможных направлений на плоскости T. Прямые плоскости T, параллельные основанию картины, точки схода не имеют и проектируются на плоскости K в прямые, параллельные основанию картины.

Разумеется, получать проекции точек объекта на картинной плоскости с помощью пространственных построений, как это сделано на рисунке, трудно и неудобно. Поэтому еще архитекторами Возрождения был разработан способ построения перспективы, названный *способом архитекторов*, позволяющий с помощью точек схода и линии горизонта непосредственно переходить с горизонтальной плоскости T на плоскость картины K. Для построения точки схода F линии L по способу архитекторов из проекции точки зрения S' проводят линию L' параллельно L до пересечения с основанием картины в точке F'. Точка F' есть проекция точки схода F на основание картины. Восставляя из F' перпендикуляр до линии горизонта, находим саму точку схода F. (Доказательство справедливости этого построения видно из рисунка, а обоснование остальных построений способа архитекторов мы дадим в конце следующей главы.)

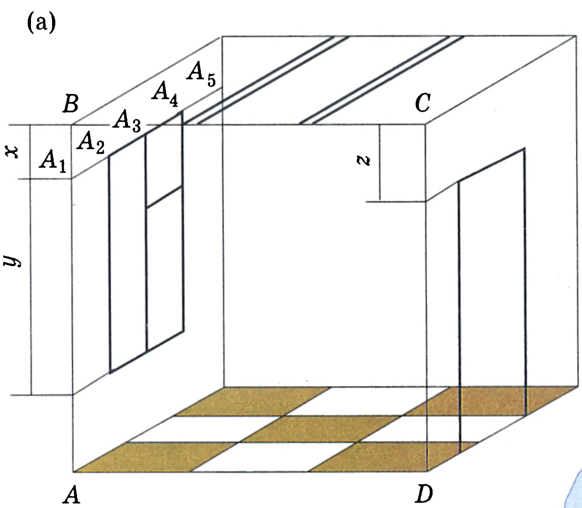
Перспектива открыла перед живописцами небывалые возможности. Впервые у художников появился геометрический метод изображения не отдельного предмета, а всего видимого трехмерного пространства, всего окружающего мира. Невиданные возможности перспективы наиболее ярко раскрывались в изображении интерьера. Вот почему художники Возрождения так любили изображать интерьер (вспомним «Афинскую школу» Рафаэля и «Тайную вечерю» Леонардо да Винчи, см. с. 56 и 305).

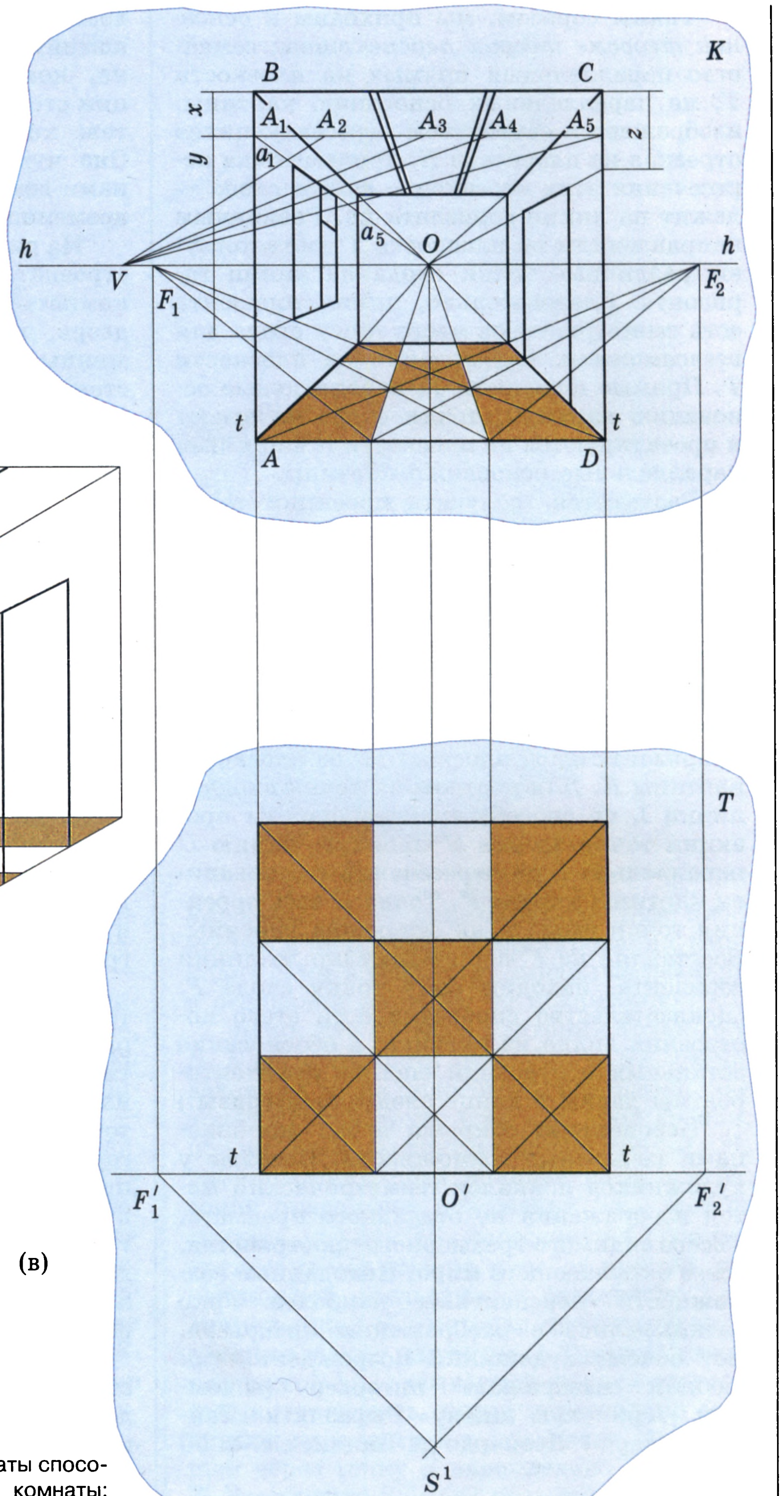
В самом деле, полностью изобразить интерьер комнаты в аксонометрии просто невозможно. Для этого нужно считать стены комнаты и ее потолок прозрачными. Можно, конечно, дать ортогональные проекции стен, пола и потолка, но это будет чертеж комнаты. Иное дело — перспектива. Она чудесным образом раскрывает перед нами всю комнату, позволяя увидеть одновременно и ее стены, и пол, и потолок.

На рисунке *в* способом архитекторов построена перспектива «математической» комнаты в форме куба, имеющей окно, дверь, две балки на потолке и пол, выложенный квадратными плитами. Вынутая стена $ABCD$ комнаты совпадает с плоскостью картины K и передается на ней без искажений (естественно, сохраняются и все размеры на $ABCD$, такие, как x, y, z и т. д.). Глаз художника расположен напротив центра комнаты, т. е. главная точка картины находится в центре квадрата $ABCD$. В главной точке картины пересекаются все прямые, перпендикулярные плоскости картины. Для построения перспективы берем план пола комнаты и, проводя из проекции точки зрения S' прямые, параллельные диагоналям пола, находим проекции точек схода F_1' и F_2' диагоналей. Перенося эти точки на линию горизонта hh, получаем точки схода диагоналей F_1 и F_2. В этих точках на перспективе пересекаются диагонали пола и параллельные им (на плане) прямые. Дальнейшее построение перспективы пола и стен комнаты, а также горизонтальных границ окна и двери понятно из рисунка.

Разметка вертикальных линий окна точками A_2, A_3, A_4 делается следующим образом. Берем отрезок A_1A_5, задающий вертикальные линии окна, и его перспективное изображение a_1a_5. Затем откладываем из точки a_1 отрезок A_1A_5 параллельно линии горизонта и проводим через точки A_5 и a_5 прямую до пересечения с линией горизонта в точке V. Прямые, проходящие через точку V и точки A_1, A_2, ..., A_5 отрезка A_1A_5, разделят перспективу этого отрезка a_1a_5 в том же отношении. Аналогично размечаются вертикальные линии двери.

Заметим, что проблема правильного построения перспективы «клетчатого» пола долго не давалась художникам Возрождения. Вот почему, решив эту геометрическую задачу, мастера Возрождения так любили изображать квадраты пола на своих полотнах (см., например, «Афинскую шко-





Построение перспективы интерьера комнаты способом архитекторов: *(а)* — аксонометрия комнаты; *(б)* — перспектива комнаты; *(в)* — план пола комнаты и проекция точки зрения.

лу» и «Обручение Марии» Рафаэля, с. 306). Квадратные плиты были своеобразной координатной сеткой на плоскости пола и придавали глубине картины особую выразительность.

И в заключение построим способом архитекторов перспективу прямоугольного параллелепипеда, расположенного под углом к плоскости картины K. Для простоты будем считать, что переднее ребро параллелепипеда лежит в плоскости картины.

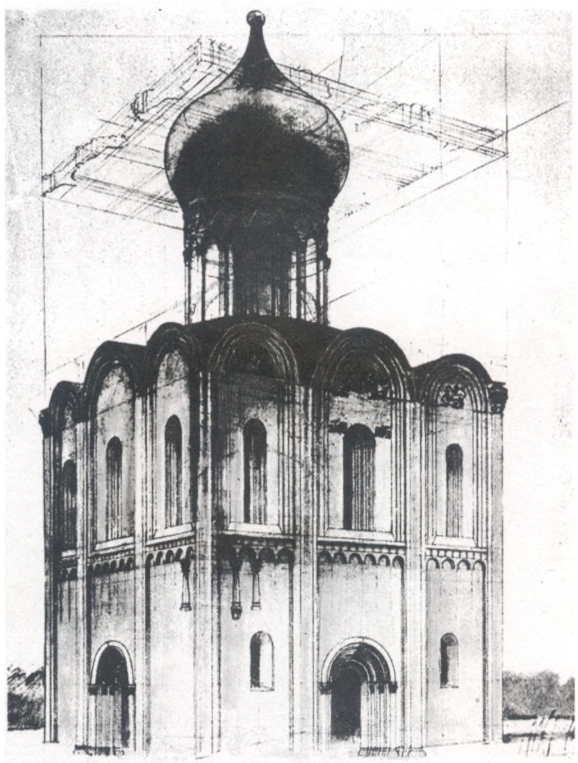
Прежде всего на плоскости картины K проводим линию основания tt и линию горизонта hh, которая выбирается по усмотрению художника (это высота точки зрения художника). Затем, проводя прямые $S'F_1'$ и $S'F_2'$, параллельные CD и CB, строим точки схода F_1 и F_2 этих линий. Делая построения, понятные из рисунков *а*, *б*, получаем перспективу $abcd$ основания $ABCD$. Далее, восставляя из точек a, b, c, d перпендикуляры и откладывая из точки a высоту параллелепипеда (так как переднее ребро параллелепипеда лежит в плоскости картины, то его размеры в перспективе сохраняются), получаем вершину параллелепипеда a'. Наконец, соединяя точку a' с точками схода F_1 и F_2, а также соединяя образуемые при этом точки b' и d' соответствующими точками схода, получаем перспективу всего параллелепипеда.

Вообразим теперь, что, проводя линию горизонта hh, мы ошиблись и она оказалась у нас не выше, а ниже основания картины (рис. *в* на с. 284). В точности повторяя все предыдущие построения, мы получим *обратную* перспективу a, b, c, d прямоугольника $ABCD$.

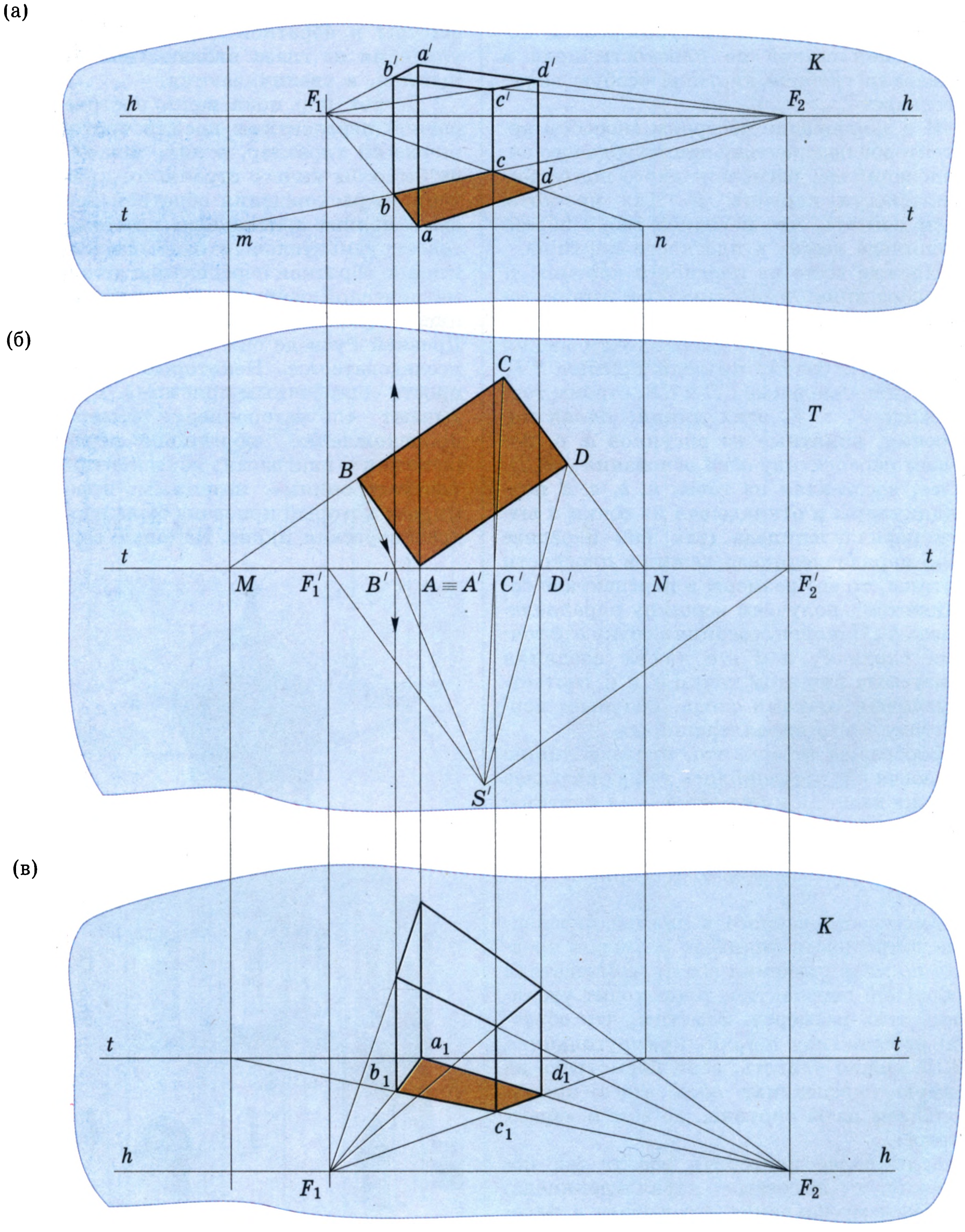
Вместо привычного в *прямой* перспективе сокращения видимых размеров предмета по мере удаления его от наблюдателя в обратной перспективе происходит увеличение этих размеров. Заметим, что обратную перспективу $a_1b_1c_1d_1$ прямоугольника $ABCD$ можно увидеть, если посмотреть на прямую перспективу $abcd$ этого прямоугольника из-за картины, да еще и «вверх ногами».

Если далее повторить все те же построения с высотами параллелепипеда, по-прежнему сохраняя его высоту в плоскости картины, то мы получим обратную перспективу всего параллелепипеда. Еще раз обратим внимание на «странность» обратной перспективы: видимые размеры фигуры в обратной перспективе по мере удаления от глаза наблюдателя не сокращаются, а увеличиваются.

До тех пор пока ваши построения обратной перспективы носили чисто геометрический характер, в них, может быть, и не было бы ничего странного, кроме замеченного расхождения обратной перспективы с нашим зрительным опытом. Но уж совсем удивительным оказывается то, что именно обратная перспектива является геометрической основой древнерусской живописи. Такая странная геометрия живописи Древней Руси до сих пор не дает покоя ее исследователям. Некоторые называют ее просто «ошибочным приемом». Другие связывают «потустороннее» геометрическое происхождение обратной перспективы (вспомните наш взгляд из-за картины) с тем «потусторонним» неземным ирреальным миром, который призвана была изображать древнерусская икона. Наконец, есть и тре-



Перспективный чертеж церкви Покрова Богородицы на Нерли — геометрия, переходящая в искусство.

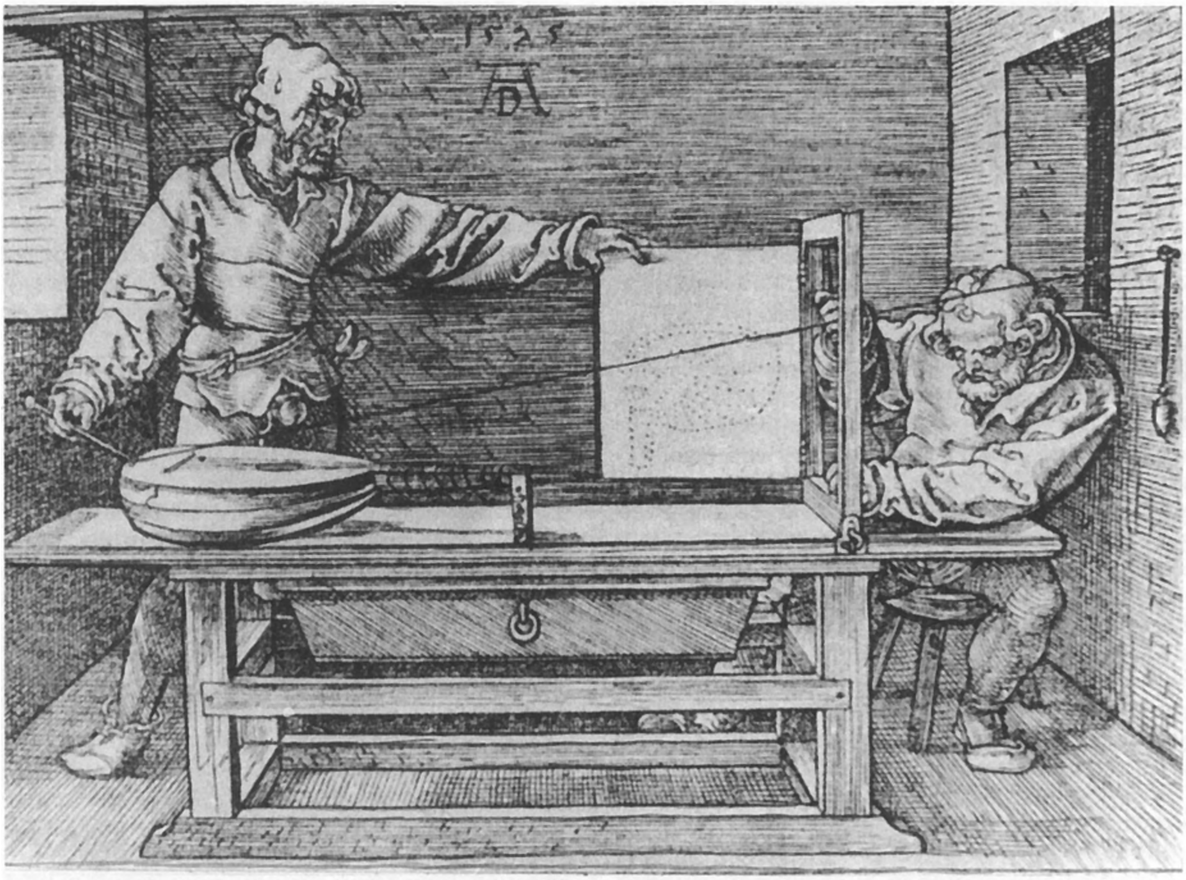


Прямая *(а)* и обратная *(в)* перспективы прямоугольного параллелепипеда, расположенного под углом к картинной плоскости *(б)*.

тий наиболее реалистичный и научный взгляд на обратную перспективу. Но обо всем этом речь пойдет несколько позже.

Итак, перспектива — это очень просто. Это чистая геометрия. Так что же, овладев геометрией перспективы, каждый может стать художником? К сожалению, нет. Математически точная перспектива — это еще не живопись, а только чертеж, хотя бы и такой прекрасный, как воспроизведенный здесь нами. Перспектива — это только геометрическая основа живописи. Но эта основа мертва, до тех пор пока художник не вложит в нее частичку своей души, не сделает ее живописью. При этом в чем-то можно и поступиться геометрией во имя жизни самого искусства живописи.

Как мы видели, построение перспективных изображений — дело довольно сложное. Поэтому наряду с разработкой строгих математических основ теории перспективы художники Возрождения старались дать своим собратьям и простые практические методы построения перспективы. Остроумное устройство для построения перспективы описывает А. Дюрер в трактате «Руководство к измерению». На стене закреплена проушина (это «глаз» художника), через которую продет шнур, идущий последовательно от точки к точке предмета (это «луч зрения»). Шнур проходит через раму, которая закрывается дверцей с натянутой на ней бумагой. Рама имеет подвижные нити — горизонтальную и вертикальную, позволяющие фиксировать координаты точки пересечения «луча зрения» с открытой рамой и переносить их на бумагу (для этого шнур убирают, закрывают дверцу с бумагой и отмечают на ней соответствующую точку). Свой метод Дюрер иллюстрирует прекрасной гравюрой, которая, несмотря на свое «техническое» со-



ДЮРЕР. Устройство для изображения предметов в перспективе. *Гравюра. Ок. 1520 г.*

держание, сама является произведением искусства.

Как происходило дальнейшее развитие теории перспективы? Уже наше короткое знакомство с перспективой убеждает в том, что по перспективному изображению весьма трудно судить об истинных размерах предмета. Желая преодолеть эту трудность, математик и архитектор из Лиона Жерар Дезарг (1593—1662) в работе «Общий метод изображения предметов в перспективе» предложил использовать при построении перспективы метод координат. Изображение предмета предлагалось выполнять совместно с системой координат, относительно которой он ориентирован в пространстве. Метод Дезарга положил начало новому самостоятельному методу изображения, впоследствии названному аксонометрическим.

Дезарг обратил внимание и на другую особенность, возникающую при построении перспективы. Как мы видели, при центральном проектировании прямые, параллельные в горизонтальной плоскости T, могут переходить в пересекающиеся прямые в картинной плоскости K (см. на с. 282). При этом точка схода параллельных прямых в картинной плоскости (точка O на рисунке) не имеет своего прообраза в плоскости T. Желая избавиться от такой особенности, Дезарг предложил дополнить обычную евклидову плоскость (плоскость с конечными точками) *бесконечно удаленными точками*, названными *несобственными точками*. Сколько бесконечно удаленных точек следовало ввести на плоскости T? Очевидно, сколько есть направлений для параллельных прямых, так как естественно считать, что все параллельные друг другу прямые пересекаются в одной бесконечно удаленной точке. Ясно, что таких точек бесконечно много. Совокупность бесконечно удаленных точек на плоскости T образует *бесконечно удаленную прямую*, которая на картинной плоскости K переходит в линию горизонта. Плоскость, дополненная бесконечно удаленными точками и бесконечно удаленной прямой, получила название *расширенной*, или *проективной плоскости*.

Далее Дезарг предложил стереть различия между собственными и несобственными элементами расширенной плоскости. Это значительно упрощало и обобщало многие рассуждения. На расширенной плоскости исчезало само понятие параллельности прямых, так как параллельные прямые можно было считать пересекающимися в бесконечно удаленной точке. Но тогда автоматически устранялась и та особенность центрального проектирования, с которой все и началось: на расширенной плоскости пересекающиеся прямые (в том числе и пересекающиеся в несобственной точке, т. е. параллельные) проектировались в пересекающиеся. Таким образом, на расширенной плоскости центральные проекции дополнялись еще одним инвариантом (см. с. 276) — свойством прямых пересекаться.

Поведение точек и прямых на расширенной плоскости управлялось лишь двумя аксиомами:

1) две различные точки на расширенной плоскости определяют прямую, и притом только одну, которой они принадлежат;

2) две различные прямые на расширенной плоскости определяют точку, и притом только одну, через которую они проходят.

Нет параллельных прямых! Нет знаменитого пятого постулата Евклида, который 2000 лет не давал покоя математикам! Геометрия расширенной плоскости — это геометрия точек, прямых и пересечений. Любая теорема о конфигурации этих элементов на расширенной плоскости оставалась справедливой и для любой центральной проекции этой конфигурации. Отсюда и пошло название новой геометрии — *проективная геометрия*.

Так, в недрах искусства живописи родилась новая наука — проективная геометрия — еще одно свидетельство тесных уз между наукой и искусством.

Новые идеи оказались чрезвычайно плодотворными и позволили Дезаргу получить ряд первоклассных результатов, в том числе и знаменитую теорему, носящую его имя. Однако идеи Дезарга опередили его время. Его сочинения отпугивали современников сжатостью изложения и многочисленностью новых обозначений. О Дезарге и его методе просто забыли...

Пути науки неисповедимы. Судьбе угодно было распорядиться так, чтобы ровно через 150 лет после смерти Дезарга его идеи возродил его же соотечественник. Однако произошло это не в родной Франции, а в далекой России, в глухом провинциальном городе Саратове...

23.
В ПЛЕНУ, В САРАТОВЕ: РОЖДЕНИЕ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В деревню, к тетке, в глушь, в Саратов!
Там будешь горе горевать...
А. ГРИБОЕДОВ

Ноябрь. 1812 год. Истерзанная Бородинским сражением, испуганная московскими пожарами, измученная отсутствием продовольствия и фуража, «великая армия» Наполеона отступала. Впрочем, не отступала — бежала. Так и не дождавшись ключей от Москвы, не сумев пробиться в южные районы России, император молча скакал по им же разоренной Смоленской дороге. Из-за бескормицы начался падеж лошадей, приходилось бросать артиллерию. Лошади, еще месяц назад оглашавшие ржанием гулкие соборы Московского Кремля, валялись теперь вдоль дороги с раздутыми боками. Непрерывные атаки отрядов атамана Платова и Дениса Давыдова повергали в оцепенение некогда грозную гвардию. Крепчали морозы, и таяла на глазах «великая армия» Наполеона.

3 (15) ноября авангарды генералов М. Милорадовича и Д. Голицына под местечком Красным близ Смоленска внезапно столкнулись с самим Наполеоном. Три дня шли кровопролитные бои, приведшие к разгрому лучших войск Наполеона. Французы потеряли 6 тысяч убитыми и ранеными, 26 тысяч пленными. Армия фактически была брошена императором, голодные и обмороженные солдаты прятались по лесам и далее спасались кто как может. Это была прелюдия к развязке на реке Березине.

Среди оставленных умирать на красном снегу под Красным был и двадцатитрехлетний сублейтенант инженерных войск Жан Виктор Понселе. К счастью, дозорный отряд казаков заметил, что молодой «французик» еще дышит. Мундир офицера корпуса инженеров спас ему жизнь. Его подобрали и доставили для допроса.

Затем последовал мучительный 1000-верстный переход в глубь России. Почти пять месяцев нескончаемые вереницы полураздетых и полуживых военнопленных брели по бескрайним заснеженным равнинам. Морозы были так крепки, что ртуть застывала в термометрах. Люди падали и замерзали, не имея сил подняться. В марте 1813 г. Понселе с оставшимися в живых товарищами по несчастью оказался на берегах Волги, в губернском городе Саратове.

Русский народ всегда был велик состраданием. В обмороженных французах сердобольные волжане увидели не бывших врагов, а нынешних страдальцев. Их обогрели, откормили. Яркое апрельское солнце, молодость и жажда жизни победили. Они выжили.

Пленных не обременяли работами. Доподлинно известно лишь то, что они разбили прекрасную дубовую аллею у загородного дома саратовского губернатора. Возможно, один из немногих ныне уцелевших дубов был посажен руками Понселе. Со временем те, кто владел ремеслом, открыли лавки; другие подвизались на ниве воспитания: саратовские красавицы не упускали случая взять уроки модных парижских танцев. Жизнь вошла в свое русло.

Понселе занялся науками. Книг, разумеется, не было, письменные принадлежности — самые скудные. Поэтому прежде всего он восстановил по памяти все, что знал по математике,— от арифметики до математического анализа и высшей геометрии. Вокруг Понселе собирается кружок единомышленников — таких же, как и он, воспитанников Политехнической школы в

Париже либо мечтающих выдержать туда экзамен, если когда-нибудь они снова увидят родную Францию. Занятия математикой скрашивали долгие вечера. Любопытно признание самого Понселе в том, что практически все сложные математические выкладки, которые он изучал, стерлись в его памяти, тогда как общие фундаментальные принципы остались в ней такими же ясными, как и много лет назад. Именно за этими занятиями математикой Понселе и пришел к своему гениальному творению — созданию *проективной геометрии*.

То, что в саратовском плену Понселе вспомнил прежде всего о геометрии, разумеется, не было случайным. Вся французская наука того времени была пронизана духом геометрии. Во главе Политехнической школы, которую Наполеон называл наседкой, несущей ему золотые яйца, стоял отец начертательной геометрии Гаспар Монж. Да и сам император не искал царского пути в геометрии и доказал несколько теорем, носящих его имя.

Саратовский плен оказался недолгим. 25 марта (6 апреля) 1814 г. Наполеон подписал в Фонтенбло отречение от престола и был сослан на остров Эльба. А в сентябре того же года пленники вернулись на родину.

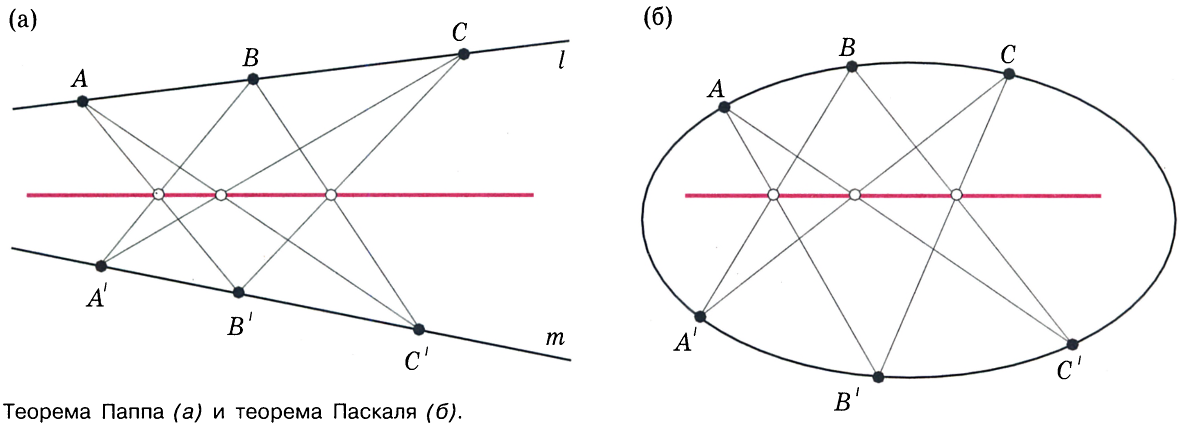
Понселе возвратился во Францию с семью записными книжками, хранившими его блестящие идеи. Именно «материал семи рукописных записных книжек, написанных в Саратове, в русском плену (с 1813 по 1814 г.), вместе с разными другими записями, старыми и новыми», и составил основу классического труда молодого офицера — «Трактат о проектных свойствах фигур». Первое издание трактата вышло в 1822 г. Второму изданию, вышедшему сорок лет спустя, была предпослана «апология» — описание давних приключений автора, имевших самый счастливый конец[1].

[1] Можно лишь с горечью констатировать, что сегодня нам ничего не известно о рукописи другого саратовского пленника, также написанной по памяти, но от которой нас отделяют не более 150, а менее 50 лет. Это рукопись «История развития мирового земледелия» Джордано Бруно XX в. — Николая Вавилова, чья звезда так ярко взошла и столь трагически упала в Саратове.

С выходом в свет трактата Понселе проективная геометрия стала самостоятельной наукой. Заслуга Понселе заключалась в выделении *проективных свойств фигур* (Понселе понимал их как свойства, которые остаются неизменными при любом центральном проектировании фигуры с одной плоскости на другую) в отдельный класс и установлении соответствий между метрическими и проективными свойствами этих фигур. Помимо точек и прямых проективными свойствами обладают, например, *линии второго порядка* (окружности, эллипсы, параболы и гиперболы). Понселе были сформулированы также *принцип непрерывности* и *принцип двойственности*. Первый принцип позволил рассмотреть всякого рода исключения и особые случаи с более широкой точки зрения (например, параллельность прямых как пересечение их в бесконечно удаленной точке) и дать геометрический аналог мнимым числам в геометрии. С помощью второго принципа стало возможным в два раза увеличивать число теорем проективной геометрии, не прилагая при этом никаких усилий.

Значение проективных свойств в геометрии было осознано лишь в конце XIX в., когда немецкий математик Феликс Клейн (1849—1925) доказал, что и обычная геометрия Евклида, и «необычная» геометрия Лобачевского могут быть рассмотрены в рамках проективной геометрии. Так было установлено кардинальное значение проективной геометрии для всей геометрии.

«Милостивые государи! Между приобретениями, сделанными в области геометрии за последние пятьдесят лет, развитие проективной геометрии занимает первое место». Этими словами в старинном немецком городке Эрлангене в 1872 г. Клейн начал свою знаменитую лекцию, вошедшую в историю математики как «Эрлангенская программа». В этой лекции, изменившей взгляд на геометрию в целом, Клейн дал новое определение древней науки: геометрия есть учение об инвариантах той или иной группы преобразований. Выбирая по-разному группу преобразований, можно получать разные геометрии. Заметим, что проективная геометрия лежит в основе теории аэрофотосъемки и находит сегодня важнейшее приложение при обработке снимков из космоса.



Теорема Паппа *(а)* и теорема Паскаля *(б)*.

Рассмотрим основные идеи проективной геометрии. Как отмечалось в конце предыдущей главы, Понселе возродил идею *проективной плоскости* Дезарга, т. е. плоскости, дополненной бесконечно удаленными точками и бесконечно удаленной прямой. На проективной плоскости стираются различия между параллельными и пересекающимися прямыми, свойство прямых пересекаться становится инвариантным относительно операции проектирования, а поведение точек и прямых определяется двумя аксиомами (см. с. 286). Поскольку метрические свойства геометрических фигур (расстояния и углы) при проектировании не сохраняются (см. с. 276), а проективная геометрия изучает свойства фигур, инвариантные относительно операции проектирования, то метрические свойства в проективной геометрии не рассматриваются. Именно поэтому проективную геометрию называют «геометрией положения» или «геометрией линейки без делений».

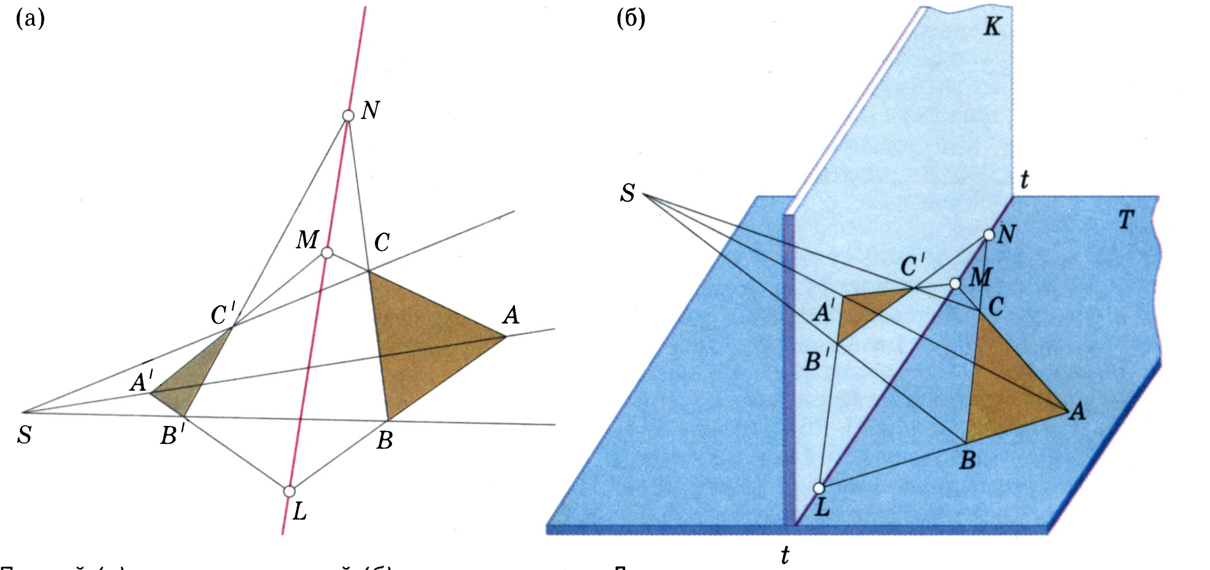
Разумеется, проективная геометрия развилась не вдруг с появлением трактата Понселе. Известны три важнейшие предтечи проективной геометрии — три теоремы элементарной геометрии, которые не содержат в условиях метрических характеристик. Первая теорема известна с глубокой древности и носит имя александрийского геометра III в. Паппа.

Теорема Паппа. Пусть l и m — две прямые на плоскости; A, B, C — различные точки прямой l, а A', B', C' — различные точки прямой m. Тогда точки пересечения трех пар накрест лежащих прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ принадлежат одной прямой. Проективный характер теоремы Паппа очевиден: в ней фигурируют только точки, прямые и их пересечения; поэтому теорема Паппа остается справедлива при любом проективном преобразовании.

Через 1200 лет после Паппа шестнадцатилетний юноша Блез Паскаль (1623—1662) опубликовал свое лучшее математическое сочинение «Трактат о конических сечениях». В трактате Паскаль доказал теорему, которую он назвал Hexagramma mysticum (Волшебный шестиугольник) и которую он украсил почти 400 следствиями. Теорему Паскаля можно считать своего рода обобщением теоремы Паппа на случай конических сечений[1], которые, как и прямые, обладают проективными свойствами.

Теорема Паскаля. Пусть A, B, C, A', B', C' — шесть точек, принадлежащих некоторому коническому сечению. Тогда точки пересечения трех пар накрест лежащих пря-

[1] Коническими сечениями (линиями второго порядка) называют эллипс (и его частный вид — окружность), параболу и гиперболу — линии, которые могут быть получены как сечения прямого кругового конуса. В последнем легко убедиться, посветив обычным карманным фонариком (световой конус) на стену. Когда фонарик перпендикулярен стене, мы видим окружность, затем при наклоне фонарика — эллипс. Когда одна из образующих светового конуса станет параллельна стене, мы увидим параболу и, наконец, при больших углах наклона — гиперболу. Математическое доказательство этих результатов принадлежит выдающемуся античному математику Апполонию из Перги.



Плоский *(а)* и пространственный *(б)* варианты теоремы Дезарга.

мых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ принадлежат одной прямой. Существует и другая формулировка теоремы Паскаля, в которой ее связь с теоремой Паппа не столь очевидна: три точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, лежат на одной прямой (см. с. 294). Еще раз подчеркнем, что теорема Паскаля справедлива для любого конического сечения (окружности, эллипса, параболы и гиперболы). Более того, при надлежащем определении касательной в точке конического сечения теорема Паскаля будет выполняться в том случае, когда не все из шести точек различны.

Наконец, третья теорема — одна из важнейших теорем проективной геометрии — носит имя Дезарга, который вместе с Понселе разделяет славу создания проективной геометрии.

Теорема Дезарга. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два треугольника (необязательно лежащие в одной плоскости), такие, что прямые AA', BB' и CC', соединяющие соответственные вершины треугольников, сходятся в одной точке S. Тогда точки пересечения соответственных сторон этих треугольников AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ лежат на одной прямой. Плоский вариант теоремы Дезарга, как и теоремы Паппа и Паскаля, отнюдь не очевиден, тогда как ее пространственный вариант настолько прозрачен, что просто удивительно, как художники Возрождения, так много занимавшиеся теорией перспективы, не «заметили» его.

В самом деле, пусть треугольник ABC лежит в горизонтальной плоскости T, треугольник $A'B'C'$ есть его изображение на картинной плоскости K и точка S — центр проектирования. Прямые, соединяющие соответственные вершины этих треугольников,— это «лучи зрения», а $\triangle A'B'C'$ есть сечение «пирамиды зрения» с основанием ABC и вершиной в точке S. Соответственные стороны AB и $A'B'$ расположены на грани SAB «пирамиды зрения», т. е. лежат в одной плоскости и пересекаются в некоторой точке L. Но точка L одновременно принадлежит прямым AB и $A'B'$. Значит, она одновременно принадлежит плоскости T и плоскости K, т. е. лежит на линии пересечения этих плоскостей — прямой tt. Аналогично доказываем, что и точка пересечения сторон AC и $A'C'$ (точка M) и сторон BC и $B'C'$ (точка N) лежат на той же прямой tt. Следовательно, все три точки L, M, N лежат на одной прямой. Пространственная теорема Дезарга доказана.

Для доказательства плоской теоремы Дезарга достаточно $\triangle A'B'C'$, лежащий в картинной плоскости K, спроектировать на плоскость T из двух центров проекции S

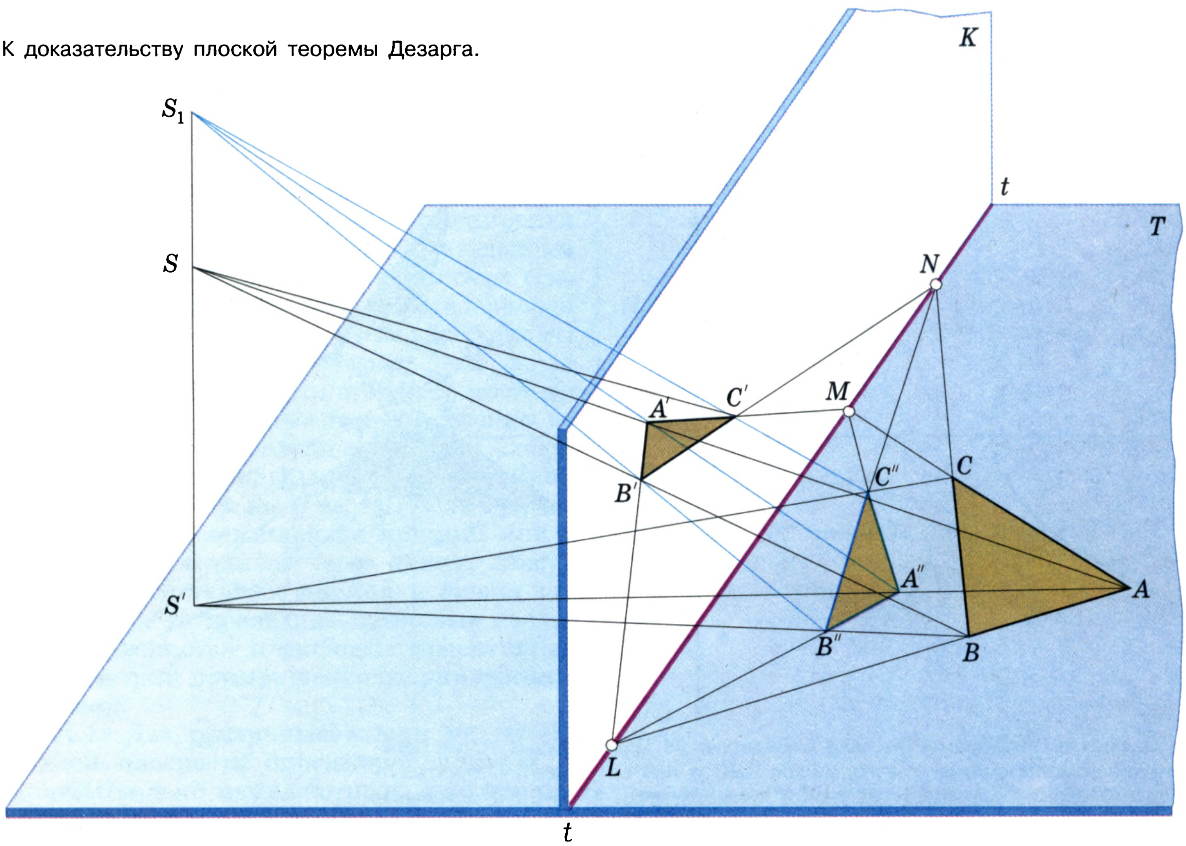
и S_1, определяющих прямую S_1S'. В результате на плоскости T мы получим два треугольника: ABC и $A''B''C''$. Поскольку прямые S_1A'' и SA лежат в одной плоскости, то точки A'' и A будут лежать на одной прямой $S'A$ — линии пересечения этой плоскости с плоскостью T (аналогично для точек B'' и B, а также C'' и C). Следовательно, прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников ABC и $A''B''C''$, пересекаются в одной точке S', т. е. удовлетворяют условию теоремы Дезарга. Для каждой из пар треугольников: $\triangle A'B'C'$ и $\triangle ABC$, а также $\triangle A'B'C'$ и $\triangle A''B''C''$ — справедлива пространственная теорема Дезарга. Более того, так как в каждой паре этих треугольников имеется один и тот же $\triangle A'B'C'$, то всякий раз все три соответственные стороны этих треугольников будут пересекаться в одной точке. Так мы получим точки L, M и N, лежащие на прямой tt, т. е. придем к плоской теореме Дезарга.

Оба доказательства теоремы Дезарга настолько просты и изящны, что трудно было удержаться от соблазна привести их здесь. Но дело не только в этом. Мы доказали плоскую теорему Дезарга с помощью ее пространственного аналога, т. е. при помощи пространственных построений.

Как показал в конце XIX в. Д. Гильберт, без выхода из плоскости в пространство вообще невозможно доказать плоскую теорему Дезарга методами проективной геометрии (без привлечения метрических понятий). Следовательно, если задаться целью разрабатывать плоскую проективную геометрию лишь средствами плоскости, не используя пространство, то мы обязаны присоединить теорему Дезарга в качестве новой аксиомы этой плоской геометрии.

Затем Гильберт показал, что, исключив «аксиому Дезарга», можно построить новую, так называемую *недезаргову*, геометрию на плоскости. Так на протяжении веков раскрывалась чрезвычайно важная роль теоремы Дезарга в проективной геометрии.

К доказательству плоской теоремы Дезарга.

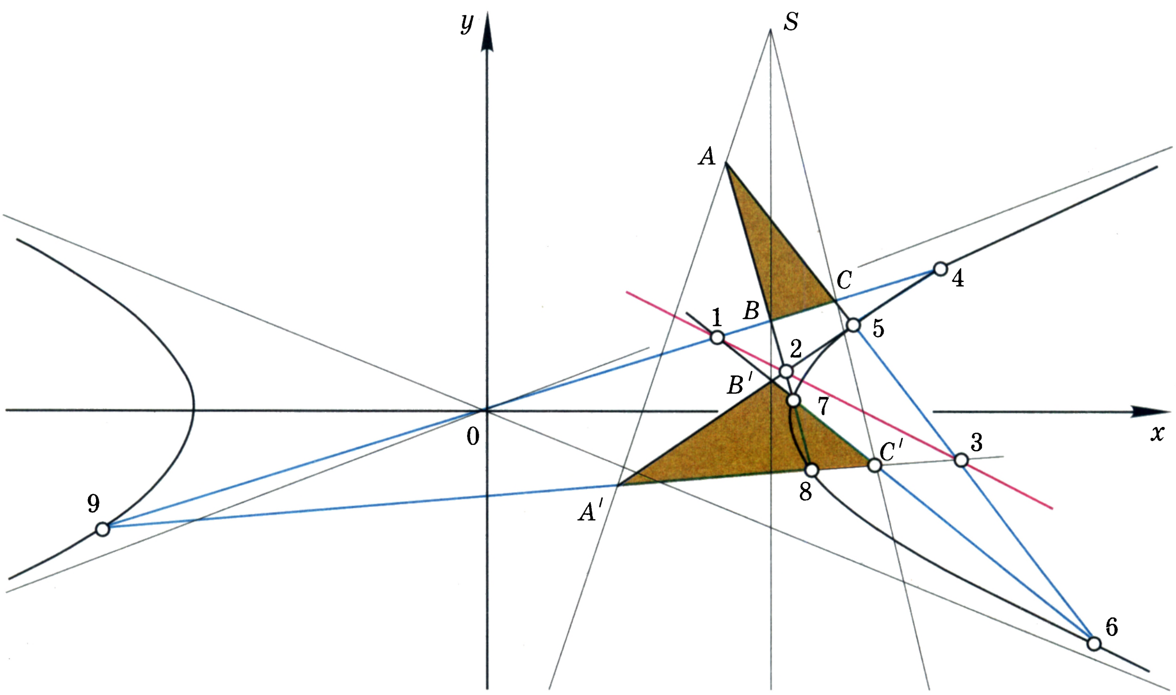


Заканчивая краткое знакомство с тремя великими предтечами проективной геометрии, нельзя не отметить и ту глубокую связь между теоремами Паскаля и Дезарга, которая также была раскрыта лишь спустя столетия. Если взять два треугольника, удовлетворяющих условию теоремы Дезарга (такие треугольники называются *гомологическими*, т. е. сходственными), то всего существует 9 возможных точек пересечения их сторон. Три точки пересечения соответственных сторон, как следует из теоремы Дезарга, лежат на одной прямой. А вот остальные шесть точек пересечения всегда лежат на некотором коническом сечении, т. е. удовлетворяют теореме Паскаля! Заинтересовавшийся читатель может сам построить массу интересных конфигураций с гомологическими треугольниками.

Наконец, теорема Дезарга является теоретическим фундаментом перспективных построений, о чем мы еще скажем в конце главы.

И снова вернемся к Понселе. Помимо того что Понселе возродил идею проективной плоскости Дезарга и придал «геометрии положения» самостоятельный статус, он обогатил новую науку и новыми идеями, среди которых были принципы непрерывности и двойственности.

Принцип непрерывности, позволяющий выводить свойства одной фигуры из свойств другой, Понселе сформулировал так: «Если одна фигура получается из другой непрерывным изменением и столь же обща, как и первая, тогда без дальнейших соображений можно отнести свойства, доказанные для первой фигуры, ко второй». Например, ясно, что противоположные стороны правильного шестиугольника, вписанного в окружность, пересекаются в бесконечно удаленных точках, т. е. лежат на одной бесконечно удаленной прямой. Но это есть доказательство простейшего случая теоремы Паскаля. Тогда согласно принципу непрерывности это утверждение должно быть справедливо и для любого шестиугольника, вписанного в коническое сечение, т. е. мы получаем доказательство общей теоремы Паскаля! Итак, сформулировав и доказав



Связь между теоремами Паскаля и Дезарга: из 9 возможных точек пересечения гомологических треугольников ABC и $A'B'C'$ 3 точки пересечения сходственных сторон лежат на одной прямой (точки 1, 2, 3), а остальные 6 — на коническом сечении (гиперболе) — точки 4, 5, 6, 7, 8, 9.

теорему проективной геометрии в простейшем частном случае, Понселе автоматически получал ее обобщение для любой проекции, в которой вид первоначальной конфигурации мог измениться до неузнаваемости.

Несмотря на неточную формулировку, в руках Понселе принцип непрерывности дал новые и верные результаты. Однако на пути применения принципа часто возникали подводные камни. Например, легко видеть, что эллипсы или параболы пересекаются на плоскости в четырех точках, тогда как окружности — только в двух. Между тем как конические сечения эти линии должны обладать одинаковыми свойствами. Вводя на плоскости систему координат и следуя принципу непрерывности, Понселе пришел к выводу, что все окружности помимо двух действительных точек пересечения имеют на плоскости еще две точки пересечения, которые являются не только бесконечно удаленными, но и мнимыми (точнее, комплексно-сопряженными). Так в геометрии появились комплексные числа.

Но если принцип непрерывности достаточно сложен и требует поистине математического полета фантазии, то принцип двойственности прост и прозрачен. Рассмотрим, как действует принцип двойственности в планиметрии.

Вспомним основные аксиомы проективной геометрии на плоскости, формулировка которых стала возможной с введением понятий бесконечно удаленных точек (см. с. 286). Принцип двойственности основан на том простом факте, что эти две аксиомы обнаруживают *двойственность*, т. е. переходят друг в друга, если поменять местами слова *точки* и *прямые* (соответственно из соображений литературности языка следует поменять глаголы *лежат* и *проходят*, а также предлоги *на* и *через*). Если же, говоря о точке, лежащей на прямой, или о прямой, проходящей через точку, ввести более общий термин *прямая* и *точка инцидентны*, то последние языковые различия устраняются и аксиомы проективной планиметрии примут наиболее универсальный вид:

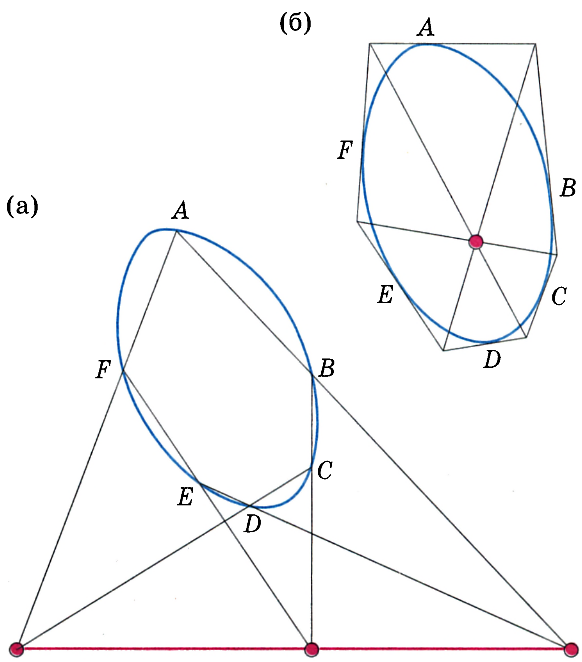
А.1. Две различные *точки* на проективной плоскости определяют *прямую*, и притом только одну, которой они обе инцидентны.

А.2. Две различные *прямые* на проективной плоскости определяют *точку*, и притом только одну, которой они обе инцидентны.

Теперь эти две аксиомы отличаются друг от друга только выделенными словами, т. е. словами *точки* и *прямые*, а мы получаем возможность сформулировать сам принцип двойственности: все утверждения проективной планиметрии образуют пары, в которых одно из утверждений пары можно непосредственно получить из другого, взаимозаменив слова *точка* и *прямая*.

Понселе не только открыл принцип двойственности, но и применял его до пределов возможного. С легкой руки Понселе стало принято записывать теоремы проективной геометрии в два столбца: в одном столбце пишут доказанную теорему, а в другом — двойственную ей. Разумеется, доказательство двойственной теоремы становится излишним. Таким образом, с открытием Понселе стало возможным удвоить число теорем проективной геометрии, не затратив при этом никакого труда.

В качестве примера двойственных теорем приведем следующую пару. В левом столбце записана известная нам теорема



Принцип двойственности: теорема Паскаля *(а)* и теорема Брианшона *(б)*.

Паскаля, которая сформулирована в удобном для «двойственного перевода» виде. Дополнив наш «словарь двойственных терминов» еще одной парой: *точка пересечения двух прямых* и *прямая, проходящая через две точки,* — мы легко получаем в правом столбце теорему, двойственную теореме Паскаля. (В обеих теоремах взаимозаменяемые термины выделены, а выражения, проясняющие смысл, взяты в скобки.)

Если A, B, C, D, E, F — любые *точки* конического сечения, то три *точки пересечения двух* противоположных *прямых* (сторон вписанного шестиугольника) инцидентны одной *прямой*.	Если A, B, C, D, E, F — любые *прямые* (касательные) к коническому сечению, то три *прямые, проходящие через две* противоположные *точки* (вершины описанного шестиугольника), инцидентны одной *точке*.
Теорема Паскаля	Теорема Брианшона

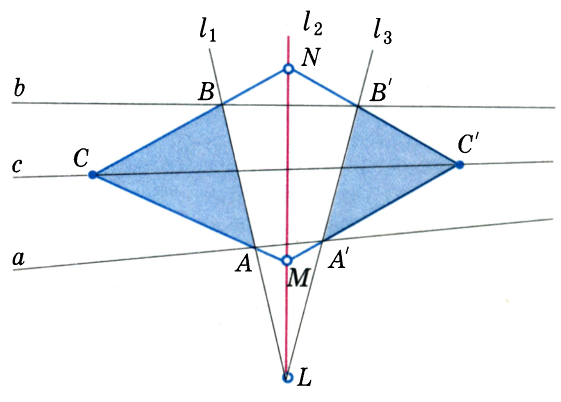
Каков же был восторг Понселе, когда в теореме, двойственной теореме Паскаля, он увидел теорему, доказанную в 1806 г. его однокашником, студентом Политехнической школы Шарлем Брианшоном (1785—1864)! Однако в отличие от Брианшона Понселе доказывал эту теорему «автоматически». Это открытие утвердило Понселе в могуществе принципа двойственности.

И в заключение вновь перейдем от математики к искусству. Рождению проективной геометрии во многом способствовали геометрические исследования художников Возрождения. А появившись на свет, проективная геометрия стала теоретическим фундаментом искусства перспективы. Важную роль при построении перспективных изображений играет теорема Дезарга. Мы остановимся на двух приложениях этой теоремы к теории перспективы.

Теорема Дезарга и способ архитекторов. Способ архитекторов, который мы применили в предыдущей главе для построения перспективы интерьера комнаты и перспективы параллелепипеда (см. с. 284), состоит, по существу, в построении двух точек: точки схода изображаемой линии и точки пересечения этой линии с основанием картины. Зная эти две точки, мы можем построить перспективное изображение данной линии. Метод построения точки схода на перспективе был нами разобран на с. 280, доказательство его справедливости очевидно из рисунка на с. 282. А вот найти точку пересечения образа данной линии с основанием картины позволяет нам теорема Дезарга.

Обратимся для определенности к рисунку на с. 284. Прежде всего заметим, что любую фигуру, состоящую из прямых линий, можно разбить на соответствующее число треугольников. Рассмотрим треугольник ABC на плоскости T (рис. *б*) и его перспективное изображение треугольник abc на плоскости K (рис. *а*). По теореме Дезарга соответственные стороны этих треугольников пересекаются в одной точке на основании картины tt. Именно поэтому в наших построениях мы продолжили сторону BC до пересечения с линией основания tt в точке M (рис. *б*), а затем перенесли эту точку на линию tt в плоскости K. Так мы нашли неизвестную нам точку пересечения образа линии BC с линией основания tt (точка m на рис. *а*). Аналогично найдена и точка n. Зная точки пересечения m, a, n и их точки схода F_1 и F_2, легко построить перспективу прямоугольника $ABCD$.

Теорема Дезарга и недоступные точки схода. Случается, что при построении перспективного изображения художник, а еще чаще архитектор сталкиваются с такой трудностью: точка схода некоторой линии оказывается за пределами картины (чертежа). Покажем, как теорема Дезарга может помочь в этом случае.



Проведение прямой c в недоступную точку схода с помощью теоремы Дезарга.

Пусть на плоскости картины K даны две прямые a и b, идущие в недоступную точку схода (в качестве одной из таких прямых чаще всего выступает линия горизонта). Требуется через некоторую точку $C \in K$ провести прямую c в недоступную точку схода. Выберем на плоскости K произвольную точку L и проведем через эту точку три произвольных луча l_1, l_2, l_3. Лучи l_1 и l_3 пересекут прямые a и b в точках A, B и A', B' соответственно. Через точку C проведем прямые CA и CB, пересекающие луч l_2 в точках M и N. Наконец, проведем прямые MA' и NB' до пересечения в точке C'. Как следует из теоремы Дезарга, прямая c, проходящая через точки C и C', пересекается с прямыми a и b в одной точке, т. е. прямая c и является искомой прямой, идущей в недоступную точку схода.

Мы познакомились с геометрическими методами отображения трехмерного пространства на плоскость картины. Методы эти составляют предмет изучения самостоятельной науки — начертательной геометрии, которая, в свою очередь, стимулировала развитие еще одной ветви математики —проективной геометрии. Но эти же геометрические методы живут полнокровной жизнью и в искусстве живописи. Они помогают художнику разрешать извечный парадокс искусства живописи: заставить зрителя в плоском холсте, покрытом красками, увидеть реальный трехмерный мир, окружающий человека. В разные эпохи эта «вечная» проблема живописи решалась по-разному, в том числе и разными геометрическими методами, в чем легко убедиться, прочитав следующую главу.

24. ГЕОМЕТРИЯ И ЖИВОПИСЬ: СТРАНИЦЫ ИСТОРИИ

И, поистине, живопись — это наука и законная дочь природы, ибо она порождена природой...

ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ

Геометрия и живопись... Пути науки и искусства переплетались в них на протяжении столетий. Геометрия дарила живописи новые изобразительные возможности, обогащала язык живописи, а живопись эпохи Возрождения стимулировала исследования по геометрии, дала начало проективной геометрии. Сейчас нам предстоит взглянуть на геометрию с неожиданной, быть может, стороны. Мы увидим, что геометрия, будучи могучей ветвью древа математики, является в то же время и тем связующим стержнем, который проходит через всю историю живописи.

В самом деле, существуют три принципиальных геометрических метода отображения трехмерного пространства на двумерную плоскость картины: метод ортогональных проекций, аксонометрия и перспектива (см. рис. на с. 278). Перспектива, как мы видели на с. 284, может быть прямой или обратной. Все эти принципиальные возможности изображения пространства на плоскости были реализованы в искусстве живописи, причем в разных пластах художественной культуры каждый из этих методов находил свое наиболее полное и чистое выражение. Так, система ортогональных проекций составила геометрическую основу живописи Древнего Египта; аксонометрия (параллельная перспектива) характерна для живописи средневекового Китая и Японии; обратная перспектива — для фресок и икон Византии и Древней Руси; прямая перспектива — это геометрический язык ренессансной живописи, а также станковой и монументальной живописи европейского искусства XVII в. и русского искусства XVIII — XIX вв.

Итак, *ортогональные проекции — аксонометрия — перспектива*. Именно по такой схеме шло развитие геометрии живописи. Видимо, простота метода прежде всего определяла его положение в этой схеме. Метод ортогональных проекций как наиболее простой занял в ней первое место. Ортогональные проекции передавали без искажений контуры реальных предметов, а идея метода, как справедливо заметил Леонардо да Винчи, была подсказана человеку самой природой: тень, отброшенная вечерним солнцем на стену, и была первой картиной, нарисованной этим методом. Однако ортогональные проекции никак не передавали глубину реального пространства, поэтому уже в искусстве Древнего Египта появились ростки аксонометрии.

Аксонометрия при надлежащем выборе точки зрения передавала без искажений фронтальную плоскость изображаемого предмета; она давала представление о глубине пространства, хотя и трудно было понять, сколь протяженна эта глубина. Строгий математический взгляд на аксонометрию как центральную проекцию с бесконечно удаленным центром сложился сравнительно недавно, в XVIII в., в трудах немецкого математика и философа Иоганна Генриха Ламберта (1728—1777). Однако как нестрогий метод изображения пространства на плоскости аксонометрия, именуемая тогда *вольной перспективой*, известна давно. Начиная с Птолемея (II в.) и вплоть до XVIII в. (до появления начертательной геометрии) планы городов изображались в вольной перспективе, как бы с высоты птичьего полета. (Этот принцип и сегодня широко используется на туристских схемах.)

Недостатки аксонометрии в передаче глубины пространства вместе с «вольностями» вольной перспективы были исправлены в *ренессансной системе перспективы*. Эта система имела *единые* правила, основанные на математических доказательствах, отчего за ней закрепилось название *научной системы перспективы*. Ренессансная перспектива — наиболее сложный геометрический метод в живописи. Построенный с учетом геометрических закономерностей зрения (геометрической оптики), он наиболее точно воспроизводил видимый человеком мир. Ренессансная перспектива, как и вся философия эпохи Возрождения, распахнула перед человеком «окно в Природу», беспредельно расширила горизонты человеческого мироощущения.

Таким образом, каждый из трех геометрических методов был очередным этапом в развитии искусства живописи, новой ступенью в поисках более точной и совершенной системы передачи зрительных ощущений. Любопытно, что по такой же схеме идет развитие и детского рисунка, хотя многие так и не поднимаются выше ее первой ступени. Психологи много спорят, почему дети начинают рисовать именно с «ортогональных проекций», хотя, как нам кажется, главной причиной тому является простота метода, который с рождения демонстрирует ребенку само Солнце.

Еще раз обратим внимание на то, что человека окружают два геометрических пространства, хотя и похожие, но различные. Одно — это *объективное*, или *реальное, пространство*. Другое пространство создается в нашем сознании совместной работой глаза и мозга. Это пространство мы «видим», воспринимаем в нашем сознании, поэтому его называют *субъективным*, или *перцептивным*[1] (вспомним пример с рельсами на с. 280). Таким образом, история развития живописи шла по линии приближения от изображения объективного пространства к пространству видимому, перцептивному. Вершиной на этом пути можно считать рождение системы так называемой *перцептивной перспективы*, которая интуитивно осознавалась художниками XIX—XX вв. и проявлялась на их полотнах в виде всевозможных «отклонений» от ренессансной системы перспективы. Общая теория перспективы, включающая в себя как частные случаи и ренессансную, и перцептивную перспективы, была разработана в наши дни академиком Б. В. Раушенбахом (см. главу 25).

Вместе с тем Раушенбахом было показано, что не существует идеальной системы перспективы в изображении перцептивного пространства, как не существует и идеаль-

[1] От лат. *perceptio* — восприятие.

ных (т. е. не дающих метрических искажений) методов отображения трехмерного пространства на двумерную плоскость. «Идеальное» изображение трехмерного пространства (как объективного, так и субъективного) в принципе невозможно, а значит, художник при всем своем желании способен дать на холсте лишь приближенную геометрическую картину внешнего мира. В зависимости от своих задач художник вправе избрать тот или иной геометрический метод, который позволит ему ярче раскрыть задуманный им образ. Поэтому вовсе не обязательно, как это любят делать искусствоведы, упрекать древнеегипетского художника в чрезмерной наивности, детскости рисунка, японского — в недоработке глубины, древнерусского — в неправильности его перспективы, а ренессансного художника объявлять непререкаемой истиной в живописи, хотя и последнего нередко обвиняют в излишней фотографичности.

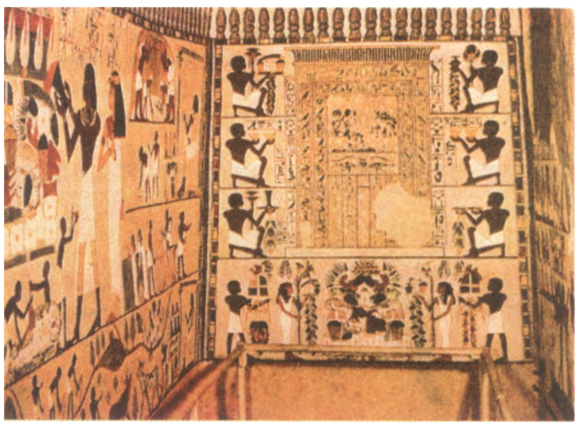
В каждой геометрической системе живописи есть свои достоинства и свои недостатки: одна система лучше передает объективное пространство, а другая — субъективное. Значит, в каждой системе есть и свои выразительные возможности, и «невозможности», что станет более понятным из ближайшего рассмотрения этих систем.

24.1. «ОРТОГОНАЛЬНАЯ» ЖИВОПИСЬ ДРЕВНЕГО ЕГИПТА

Идея незыблемости, вечности абсолютной власти фараона, почитавшегося сыном Бога, пронизывала всю философию и весь жизненный уклад древнеегипетского общества. Эта идея не только откристаллизовалась в острых гранях пирамид — апофеозе вечности, но и нашла воплощение в древнеегипетской живописи. Согласно «философии вечности» образы древнеегипетской живописи также должны были вбирать в себя все непреходящее и наиболее устойчивое. Каждый предмет как бы вычленялся художником из окружающего мира, осмыслялась «идея» этого предмета, и в результате возникал живописный образ, который не зависел ни от места, ни от времени его создания и который сегодня удачно называют «образом-существительным».

Образы-существительные слагались в картины-предложения и даже картины-повествования. Живопись Древнего Египта была близка к письменности, и образы-существительные часто перемежались с иероглифами, от которых они отличались лишь степенью детализации. Собственно говоря, в древнеегипетской живописи и произошло разделение древнего *пиктографического письма*[1] на иероглифическую письменность, которая все дальше отходила от изображения реальных объектов и все более приобретала знаковый характер, и живопись, в которой все зримее проступали художественные образы и все более стирались знаковые особенности.

Какой же изобразительный прием, какая геометрия лучше всего подходили для создания образа-существительного, для воплощения идеи незыблемости? Таким геометрическим методом является, конеч-



Роспись гробницы Нахта, жреца Амона при фараоне Аменхотепе II. *Фивы. 1420—1411 гг. до н. э.*
Стенопись древнеегипетских гробниц напоминала развернутый свиток папируса, где священные тексты «Книги мертвых» перемежались с яркими иллюстрациями. Это была одновременно и научная книга, и художественный альбом. Особой живописностью отличались росписи некрополя фиванской знати, а среди них — гробница Нахта, подлинным украшением которой являются знаменитые музыкантши — образец изящества и пластики древнеегипетского искусства.

[1] *Пиктографическое письмо*, пиктография (от лат. *pictus* — нарисованный и греч. γραφω — рисовать, писать) — рисуночное письмо, отображающее содержание сообщения в виде последовательности рисунков. Известно с эпохи неолита.

но, метод ортогональных проекций. В самом деле, если изобразить, например, крышку стола в аксонометрии или перспективе, то в зависимости от точки зрения мы будем иметь бесконечное разнообразие параллелограммов (в аксонометрии) или трапеций и даже неправильных четырехугольников (в перспективе). Такое разнообразие изображений, зависящее от точки зрения художника, такой «импрессионизм» не могли устроить художника древнеегипетского. И он выбирает единственно правильный и единственно возможный в данном случае путь — метод ортогональных проекций. Только в ортогональной проекции форма предмета может быть зафиксирована единственным образом, без искажений.

Итак, ортогональные проекции позволяли древнеегипетскому художнику сообщать зрителю объективную информацию об окружающем мире. Что касается самой потребности в такой информации, то, во-первых, древнеегипетская живопись еще не совсем отошла от пиктографического письма: ее целью было сообщать о деяниях фараонов, военных походах, удачной охоте, о богах, загробной жизни и т. д.; во-вторых, изображения на стенах гробниц призваны были «служить» усопшему в потустороннем мире. Поэтому, естественно, эти изображения должны были носить объективный характер. Этими особенностями целей живописи Древнего Египта объясняется и выбор ее геометрического средства — метода ортогональных проекций.

Метод ортогональных проекций был в совершенстве разработан живописцами Древнего Египта. Поскольку художник не мог дать все три проекции предмета (все-таки это была живопись, а не чертеж!), он делал одну проекцию в наиболее выгодном ракурсе. Вот почему при изображении животных выбирался вид сбоку, профильное изображение как наиболее информативное. По той же причине человеческая фигура рисовалась в несколько странном ракурсе: голова и ноги давались в профиль (профильное изображение ног позволяло легко передать движение или покой), а грудь и плечи рисовались в фас. В то же время убитые враги, лежащие на земле, показывались сверху, т. е. также с наиболее информативной точки зрения.

Показ предмета с наиболее выразительной точки зрения не останавливал древнеегипетского художника перед явными с современной точки зрения казусами. Так, на иллюстрации из «Книги Мертвых» художник показывает бога Осириса в характерном профильном изображении с развернутыми к зрителю плечами. Если строго следовать методу ортогональных проекций, то пруд, у которого сидит Осирис, превратился бы в ничего не говорящий зрителю отрезок прямой. Поэтому художник пока-

Бог Осирис у пруда с деревьями. *Иллюстрация из «Книги мертвых». XV в. до н. э.*

зывает пруд сверху. Однако при такой проекции окружающие пруд деревья стали бы крайне невыразительными, попросту непонятными, и художник поворачивает деревья на прямой угол по каждой из сторон пруда. Таким образом в этом рисунке совмещены по крайней мере 6 точек зрения, 6 ортогональных проекций.

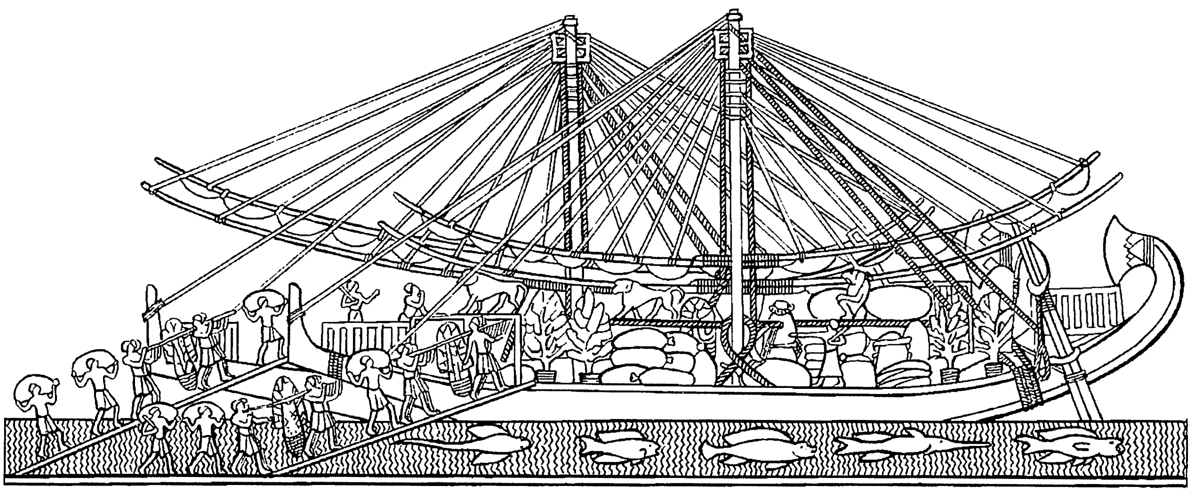
Вообще, древнеегипетский живописец творил не столько согласно зрению, сколько согласно умозрению. Умозрение позволяло художнику совмещать в одном рисунке разные точки зрения. Умозрение давало возможность изображать рыб и крокодилов, которых в действительности не видно в воде. Умозрение помогло выработать математическую систему правил в изображении фигуры человека — канон. Канон демонстрировал приобщенность живописца к знанию и власти, был символом посвященности в тайны жрецов, олицетворением порядка.

Не следует думать, что ограниченная рамками канона и ортогональных проекций древнеегипетская живопись превратилась в безжизненный и бесстрастный чертеж. Напротив, чем жестче рамки канонов, тем большее мастерство требуется художнику, для того чтобы, не выходя за эти рамки, создать истинное произведение искусства. Именно по такому пути и шел древнеегипетский мастер. В качестве примера достаточно привести поразительное по пластике и изысканности рисунка изображение акробатки на кусочке черепка — остраконе.

Остракон с изображением акробатки, делающей мостик. *XII в. до н. э.*

Остраконы — своеобразные «листки из альбома» древнеегипетских рисовальщиков — не несли на себе тяжести канонов и отличались свободой и непосредственностью. Акробатка, безусловно, жемчужина этого жанра.

Но вот чего не было в древнеегипетской живописи, так это глубины пространства. Созданные методом ортогональных проекций образы Древнего Египта были нарочито двумерными, плоскими, и это, казалось, нимало не смущало их авторов. Проблема изображения трехмерного пространства египтянами не ставилась. Их интересовали выделенные из среды и лишенные индиви-



Загрузка египетских кораблей. *Рельеф из храма Хатшепсут. XV в. до н. э.*

дуальных черт абстрактные образы-символы, а не то, как они взаимосвязаны между собой. Предмет, как таковой, подавлял в древнеегипетской живописи пространство, которое по сути и не интересовало художника.

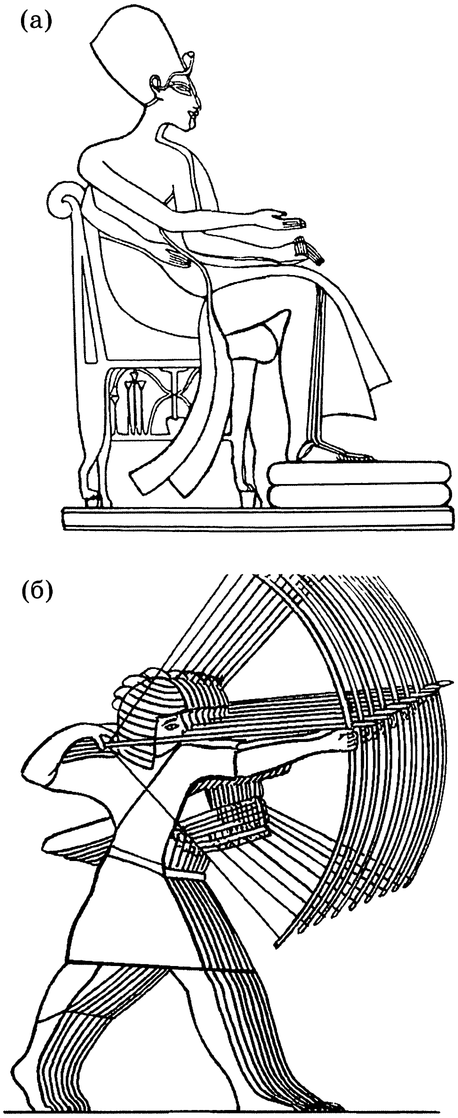
Если же действие и развивалось в древнеегипетской картине, то оно развивалось не в глубину, а параллельно плоскости картины, по строкам. Пример строчной композиции мы находим в первом же приведенном нами рисунке — сцене охоты. Расположенные друг над другом строки следовало понимать как события, происходящие ближе или дальше от наблюдателя, т. е. смещенные по глубине картины. Это опять-таки умозрительный подход к изображаемому миру.

И все-таки, несмотря на хорошо разработанные условные приемы, проблема изображения глубины пространства неизбежно вырастала в древнеегипетской живописи. В ряде случаев художник заслонял одну фигуру другой, показывая тем самым взаимное расположение этих фигур в третьем измерении. Однако такой прием не всегда давал ожидаемые результаты. Например, на изображении фараона Эхнатона и сидящей рядом с ним супруги о существовании последней можно только догадываться по ее правой руке, которая, трепетно обнимая стан фараона, возникает будто бы из ниоткуда, и по ладони левой руки жены фараона, покоящейся в ладони властелина. Конечно, этот рисунок трудно назвать искусством. Это чистая математика, слепое следование методу ортогональных проекций.

Зато на другом рисунке передача глубины пространства древнеегипетскому мастеру явно удалась. Четкий профиль переднего лучника повторен со сдвигом чуть вправо и вверх. В результате возникает острое ощущение глубины пространства, стройная шеренга воинов. Но ведь с точки зрения геометрии живописи мы здесь имеем не что иное, как фронтальную косоугольную аксонометрию!

Таким образом, потребность в изображении пространственных отношений между предметами неизбежно приводит к новой геометрической системе в живописи — аксонометрии. Несмотря на то что отдельные ростки аксонометрии встречались уже в живописи Древнего Египта, свое подлинное развитие эта геометрическая система в живописи получила значительно позже.

Что касается живописи Древнего Египта в целом, то лучшая ее оценка, на наш взгляд, дана Б. Раушенбахом: «Среди искусств, взявших за основу изображение геометрии объективного пространства, древнеегипетское является наиболее цельным и законченным».



К проблеме передачи глубины пространства в древнеегипетской живописи. Фараон Эхнатон с супругой *(а)* и лучники *(б)*.

24.2. «ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ» ЖИВОПИСЬ СРЕДНЕВЕКОВОГО КИТАЯ И ЯПОНИИ

Попытки передать глубину пространства на плоскости картины, согласовать умозрение со зрением, которые мы обнаружили еще в живописи Древнего Египта, привели к образованию новой геометрической системы в живописи — *аксонометрии*, или *параллельной перспективы*. Явные признаки параллельной перспективы, точнее, суммы двух идущих навстречу друг другу параллельных перспектив, легко увидеть в живописи Древней Греции. Такая геометрическая система в живописи, именуемая искусствоведами «рыбья кость», имела ось схода и, безусловно, тяготела к линейной перспективе, хотя так и не переросла в нее. Та же «рыбья кость» имела место и в знаменитых помпейских росписях Древнего Рима, именуемых, впрочем, «запоздалым эхом древнегреческой живописи». Рим пал, не успев, а может, и не сумев развить живописную систему греков, и свое законченное развитие аксонометрия нашла много веков спустя на другом конце земли в живописи средневекового Китая и Японии.

В отличие от средневековой Европы искусство Китая не было сковано путами церковных догматов. Здесь мирно сосуществовали и три религиозно-философских учения: конфуцианство, даосизм и буддизм — и два направления искусства: религиозное и светское. Согласно этим учениям, путь познания истины проходил через отрешение от мирской суеты, растворение и духовное очищение в природе. Именно в природе китайские художники, многие из которых были монахами, искали и находили умиротворяющую гармонию. Природу и ее изображение на картине китайский художник воспринимал как безбрежный океан, как непостижимый космос, в котором растворена созерцающая его личность художника-философа.

Поистине удивительно, как точно этой философии созерцания была найдена соответствующая геометрия живописи! Ведь аксонометрия, как мы знаем, есть центральная проекция с бесконечно удаленным центром проектирования. Таким образом, именно в этой геометрической системе точка зрения художника отодвигалась в бесконечность, художник растворялся в безграничных пространствах природы и бесстрастно взирал на ее мудрое спокойствие. В силу своей геометрии (параллельные линии остаются параллельными) аксонометрия не знает ни угла зрения, ни точек схода, ни линии горизонта. Горизонт как бы все время ускользает от наблюдателя, поднимаясь вверх и растворяясь там. Взгляд из бесконечности, кажется, может и бесконечно простираться за пределы картины. Картина не выглядит ограниченной рамой и будто готова беспредельно разойтись, волшебным образом превратившись в изображенную на ней природу и поглотив своего бесконечно далекого наблюдателя.

Конечно, увидеть параллельную перспективу китайской живописи лучше всего не на примере горного пейзажа, где беспорядочно громоздятся бесформенные скалы, а в бытовых картинах, где упорядоченно стоят оформленные творения рук человеческих, скажем, параллелепипеды домов. Аксонометрия здесь очевидна. Но очевидно

ЛИ ЧЖАО-ДАО (?). Путники в горах. *Фрагмент свитка на шелку. Конец VII — начало VIII в.*

также и то, что и сцены человеческой жизни видятся китайскому художнику очень издалека, «с высоты птичьего полета», откуда трудно различить заботы и тревоги отдельных людей, а видно лишь общее копошение человеческого муравейника.

Аксонометрия, как нам известно, имеет три координаты. Если оси координат выбрать так, чтобы по двум осям иметь фронтальную ортогональную проекцию (без искажения), то по третьей координате обязательно будут искажения. Это фронтальная косоугольная аксонометрия, в которой, как правило, и творили китайские мастера. Поскольку коэффициент искажения по третьей координате неизвестен, то судить о протяженности глубины по первым двум координатам (ширине и высоте) затруднительно, т. е. протяженность по глубине оказывается *неопределенной*. Эта неопределенность глубины в аксонометрии усиливается параллельностью «глубинных» линий, которые не сближаются по мере удаления от наблюдателя. Таким образом, в «параллельной» живописи возникают два противоположных начала: *глубинное* и *плоское*. Картина будто бы имеет глубинное начало, но это просто плоские срезы перемещаются по третьей координате (глубине) без всяких метрических сокращений.

ЧЕН-ТАО. Горный пейзаж. *XVI—XVII вв.*

Китайские живописцы умело пользовались противоречием глубинного и плоского начал. По сути дела аксонометрия явилась своеобразным компромиссом между философией «отдельного», плоского (живопись Древнего Египта) и «целого», глубинного (живопись Возрождения). Плоское начало в китайской живописи сдвинулось в пространство, однако оно еще не стало пространством. Но китайский художник и не ставил целью создать иллюзию пространства, он не рисовал с натуры, он только пристально вглядывался в нее и переосмысливал природу в свою философскую систему. Плоское, «похожее» начало шло от наблюдателя природы, а глубинное, «непохожее» начало, которое никогда не уменьшалось и никогда не достигало предела — линии горизонта, выражало философскую идею бесконечности мира и миросозерцания.

Вообще, диалектика двух противоборствующих начал была стержнем всей древнекитайской философии. Вспомним символы Инь — Янъ, с которых началась эта книга. Живопись Китая, будучи частью его философии, не могла пройти мимо этих двух начал. Янъ для китайского живописца — это светлые, чистые места на картине, это горы, омытые дождями или покрытые чистым снегом, гордо парящие в неприступной вышине. Инь — вместилище темного, тонированного, это темная вода, низина, куда стекаются все нечистоты. Вот почему многие пейзажи выполнены китайскими мастерами в черно-белой технике, в которой они достигли непревзойденного мастерства и проникновения.

Часто говорят о принципиальной асимметрии китайской и японской живописи. У этой асимметрии есть свои геометрические корни: отсутствие линии горизонта и центральной точки схода, а значит, и фиксированного центра композиции приводит к асимметричности всей композиции. Есть и философские предпосылки: человек китайскими философами мыслился частью природы, а не центром мироздания, человек растворялся в природе, а не располагал ее вокруг собственного «я», ставшего центром симметрии в ренессансных композициях.

Но вместе с тем есть в китайской живописи и своя удивительная симметрия. Это не симметрия «левого-правого», а симметрия глубины. Поскольку размеры по глубине в аксонометрии не сокращаются, то дальний план уравновешивает в ней план передний. Дальние горы, подернутые туманом, видны в аксонометрии так же «близко», как и предметы переднего плана. Поэтому у дальних предметов «хватает сил» уравновесить передние. Симметрия «дальнего-близкого» господствует в китайской живописи, придает ей мудрое спокойствие и умиротворение.

Заметим, что аксонометрия является не только условным геометрическим приемом живописи, отвечающим определенной философии. Как показал Б. Раушенбах, аксонометрия является совершенно законным вариантом перцептивной («видимой») перспективы, применимым для изображения очень далеких или очень близких и не слишком протяженных предметов. Первый случай и реализуется в китайских пейзажах. Благодаря второму аксонометрия нашла широкое применение в начертательной геометрии для изображения небольших деталей, приборов и т. п. Одновременно для передачи архитектурного пространства (т. е. не слишком близких и весьма протяженных объектов) в той же начертательной геометрии пользуются ренессансной перспективой.

И в заключение скажем несколько слов о живописи средневековой Японии. Духовная культура этой страны (философия,

ХОКУСАЙ. Водопад Амида. *Цветная ксилография. 1820—1832 гг.*

эстетика, религия) выросла на почве более древней китайской культуры. Также и японское искусство впитало в себя сложившиеся в Китае художественные системы и методы. Отгороженная от всего мира морями, лишь единственный раз, в XIII в., подвергшаяся неудачной попытке завоевания, Япония вплоть до наших дней сохранила свою обособленную и потому своеобычную культуру. Обособленность и характерный для Востока неторопливый темп общественного развития привели к тому, что вплоть до XIX в. в Японии сохранились феодальные отношения.

На протяжении всей своей истории японская живопись, как и вся японская культура, не знала крутых переломов. Творчество Кацусика Хокусая (1760—1849) считается естественным итогом всего долгого пути японского средневекового искусства. Жизнь Хокусая будто повторила историю средневекового искусства Японии: лишь после 50 лет обрел художник собственную манеру и стиль, а свои знаменитые серии «36 видов Фудзи», «Мосты», «Большие цветы», «Путешествие по водопадам» создал уже 70-летним старцем. Эти серии Хокусая — высший взлет творчества мастера, а само творчество Хокусая — вершина в развитии традиционного искусства Японии. Излишне говорить, что геометрической основой японской живописи была параллельная перспектива. Даже Хокусая, творивший в XIX в., через 400 лет после Леонардо да Винчи и Дюрера часто следует правилам параллельной перспективы! Так, на гравюре Хокусая «Водопад Амида», построенной по всем канонам «взгляда из бесконечности», помимо «ускользающего горизонта», видны и три параллелограмма ковров, показанные строго аксонометрически.

Творчество Хокусая явилось не только итогом развития искусства средневековой Японии, но и высочайшей вершиной геометрии параллельных в живописи.

24.3. ЛИНЕЙНАЯ ПЕРСПЕКТИВА ВОЗРОЖДЕНИЯ

Ветер Возрождения распахнул пыльные окна мастерских средневековых художников и впервые заставил их посмотреть на изумительный вид, открывающийся из окна.

Из дряхлой Византии в жизнь — весна
Вошла, напомнив о любви, о теле;
В своих созданьях Винчи, Рафаэли
Блеск бытия исчерпали до дна.

(В. Брюсов)

Вера в идеалы гуманизма, в могущество человеческого разума, основанного не на проповедях теологов, а на непосредственном опыте, будоражила воображение и придавала силы разбуженным умам Возрождения. Новое мышление пришло и в живопись. В условиях ломки старых канонов, в условиях торжества эмпирического знания язык живописи также должен был опираться на непосредственный зрительный опыт человека. Таким геометрическим языком живописи стала перспектива.

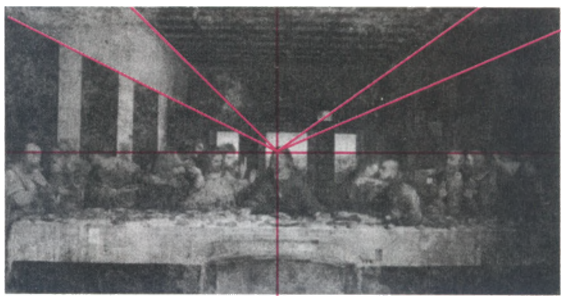
Несмотря на то что ростки нового языка живописи встречались еще в античности: это и попытки Анаксагора дать научное обоснование написанию театральных декораций, и «пирамида зрения» в «Оптике» Евклида, и стереографические проекции в трудах Птоломея, — заговорить на новом языке живопись смогла только с утверждением новой философии Ренессанса.

Построенная на законах геометрической оптики, нашедшая в картине мысленный разрез видимого мира перспектива оказалась лучшим из известных приемов передачи видимого, перцептивного пространства. Таким образом, перспектива знаменовала окончательную победу зрения над умозрением в живописи. Перспектива противопоставила два подхода к искусству: следование традиции и следование природе — и однозначно выбрала второй путь.

Однако перспектива была не только плодом наблюдения, но и геометрического расчета, не только субъектом искусства, но и объектом науки. В перспективе слились воедино две характернейшие черты ренессансной культуры — эмпиризм и рационализм.

Считая зрение высшей формой знания, а себя — «учеником опыта», гений Высокого Возрождения Леонардо да Винчи подразделял учение о перспективе на три части: «Первая из них содержит только очертания тела; вторая — об уменьшении (ослаблении) цветов на различных расстояниях; третья — об утрате отчетливости тел на разных расстояниях». «Геометрическую часть» учения о перспективе, которая давала универсальный способ построения на плоскости картины окружающего пространства с помощью прямых линий — линии горизонта, линий схода и т. п.,— стали называть *линейной перспективой*. «Живописная часть» учения о передаче глубины пространства живописными средствами была названа *воздушной перспективой*.

В главе 22 мы достаточно подробно познакомились с геометрическими основами перспективы, т. е. с линейной перспективой. Теперь нам остается лишь коротко рассказать о том, как новый язык



ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ. Тайная вечеря.
Фреска. 1495—1497 гг.
Внизу — перспективный анализ «Тайной вечери».
Через 500 лет Сальвадор Дали в своей «Тайной вечере» повторит зеркальную симметрию композиции Леонардо, но сместит главную точку картины с глаза Христа на уста Спасителя, ибо для Дали окном души в мир станет не леонардово зрение, а демокритово умозрение.

живописи помогал художнику по-новому организовать живописное произведение. Линия горизонта и главная точка картины (см. с. 280) стали важнейшим инструментом в руках художника-перспективиста, скрытыми пружинами механизма построения композиции. Главная точка картины стала и главной точкой композиции, ее смысловым центром, а образы параллельных линий, сходящиеся к главной точке, будто путеводные нити, приводили зрителя к этому центру. Композиция картины стала строго симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через главную точку картины.

Вот перед нами знаменитая «Тайная вечеря» Леонардо да Винчи — фреска в трапезной церкви Санта-Мария делла Грация в Милане. Все, что написал Леонардо раньше, о чем думал в тиши своих уединений, получило завершение в этой вершине его творчества. В «Тайной вечере», написанной на излюбленный евангельский мотив, все, кроме сюжета, было ново: от новых композиционных формул до новых живописных приемов и техники[1].

Композиция картины математически строга и проста. В центре ее, на фоне светлого пятна окна, расположена фигура Хрис-

[1] Последнее новшество оказалось роковым. Фреска была написана не по сырой штукатурке растворенными в воде красками, как это делалось всегда, а масляными красками. С годами влага, выделяемая стеной, разрушила масляный слой, который стал сворачиваться в виде цветных лепестков разного размера.

та. Главная точка картины, куда ведут образы параллельных линий стен и потолка, приходится на правый глаз Христа, который в наклоне головы расположен чуть выше и ближе к зрителю. Таким образом, геометрический центр картины и ее смысловой центр строго совпадают, а лучи, сходящиеся в главной точке, еще более нацеливают зрителя в этот центр. Впрочем, порой кажется наоборот: будто из центра картины, из глаз Христа, расходятся во все стороны эти лучи, словно потоки мысли.

Двенадцать апостолов расположены вокруг своего учителя четырьмя группами: по две группы с каждой стороны от него и по три человека в каждой группе. Две ближние к Христу группы компактны и более динамичны: они словно вписаны в два треугольника, обрамляющих треугольник центральной фигуры. Две крайние группы показаны более спокойно и широко: они образуют статичные фигуры — четырехугольники. Наконец, две крайние фигуры, завершающие композицию, нарисованы в профиль и прямо: они как бы останавливают волны движения, идущие от центра к краям. Вся композиция строго симметрична и строго уравновешена относительно вертикальной оси, проходящей через ее главную точку.

Такова геометрия «Тайной вечери». Она очень проста и крайне строга, что наполняет фреску сдержанной внутренней динамикой. «Тайная вечеря» — это и наука, и искусство, которые для Леонардо были слиты в живописи воедино.

Наука и искусство, словно нити холста, переплетались в полотнах мастеров Воз-

РАФАЭЛЬ. Обручение Марии. *1504 г.*
Справа дан математический анализ «Обручения Марии».
Рафаэль обладал удивительным даром композиции. Мастерство, с которым он соединял элементы композиции в единое художественное целое, архитектоника его живописных произведений, острое чувство симметрии, пропорции, золотого сечения, ритма — все эти качества рафаэлевского гения не имеют себе равных.

рождения. Живопись переходила в начертательную геометрию, а геометрия — в искусство. Пространство картины было не только симметрично, но и метрично. Всякий раз художник старался не просто показать глубину пространства картины, но как бы вычислить эту глубину. Вот почему ренессансные художники так любили изображать квадраты плиток пола и кессоны (квадратные углубления) потолка, представляющие собой не что иное, как систему координат на плоскости «ширина-глубина», анфилады комнат, ряды колонн или ковров (в «Тайной вечере»). Вот почему живописцы Возрождения так любили изображать архитектуру, которая органически перерастала в архитектонику изображения.

Все перечисленные приемы нетрудно найти в творчестве любого ренессансного мастера. Вот, к примеру, картина Рафаэля «Обручение Марии». Та же вертикальная симметрия композиции, те же квадраты плит пола, тот же архитектурный пейзаж, та же гармония частей и целого. Добавим к этому, что линия горизонта, проходящая через середину дверного проема ротонды, делит вертикаль картины точно в отношении золотого сечения. Таким образом, картина Рафаэля — не только результат вдохновенного порыва художника, но и плод его скрупулезных геометрических построений.

Вернемся еще раз к «Меланхолии» Дюрера (см. с. 46) и посмотрим теперь на нее взором, умудренным знанием теории перспективы. Помимо высочайших художественных достоинств этот шедевр великого мастера Возрождения является и своеобразным учебником по перспективе, учебником геометрии живописи. В самом деле, на гравюре решена сложная геометрическая задача построения перспективы додекаэдра, решению которой много сил отдал Пьеро делла Франческа. Рядом показана перспектива круглого жернова, который изображается в виде эллипса. Перекладины лестницы параллельны линии горизонта, поскольку лестница прислонена к плоскости, параллельной плоскости картины. А вот и чистая математика «Меланхолии»: в правом верхнем углу гравюры изображен магический квадрат — квадрат, составленный из первых чисел натурального ряда, сумма которых по любой строке, столбцу или диагонали одна и та же. Любопытно, что из 880 магических квадратов размером 4×4 выбран тот, у которого средние числа в последней строке изображают 1514 — год создания гравюры. Заметим, наконец, что шар на гравюре изображен в виде шара, хотя по правилам перспективы его следовало бы изобразить в виде эллипсоида. Здесь проявляют себя закономерности работы не только глаза, но и мозга при восприятии формы (законы «константности формы»), которые стали известны только в XX в. (см. с. 313), но которые и в начале XVI в. угадывались гением Дюрера.

Итак, вместе с новой геометрией в живопись Возрождения пришло и новое художественное мышление. Ренессансная перспектива — это революция в искусстве. Это окно, распахнутое в окружающий человека мир. Как пишет Л. Мочалов в книге «Пространство мира и пространство картины», «перед европейскими художниками как бы открылось богатейшее «месторождение», новая золотоносная жила, которую они разрабатывали во множестве ее ответвлений почти на протяжении пятисот лет».

В живописи Высокого Возрождения XVI в. нашел отражение пробуждающийся интерес к науке, который вскоре, в XVII веке, привел к рождению нового естествознания в трудах Галилея, Ньютона и Лейбница.

На протяжении почти 500 лет линейная перспектива считалась непререкаемым авторитетом в живописи. Такой «рекламе» линейная перспектива была обязана прежде всего математике. Именно благодаря тому что линейная перспектива основана на строгих единых геометрических правилах, она и казалась *единственно* возможной, *единственно* правильной и непогрешимой.

Но существовала и другая система перспективы, не столь громкая, не так хорошо научно разработанная и далеко не единодушно признанная. Однако право на жизнь этой системы перспективы отнюдь не должно перечеркиваться лишь фактом существования ренессансной системы перспективы. Об этой системе, которую до недавнего времени чаще всего называли «неправильной» или даже «извращенной», и пойдет речь далее.

24.4. ОБРАТНАЯ ПЕРСПЕКТИВА ЖИВОПИСИ ДРЕВНЕЙ РУСИ

У древнерусской живописи трагическая судьба. Дело в том, что олифа, которой для лучшей сохранности покрывали живопись, со временем темнела и по прошествии ста лет превращалась в черную непроницаемую пелену. Такие «черные доски» ждало два исхода: либо от них избавлялись — пускали плыть по реке, сжигали, выносили на чердаки и колокольни, либо их «подновляли» — звали новых иконописцев, и они по едва просвечивающим контурам, а более по собственному наитию и разумению заново писали. В любом случае старая живопись безвозвратно уходила.

Так было до конца прошлого века, когда кто-то как-то случайно под одним черным слоем обнаружил другой, потом третий и даже четвертый и пятый, пока вдруг из глубины веков не вспыхнули на иконе пронзительно-звонкие древние краски. Это было потрясающее открытие, вызволившее из небытия целую эпоху в культуре русского народа. Появились первые крупные коллекционеры: И. С. Остроухов, Н. П. Лихачев, А. В. Морозов, С. П. Рябушинский, В. М. Васнецов...

Об этом счастливом для древнерусской живописи времени вспоминает живописец и искусствовед, действительный член Академии наук и Академии художеств И. Э. Грабарь (1871—1960): «По северу разъезжали офени (бродячие торговцы.—

АНДРЕЙ РУБЛЕВ.
Троица.
Икона из Троицкого собора Троице-Сергиева монастыря. Ок. 1420 г.

«Нас умиляет, поражает и почти обжигает в произведении Рублева вовсе не сюжет, не число «три» ... а то, что он воистину передал нам узренное им откровение. Среди мятущихся обстоятельств времени, среди раздоров, междоусобных распрей, всеобщего одичания и татарских набегов, среди этого глубокого безмирия, растлившего Русь, открылся духовному взору бесконечный, невозмутимый, нерушимый мир, «свышний мир» горнего мира... Вот этот-то неизъяснимый мир... эту ничему в мире не равную лазурь — более небесную, чем само земное небо, да, эту воистину пренебесную лазурь, несказанную мечту протосковавшего о ней Лермонтова, эту невыразимую грацию взаимных склонений, эту премирную тишину безглагольности, эту бесконечную друг перед другом покорность — мы считаем творческим содержанием Троицы».

П. Флоренский

А. В.), выменивая у попов и церковных старост старые иконы на новые «благолепные». Древние иконы обыкновенно валялись на колокольнях и в рухлядных, выброшенные туда за ветхостью... Офени привозили иконы возами во Мстеру, где их поджидали перекупщики-иконники, а иногда и прямо в Москву, также к перекупщикам...» Но чудом открытая древнерусская живопись чуть было вновь не погибла в руках воинствующих иконоборцев.

Однако вместе с радостью древнерусская живопись преподнесла и немало загадок, в том числе и загадок чисто геометрических. Воспитанные на ренессансной перспективе искусствоведы поспешили назвать ее «неправильной», «наивной», «примитивной». Это было продолжение трагедии живописи Древней Руси.

Вот, к примеру, прославленная «Троица» Андрея Рублева — шедевр древнерусской живописи. Сотни статей написаны об этом совершенном творении великого мастера, о его величавом и мудром спокойствии, о его нежных красках, созвучных краскам русской природы: цвету поспевающей ржи и цветущего льна. Однако вопрос о геометрии пространства иконы либо обходят молчанием, либо глубокомысленно называют его «абстрактным пространством» или «пространством сердца».

А вопрос этот и в самом деле не простой! Приглядимся внимательнее. Подножие правого ангела на иконе показано в аксонометрии, в то время как подножие левого — в слабой обратной перспективе. Но даже если бы и левое подножие было дано в аксонометрии, то легко видеть, что показаны они с разных точек зрения: на правого ангела мы смотрим слева, а на левого — справа. Далее нетрудно обнаружить, что край правого табурета не параллелен соответствующему краю правого подножия, а край левого табурета и края левого подножия не имеют общей точки схода. Следовательно, ни аксонометрия правой части иконы, ни обратная перспектива левой части строго не выдержаны. Наконец, легко представить, как ведут себя края стола, закрытые коленями ангелов. Следуя логике построения левой и правой частей иконы, им ничего не остается, как расходиться.

Но может быть, все эти геометрические несоответствия есть исключения из правил, причуды гения? Отнюдь. Даже беглого знакомства с древнерусской живописью достаточно, чтобы убедиться в обратном: это система, названная системой обратной перспективы. Обратимся еще к двум примерам.

Рассмотрим икону Дионисия «Митрополит Алексий в житии». Обрамляющие фигуру митрополита картинки-клейма повествуют о жизни (житии) Алексия. Нетрудно заметить, что гроб, изображенный на нижних клеймах, дан в сильной обратной перспективе. В среднем нижнем клейме в обратной перспективе показан стол. Строения в правом (или левом) нижнем клейме показаны в аксонометрии, но с двух точек зрения: правые — при виде слева, а левые — справа. Наконец, прямоугольный параллелепипед Евангелия, которое держит Алексий, также показан в сильной обратной перспективе: обрезы параллельных торцовых ребер Евангелия на иконе расходятся и его задняя обложка получается больше передней.

ДИОНИСИЙ. Митрополит Алексий в житии.
Икона из Успенского собора Московского Кремля. Начало XVI в.

И в качестве последнего примера возьмем византийскую икону XII в. «Григорий Чудотворец», на которой мы также видим параллелепипед Евангелия в сильной обратной перспективе. Последний пример взят нами не случайно. Известно, что искусство Древней Руси уходит своими корнями в искусство Византии. Следовательно, истоки обратной перспективы лежат в византийской живописи, что очевидно из сравнения последних двух икон и времени их создания. Таким образом, обратная перспектива, будучи внешне полным антиподом перспективы прямой, была тем не менее непосредственной предшественницей системы прямой перспективы.

Но как объяснить появление в Византии столь странной системы? Ведь обратная перспектива явно выпадает из общего направления развития геометрии живописи (ортогональные проекции — параллельная перспектива — прямая перспектива), идущего от изображения реального пространства к изображению пространства видимого. Прежде всего заметим, что ни византийские, ни древнерусские живописцы никогда строго не выдерживали системы обратной перспективы. Применяя формулу «как мера и красота скажет» к обратной перспективе, древнерусский мастер явно отдавал предпочтение второму слагаемому. Иное дело — мастер Возрождения, который свято соблюдал правила «меры» линейной перспективы[1]. Такая геометрическая непоследовательность древнерусского мастера во многом способствовала несерьезному отношению к самой системе обратной перспективы. Как это часто бывает с непонятными явлениями, от нее спешили отмахнуться, спешили назвать ее «ошибочной» или «ложной».

Конечно, понять противоречивую геометрию изображения трудно. Л. Мочалов, пытающийся понять обратную перспективу, пишет: «Если бы мы попробовали вступить в мир иконы, построенный по законам обратной перспективы, то ежеминутно рисковали бы поломать себе ноги...» Здесь автор не совсем точен: если бы мир обратной перспективы на иконе был последовательно выдержан, то, двигаясь по законам этого мира, мы смогли бы безбоязненно в нем перемещаться. Но в том-то и беда, что в геометрии обратной перспективы было допущено много ошибок, что и дало повод поспешно назвать всю систему обратной перспективы «ошибочной».

ГРИГОРИЙ ЧУДОТВОРЕЦ.
Византийская икона. XII в.

А понять обратную перспективу, конечно, можно. Пожалуй, первой из таких попыток была замечательная работа математика, физика, искусствоведа, писателя и философа П. А. Флоренского (1882—1937?) «Обратная перспектива», написанная в 1919 г., но увидевшая свет лишь полвека спустя. Главной задачей автора было сломать укоренившееся убеждение в том, что линейная перспектива является единствен-

[1] Конечно, исключения из правил были и здесь. Так, «Афинская школа» Рафаэля написана с двух точек зрения, а в картине Веронезе «Брак в Кане», одном из самых больших полотен в истории мировой живописи (666×990 см), специалисты насчитывают семь точек зрения и пять линий горизонта.

но возможной и непогрешимой. В полемическом задоре, сравнивая две системы перспективы — обратную и прямую, Флоренский[1], пожалуй, увлекается, называя первую систему «созерцательно-творческой», а вторую «хищнически-механической». Но Флоренский прав в том, что две системы перспективы — обратная и прямая — это «два отношения к жизни — внутреннее и внешнее... два типа культуры».

И все-таки, как объяснить обратную перспективу? Чем вызвано расхождение параллельных линий в обратной перспективе? Есть два подхода к этому вопросу. В первом корни обратной перспективы ищутся в идейных задачах, которые она решала. Икона призвана была убедить верующего в реальности ирреального, она должна была «отстранить» молящегося от грешной земли. Поэтому, как считают сторонники философско-богословских взглядов на истоки обратной перспективы, изображение на иконе не должно было в точности походить на видимый человеком мир. Икона должна была походить и не походить на видимый мир. Именно так она и могла заставить верующего поверить в чудо, которое также есть одновременно реальное и сверхъестественное. Мир иконы не мог быть отображением мира реального; поэтому и появляются расходящиеся параллели обратной перспективы, которые дают некую «потустороннюю», «сверхъестественную» точку зрения на мир, некий отстраненный «взгляд изнутри». Заметим, что геометрически теория «взгляда изнутри» оправдана, в чем мы убедились на с. 283. Но, несмотря на верные частности, в целом, конечно, все эти объяснения слишком неясные.

[1] Имя Павла Александровича Флоренского и его энциклопедическое наследие лишь сегодня возвращаются к нам. Окончив физико-математический факультет Московского университета и Московскую духовную академию, Флоренский в своих работах значительное внимание уделял философии культуры, взаимосвязи материального и духовного, целостному мировосприятию. Усилиями Флоренского были сохранены сокровища Троице-Сергиевой лавры, ставшие основой ныне всемирно известного музея-заповедника. В 1933 г. Флоренский был репрессирован, сослан в Соловецкий лагерь, в 1937 г. вторично осужден, и дальнейшие сведения о его жизни неизвестны.

М. НЕСТЕРОВ. Философы. *1917 г.*
Портрет П. А. Флоренского (слева) и С. Н. Булгакова. Спокойствие летнего вечера подчеркивает в картине напряженную работу ума двух мыслителей. Явно укрупненный задний план картины, возможно, является данью Нестерова канонам обратной перспективы, столь горячо почитаемым Флоренским. Год создания портрета стал роковым в судьбах обоих философов: очень скоро первый был сослан в лагеря, второй — «философским пароходом» выслан из России. Счастье, что сегодня своими многотомными сочинениями оба философа возвращаются на Родину.

Другая точка зрения на истоки обратной перспективы основана на чистом естествознании и прежде всего на закономерностях зрительного восприятия. Когда в 1966 г. Б. В. Раушенбах впервые попал в Музей древнерусского искусства имени Андрея Рублева, его поразил необычный мир иконы. Но в то же время и покоробили слова экскурсовода, щедро раздававшей древнерусским живописцам ярлыки: «не умели», «не знали», «не смогли». И это мудрые, образованнейшие мастера, чьи произведения и имена пережили столетия?! Раушенбах не спешил назвать их «простодушными и наивными» (см. эпиграф к гл. 9). Он задумался...

20 лет спустя появилась на свет общая теория перспективы, в которой древнерусская обратная перспектива заняла свое достойное место.

25.

АКАДЕМИК РАУШЕНБАХ: КОСМОНАВТИКА — ИКОНОГРАФИЯ — ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПЕРСПЕКТИВЫ

Дело не в том, чтобы научиться рисовать, а в том, чтобы научиться мыслить.

СТЕНДАЛЬ

12 апреля 1961 года. Впервые в истории человечества космический корабль — спутник «Восток» с первым в мире космонавтом на борту Юрием Гагариным за 1 час 48 минут облетел земной шар и благополучно вернулся на Землю. Вслед за тем волны восхищения прокатились по Земле. Земной шар буквально содрогался от этих волн: «Первый полет человека в космос», «Утро космической эры», «Первый гражданин Вселенной», — сообщали газеты, радио, телевидение...

В это же время видавший виды самолет ИЛ-14 спешил с космодрома Байконур к месту приземления космонавта. Никто не знал об этом рейсе ИЛ-14, как никто не знал и имен летевших пассажиров: академиков, профессоров и сверхзасекреченных конструкторов. Был среди них и ведущий специалист в области управления и ориентации космических аппаратов, доктор технических наук, профессор, впоследствии действительный член Академии наук и Международной академии астронавтики Борис Викторович Раушенбах. На борту «Востока» стояли три дублирующие друг друга системы ориентации, два комплекта органов управления и аппарат ручного управления. Все системы, созданные под руководством Б. В. Раушенбаха, сработали нормально, и их творец был счастлив.

Как управлять ракетой в полете? Как сделать ее полет устойчивым и целенаправленным? Эти вопросы стали актуальными в 30-е годы. Ракеты уже взлетали: и наши, и немецкие «Фау», но в воздухе они вытворяли безумные пируэты, ежесекундно грозя превратиться в чудовищный бумеранг. Не было ни теории управления, ни самих средств управления. После войны круг вопросов расширился: а как управлять спутником в космосе, в невесомости, где нет ни внешней среды, ни точки опоры? Как сориентировать космический аппарат в данном направлении? Ведь, летя по инерции, он кувыркался во всех мыслимых направлениях! Впереди снова открывалось белое поле нерешенных проблем.

Вот этим проблемам Б. В. Раушенбах посвятил свою жизнь, пройдя путь от инженера до академика. С новыми полетами в космос появлялись и новые системы, и новые проблемы. Если первые три спутника еще не имели системы ориентации и кувыркались в полете, как слепые котята, то ровно через два года после запуска первого спутника, 4 октября 1959 г., на межпланетной автоматической станции «Луна-3» была блестяще решена задача управления ориентацией станции. «Луна-3», как известно, облетела Луну, сфотографировала ее с обратной стороны и передала изображение на Землю. Так человечество впервые увидело загадочную обратную сторону своего спутника. Потом были «Венеры» и «Марсы», «Востоки» и «Восходы», «Молнии» и «Горизонты», «Союзы» и «Салюты». И с каждой новой станцией, новым кораблем вырастали все новые и новые проблемы.

Работа над проблемой стыковки космических кораблей «Союз» пробудила интерес

Б. В. Раушенбаха к... живописи. Откуда такие неожиданные параллели? Дело в том, что на корабле «Союз» нет переднего иллюминатора (на его месте расположен стыковочный узел). Поэтому для наблюдения во время стыковки за другим кораблем установлены специальные оптические приборы типа перископов и телекамер, которые, как известно, дают изображение по законам геометрической оптики, т. е. в линейной перспективе. Но вот тут-то и возникает вопрос: а можно ли доверять этим изображениям? Насколько точно они передают ощущение пространства, видимого непосредственно глазом? Насколько перспектива оптическая, линейная, отличается от перспективы видимой, перцептивной? Ведь стыковка двух кораблей, происходящая на первой космической скорости, требует фантастической точности!

Посещение музея Рублева стало последней каплей в чашу «перспективных» вопросов: у Раушенбаха появилось новое увлечение — геометрия живописи.

Мы уже упоминали о существовании двух геометрических пространств: реальном и перцептивном. Перцептивное пространство возникает в нашем сознании в результате совместной работы глаза и мозга. На первом этапе на сетчатке глаза возникает изображение реального пространства, которое подчиняется законам геометрической оптики, т. е. линейной перспективы. На втором — это изображение преобразуется в нашем сознании в результате деятельности мозга. Таким образом, линейная (ренессансная) перспектива учитывает только работу глаза, но не учитывает работу мозга. Вот где корни излишней «фотографичности» ренессансных полотен.

Какие же коррективы вносит мозг в сетчаточное (линейно-перспективное) изображение? Во-первых, заметим, что в линейно-перспективном изображении близкие предметы выходят чрезмерно большими, а далекие — слишком маленькими. Если бы такое изображение непосредственно передавалось в мозг, то, как отмечает Раушенбах, «человек мог бы испугаться близко сидящего котенка и остаться равнодушным к показавшемуся тигру». Поэтому сетчаточный образ в мозгу корректируется с учетом других признаков глубины пространства (таких, как заслонение близкими предметами далеких, «воздушная» перспектива, бинокулярные признаки). Корректировке подвергаются прежде всего сетчаточные образы малоудаленных предметов как наиболее необходимых в жизнедеятельности человека. В результате образы близких предметов становятся более похожими на их реальные прообразы, воспринимаемая величина близких предметов остается почти неизменной (константной), откуда и проистекает название этого корректирующего механизма работы мозга — *механизм константности величины*.

Другим важнейшим механизмом работы мозга, преобразующим сетчаточный образ, является *механизм константности формы*. Суть этого механизма заключается в том, что на сравнительно малых расстояниях знакомые человеку формы кажутся ему почти такими, какими они являются реально, а не такими, каковыми они изображаются на сетчатке глаза. Поясним сказанное примером. Известно, что в линейной перспективе (т. е. на сетчатке глаза) круг или квадрат, если смотреть на них под углом, изображаются как эллипс или трапеция. Однако если человек заранее знает истинную форму рассматриваемых предметов, то они кажутся ему более близкими к их реальной форме: эллипс видится «более круглым», а трапеция — «более квадратной». В этом и состоит суть механизма константности формы. Вот почему, интуитивно осознавая действие механизма константности формы, даже такие последовательные перспективисты, как Дюрер или Рафаэль, никогда не изображали шар в виде эллипсоида, а всегда в виде шара. Мы видим точный шар в левом нижнем углу «Меланхолии» Дюрера, ибо его перспективное изображение в виде эллипсоида выглядело бы неузнаваемо уродливым. Так же и в правом нижнем углу «Афинской школы» Рафаэля небесная и земная сферы в руках Зороастра и Птолемея изображены точными шарами.

Итак, перцептивное изображение, корректирующее линейный (сетчаточный) образ, существенно отличается от последнего. Это отличие сказывается прежде всего в увеличенных размерах удаленных предметов (например, цепи гор на горизонте), повышенной линии горизонта, сохранении метрических свойств ближних предметов.

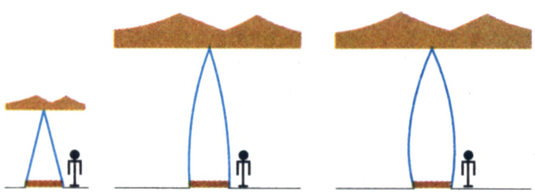
Последнее особенно важно для живописи: параллельные линии переднего плана в перцептивной перспективе выглядят параллельными. Более того, бинокулярность зрения может привести к тому, что параллельные линии переднего плана покажутся слегка расходящимися. Но ведь это же есть обратная перспектива!

К сожалению, вопрос об истоках обратной перспективы не решается так просто. К нему мы еще вернемся. А пока резюмируем сказанное рисунками, заимствованными нами из книги Б. В. Раушенбаха «Пространственные построения в древнерусской живописи». На рисунке сравниваются линейная (*а*) и перцептивная (*б*, *в*) перспективы. Предполагается, что основание картины совпадает с горизонтальной поверхностью земли и, следовательно (как и на рис., с. 282), ширина дороги в основании картины (жирная линия) является ее истинной шириной. Характерные особенности каждой перспективы очевидны из рисунка.

Проводя математический анализ представленных перспективных изображений (для нас этот «анализ» сведется к сравнению всех трех рисунков), Раушенбах приходит к следующему выводу:

1) для среднего плана картинного пространства перцептивная перспектива практически совпадает с *линейной*: дальний план линейная перспектива преуменьшает;

2) для очень близкого и не слишком протяженного плана (т. е. оставаясь в области константности величины) или для очень далекого и не слишком большого объекта (т. е. для объекта с малыми угловыми размерами, для которого схождение параллельных пренебрежимо мало) перцептивная перспектива практически совпадает с *аксонометрией*;



Изображение дороги и цепи гор на горизонте в линейной перспективе *(а)*, перцептивной монокулярной *(б)* и бинокулярной *(в)* перспективе. Рисунок Б. В. Раушенбаха.

3) при бинокулярном зрении возможен эффект «сверхконстантности» величины, когда для очень близкого и не слишком протяженного плана перцептивная перспектива, обычно совпадающая с аксонометрией, может принять вид обратной перспективы.

Таким образом, все известные в живописи перспективные системы: параллельная, прямая и обратная — оказываются соответствующими частными случаями перспективы перцептивной.

Таковы современные психофизиологические представления о механизме зрения, с которых Раушенбах подошел к геометрическим загадкам древнерусской иконографии. Раушенбах исходил из естественного предположения о том, что древнерусский художник изображал мир таким, каким он его видел, т. е. в перцептивной перспективе. В самом деле, сам уровень развития средневековой науки и искусства говорит о том, что древнерусский художник не мог, подобно художнику ренессансному, пользоваться научно разработанной системой перспективы, а творил по наитию, т. е. как видел.

От того, как творил древнерусский мастер, перейдем к тому, что он творил. Слово «икона» в переводе с греческого означает образ, изображение. В центре внимания иконы было изображение Христа, Богоматери, святых и сцен из их жизни. Следовательно, в иконе господствовал «портрет», ближний план, и практически не было пейзажа, плана дальнего. Но согласно второму выводу перцептивная перспектива ближнего, не слишком протяженного плана практически совпадает с аксонометрией.

Так Раушенбах приходит к теоретическому выводу о том, что *перспективной основой древнерусской живописи является аксонометрия*. Перспективная основа — это еще не система перспективы, а только некоторое приближение к ней, приближение, допускающее разного рода отклонения. Этот вывод подтверждается анализом древнерусской живописи. Например, мы знаем, что подножие правого ангела в «Троице» Рублева дано в аксонометрии, а в изображении левого подножия допущено отклонение в сторону обратной перспективы. Более яркой иллюстрацией к сказанному является новгородская икона «Введение во храм», в которой аксонометрическая

ВВЕДЕНИЕ ВО ХРАМ. *Новгородская икона. XV в.*

основа живописи очевидна. Но и здесь также хорошо видно, что древнерусский иконописец не был педантом от аксонометрии и легко допускал отклонения как в сторону прямой, так и в сторону обратной перспективы.

И все-таки отклонения в сторону обратной перспективы в древнерусской живописи преобладали. Чем же они были вызваны? На этот трудный вопрос нет однозначного ответа. Б. В. Раушенбах называет пять причин появления обратной перспективы:

1. Действие механизма константности формы. Мы знаем, что благодаря действию этого механизма форма знакомого предмета воспринимается человеком не как ее сетчаточный образ, а более близкой к реальным очертаниям этой формы. А как механизм константности формы «действует» на художника? Чтобы прояснить этот вопрос, Раушенбах рассматривает простой пример изображения параллелепипедов табурета и Евангелия, которые были излюбленными атрибутами древнерусской иконографии. На рисунке *а* показана аксонометрия этих предметов. Однако под действием механизма константности формы художник видит верхнюю крышку табурета (боковые грани книги) более плоско, ближе к их истинной форме, как показано штриховой линией на рисунке *а*. Но тогда сразу возникают трудности.

В случае с табуретом можно показать его ножки, как и раньше, в аксонометрии (рис. *б*). Однако тогда возникает впечатление, будто ножки табурета повисли в воздухе. Отчего это происходит? Дело в том, что механизм константности формы действует лишь на материальные, видимые, предметы, форма которых заранее известна. А мыслимый квадрат, в углах которого ножки касаются пола, есть нечто абстрактное. Механизм константности формы не должен «поднимать» ножки табурета, они остаются на месте, и тогда возникает обратная перспектива табурета (рис. *в*). В такой обратной перспективе изображен табурет левого ангела в «Троице» Рублева. Еще лучше ее видно на миниатюре Дионисия Младшего из Евангелия XVI в.

В случае с Евангелием механизм константности формы приводит к разрыву боковых сторон книги (рис. *б*). Однако даже самый смелый современный художник не позволяет себе допускать разрывы там, где хорошо известно, что изображаемая форма непрерывна. Не мог себе такой вольности позволить и древнерусский иконописец. Поэтому он «склеивает» боковые грани книги некоей средней линией, и в резуль-

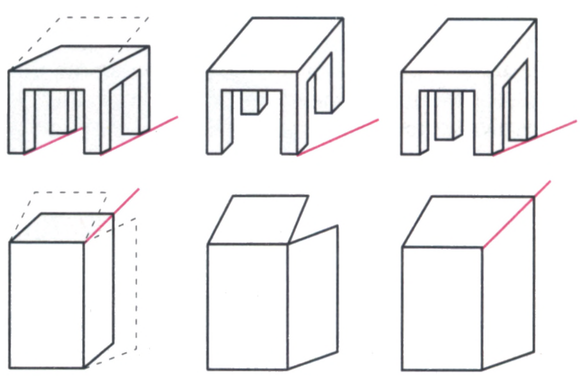


Схема возникновения обратной перспективы (по Б. В. Раушенбаху). Аксонометрическое изображение *(а)*, действие механизма константности формы *(б)*, обратная перспектива *(в)*.

ДИОНИСИЙ Младший.
Миниатюра из Евангелия. *XVI в.*

тате получается обратная перспектива Евангелия (рис. *в*). Такие изображения мы встречали на с. 310.

2. Учет бинокулярности зрения. Сегодня экспериментально установлено, что на небольших расстояниях бинокулярность зрения может привести к эффекту слабой обратной перспективы. Этот факт для нас, с детства воспитанных на линейной перспективе фотоаппарата, кино и телевидения, а также на прямой ренессансной перспективе, кажется парадоксальным. Но факты — вещь упрямая. Более того, существуют способы, позволяющие натренировать свой глаз на обратную перспективу. Такой «обратноперспективный» взгляд имеет, например, Б. В. Раушенбах.

Но тогда становится совершенно понятным и естественным, что древнерусский художник, еще не отягощенный канонами прямой ренессансной перспективы, рисовал ближний план таким, каким он его видел, т. е. в легкой обратной перспективе. В дальнейшем, правда, обратная перспектива часто принимала гипертрофированные формы. Но это можно понять, если учесть, что обратная перспектива стала своеобразным художественным каноном, а древнерусский иконописец никогда не писал с натуры.

Самые же удивительные открытия, касающиеся обратной перспективы, были сделаны в самое последнее время. В 1947 г. немецкий ученый, работавший в США, Р. Лунберг, опираясь на экспериментальные данные, построил математическую теорию, из которой следовало, что для участков горизонтальной плоскости, находящихся в непосредственной близости от наблюдателя, свойства перцептивного пространства могут быть описаны как свойства риманова пространства постоянной отрицательной кривизны, т. е. как свойства пространства Лобачевского. Тогда, согласно геометрии Лобачевского, всякий прямоугольник $ABCD$, у которого AD является ближней к наблюдателю стороной, а BC — дальней, отобразится в перцептивном пространстве в так называемый четырехугольник Ламберта $A'B'C'D'$, стороны которого удовлетворяют неравенству $B'C'>A'D'$. Следовательно, «дальняя» сторона четырехугольника Ламберта $B'C'$ будет больше его «ближней» стороны $A'D'$. Но это же и есть обратная перспектива! Древнерусская икона и геометрия Лобачевского! Поистине нет предела удивительному на перекрестках науки и искусства!

3. Подвижность точки зрения. Как отмечалось в сноске на с. 310, даже мастера Возрождения, свято чтившие правила линейной перспективы, позволяли себе совмещать на одном полотне несколько точек зрения. Это была жертва геометрии в пользу искусства; она усиливала впечатление от картины, полнее раскрывала замыслы художника. Древнерусский иконописец, весьма вольно обращавшийся с геометрией живописи, тем более мог позволить себе не одну точку зрения.

Надо сказать, что подвижность точки зрения, в особенности при передаче ближнего пространства, имеет весьма веские причины. Дело в том, что поле четкого зрения человека невелико. Поэтому при осмотре пространства, особенно близкого, мы часто меняем направление осмотра, а иногда и саму точку зрения. В результате близкое пространство мы воспринимаем как совокупность нескольких перцептивных пространств, а значит, и нескольких локальных аксонометрий.

4. Увеличение информативности картины. Мы знаем, что коммуникативная функция играет важнейшую роль в искусстве. Мы видели также, что стремление к наибольшей информативности картины не останавливало древнеегипетского художника перед явными геометрическими казусами: совмещение двух видов в изображении человека (фигурка жреца на с. 269) или соединение нескольких проекций при передаче пространства (Осирис у пруда, с. 298). Все эти геометрические вольности преследовали единственную цель — увеличение информативности картины. Эти же причины часто приводили древнерусского иконописца к обратной перспективе.

Обратимся еще раз к иконе «Митрополит Алексий в житии». Желая показать на нижних клеймах иконы не только гроб, но и возложенное в него тело, Дионисий приподнимает дальнюю от зрителя стенку гроба, что приводит к сильной обратной перспективе. Также и на миниатюре Дионисия Младшего. Стремясь подробнее показать содержание записи евангелиста, художник искусственно разворачивает его фолиант к зрителю, что опять-таки создает эффект обратной перспективы.

Аналогичных примеров, когда поверхности книг с записями, поверхности столов с яствами и вообще горизонтальные поверхности с расположенными на них предметами «информационно» повернуты к зрителю, в древнерусском искусстве немало. Все эти «информационные развороты» приводят к эффекту обратной перспективы.

5. Композиционные требования. Анализируя геометрические загадки древнерусской живописи, нельзя забывать, что средневековый иконописец был не только и не столько повествователем, стремящимся наиболее правдиво и наиболее информативно поведать о своем предмете, но прежде всего художником. Не только мера — геометрия, но и красота — искусство двигает рукою всякого истинного художника. В попытках наилучшим образом построить композицию картины художник не по геометрическим или информативным, а по чисто художественным причинам мог обратиться к обратной перспективе, которая так или иначе становилась идейно-эстетической системой художественного языка древнерусской живописи.

Таковы основные причины возникновения обратной перспективы в древнерусской живописи, названные Б. В. Раушенбахом.

Именно так часто и воспринимал близкое пространство древнерусский художник: левую часть иконы он показывал с правой точки зрения, а правую — с левой. Так поступил Андрей Рублев в своей «Троице». Так поступали и многие другие безвестные иконописцы. В результате изображение становилось более «объемным»: оно как бы разворачивалось перед зрителем, переводя его взгляд с одной точки зрения на другую.

Однако неизбежной была и плата за такую геометрическую вольность: там, где сходились две аксонометрии — левая и правая, возникала сильная обратная перспектива. Такую перспективу мы видим в изображении престола на иконе «Новоза-

Новозаветная Троица. *Икона. XVI в.*

ветная Троица». Такая же сильная обратная перспектива угадывается в рублевской «Троице». Однако Рублев мудро задрапировал этот геометрический дефект одеждами ангелов, и он явно не бросается в глаза.

Итак, «склейка» левой и правой аксонометрий являлась источником сильной обратной перспективы.

Необходимо отметить многообразие и разнородность источников обратной перспективы, среди которых есть и причины, никак не связанные с геометрией живописи. Тем не менее, действуя в совокупности, они привели к возникновению нового своеобразного стиля, в котором обратная перспектива стала геометрической основой.

Заметим, что обратная перспектива так и не стала единой геометрической системой древнерусской живописи, подобно линейной перспективе в живописи эпохи Возрождения. Но эта геометрическая непоследовательность придает древнерусской живописи удивительную открытость и очарование, мудрое отрешение от мелочной суетности, некую неопределенность и недосказанность, которые так свойственны истинным произведениям искусства.

Расставаясь с древнерусским искусством, вернемся еще раз к его шедевру, к тому, что «недосказал» Рублев и о чем веками продолжают «догадываться» его наследники. Предоставим слово Б. Раушенбаху: «Не изобразив боковых сторон престола, Рублев сознательно оставил поставленный вопрос без ответа. Представляется правдоподобным, что отмечавшаяся всеми исследователями творчества великого русского художника многогранность содержания «Троицы» требовала и «многогранной», т. е. не до конца определенной, геометрии изображения, чтобы эта геометрия «жила» и «изменялась», поворачиваясь то одной, то другой своей гранью, как и вложенные в «Троицу» идеи».

Но на древнерусском искусстве увлечение Раушенбаха живописью, точнее математикой живописи, не закончилось. Не только древние черные доски, но и яркие полотна мастеров XIX и XX вв. таили в себе немало геометрических загадок. В какой перспективе творили Сезанн и Ван Гог, Поленов и Верещагин, Серов и Бенуа? Пока ясно было только одно: отнюдь не в ренессансной. Но тогда в какой? И снова вопросы, вопросы, вопросы.

Из этих вопросов и родилась *общая теория перспективы*. Новая теория учитывала не только законы геометрической оптики, по которым видит глаз, но и закономерности работы мозга при зрительном восприятии. Последние закономерности невозможно выразить на языке геометрии с помощью проектирования прямыми или искривленными лучами зрения, поэтому новая теория перспективы носит аналитический характер.

Переход к аналитическим методам математического описания вообще отражает процесс более глубокого проникновения математики в ту или иную область знания. В данном случае этот переход означает качественно новое математическое описание механизма зрительного восприятия. В отличие от ренессансной системы в общей теории перспективы образ точки трехмерного пространства на картинной плоскости находится не путем геометрических построений, а путем вычислений.

Конечно, геометрические построения для художника более удобны и вряд ли найдется художник, который будет рассчитывать пространство своей картины по сложным формулам общей теории перспективы Раушенбаха. Но теория и создавалась не для этого. Новая теория позволила решить задачу, принципиально недоступную для ренессансной: количественно оценить отклонение полученного изображения от естественного зрительного восприятия и на основании этих количественных оценок дать качественное заключение о характере допускаемых искажений (уточнить, где преобладают ошибки: в передаче масштаба изображения, либо в передаче глубины пространства, либо в подобии изображения). А уже на основании этих качественных оценок можно дать простые и удобные геометрические приемы построения перспективных изображений.

Мы не будем в конце книги утомлять читателя математическими выкладками общей теории перспективы, которые к тому же отнюдь не элементарны и требуют знания дифференциального и интегрального исчисления. Остановимся на выводах и геометрических следствиях, которые вытекают из этой теории.

Общая теория перспективы — это теория перцептивного изображения, в основе которой лежат обсуждавшиеся свойства перцептивного пространства. Системы перспективы, построенные на базе общей теории перспективы, будем называть *научными системами перспективы.* Главный вывод, к которому приходит Б. В. Раушенбах, таков: *не существует идеальной научной системы перспективы. Существует бесчисленное множество равноправных систем перспективы, каждая из которых содержит свои неизбежные ошибки изображения. Все системы отличаются друг от друга тем, на какие элементы изображения смещены эти ошибки, что и может в зависимости от художественных задач служить критерием выбора той или иной системы перспективы.*

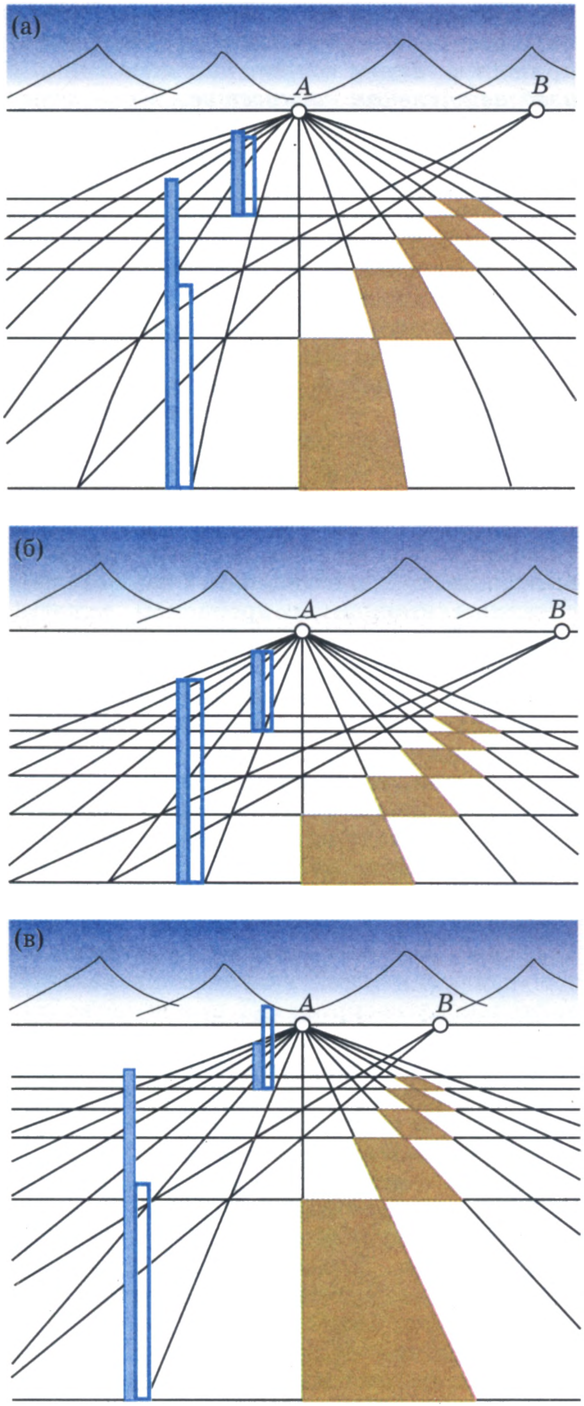
Этот вывод является частным случаем более общего математического факта: невозможно взаимнооднозначно и непрерывно отобразить трехмерное пространство на двумерную плоскость. Хотя на первый взгляд это кажется и странным, но взаимнооднозначное отображение пространства на плоскость возможно. Образно говоря, можно «истолочь» пространство на бесконечно большое число бесконечно малых точек и рассыпать эти точки бесконечно тонким слоем на плоскости. Однако при этом безвозвратно нарушается строение пространства, близкие элементы пространства не перейдут в близкие элементы плоскости, т. е. отображение не будет непрерывным. Разумеется, подобные отображения для изобразительных целей неприемлемы, ибо изобразительное искусство прежде всего интересует именно форма.

Рассмотренные нами способы проецирования пространства на плоскость (ортогональные проекции, аксонометрия, центральные проекции), равно как и научные системы перспективы, являются своеобразным компромиссом между взаимнооднозначностью и непрерывностью отображения пространства на плоскость. Аналогичное противоречие между «содержанием» (взаимнооднозначность) и «формой» (непрерывность) отображения приходится разрешать, например, в картографии при отображении сферы Земли на плоскость карты. Эта задача также не имеет «идеального» решения.

Проанализировав различные варианты научных систем перспективы, Раушенбах пришел к *закону сохранения искажений в изобразительном искусстве.* Суть этого закона, который наиболее ярко проявляется при изображении интерьера, т. е. не слишком протяженного пространства, заключается в том, что *суммарная ошибка при передаче изображения для любой системы перспективы оказывается практически одной и той же.* До обнаружения этого неожиданного факта казалось, что научная система перспективы должна носить абсолютный характер, так как она исходит из объективных законов природы (законов работы глаза и мозга). А оказалось, что научных систем перспективы сколь угодно много и все они с точки зрения математики (по суммарной ошибке искажений) равноценны. Поэтому проблема выбора подходящего варианта научной перспективы становится проблемой *эстетической.* Вот что по этому поводу пишет Раушенбах: «Эстетика «вторглась», казалось бы, в строго математическую область с неожиданной стороны... Именно эстетические соображения отбирают из бесчисленного множества предлагаемых математических вариантов тот, который является наиболее подходящим для решаемой художественной задачи».

«Закон сохранения искажений» еще раз убеждает нас в поразительной мудрости природы. Ведь если бы удалось найти систему перспективы, наиболее адекватную зрительному восприятию, то искусство живописи (по крайней мере, для художника-реалиста) должно было бы остановиться! Художнику не оставалось бы ничего, кроме как честно следовать этой наилучшей системе. И вот математика доказывает, что такой системы попросту нет, и последнее слово вновь остается за искусством! Не менее удивительным является и тот факт, что с аналогичным законом сохранений мы сталкиваемся при выборе музыкального строя (см. гл. 13).

Каковы же они, возможные научные системы перспективы? На рисунке показаны три варианта изображения условного пейзажа, взятые из книги Б. В. Раушенбаха «Системы перспективы в изобразительном искусстве. Общая теория перспективы». Горизонтальная поверхность Земли для



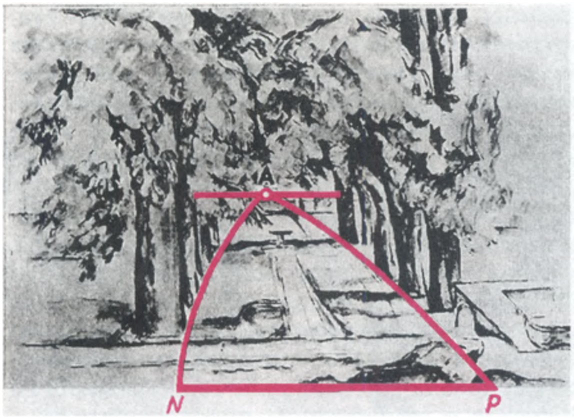
Возможные варианты научной перспективы: *(а)* — правильная передача поверхности земли; *(б)* — правильная передача вертикальных размеров; *(в)* — ренессансная перспектива. Рисунки Б. В. Раушенбаха.

большей наглядности разграфлена прямоугольной координатной сеткой. К цепи гор на горизонте ведет «дорога», проходящая по диагоналям прямоугольников. Вертикальные масштабы, построенные по правилам каждого варианта, показаны черными шестами, а прилегающие к ним белые шесты обозначают вертикальные размеры, соответствующие естественному зрительному восприятию. Все рисунки построены не «от руки», а рассчитаны согласно общей теории перспективы.

Вариант *а* соответствует системе перспективы, безошибочно передающей поверхность Земли (ширину и глубину пространства), а также дальний план (горы). Как видно из сравнения белых и синих шестов, неизбежные ошибки в этой системе смещены на вертикали, причем наибольшие ошибки допускаются при изображении вертикалей переднего плана, а по мере удаления к горизонту эти ошибки убывают. Здесь может возникнуть естественный вопрос: а почему бы в этой системе, правильно передающей горизонтальные размеры, не показывать в соответствии с естественным восприятием и вертикальные линии? Тогда бы эта система стала «идеальной»? Однако такое насильственное вторжение в строение научной системы перспективы обернется тем, что при передаче полного пространства в изображении непрерывных элементов появятся либо разрывы, либо наложения одних элементов на другие. Подобные дефекты недопустимы, и поэтому в данном случае приходится жертвовать вертикалями.

В варианте *б* ошибки в передаче вертикальных размеров исправлены. Более того, в этой системе правильно передается и ширина, а значит, сохраняется подобие фронтальных изображений. Однако какой «ценой» все это достигнуто, очевидно из самого рисунка: на нем крайне невыразительно, ослабленно передана глубина пространства, особенно глубина переднего плана.

Наконец, на рисунке *в* тот же условный пейзаж передан в ренессансной (линейной) системе перспективы. Сравнение этого рисунка с вариантами *а*, *б* выявляет главный недостаток ренессансной системы: сильное преувеличение переднего плана и явное преуменьшение дальних объ-



СЕЗАНН. Каштановая аллея в Жа де Буффан. *1883—1887 гг.*
Перспективный анализ Б. В. Раушенбаха.

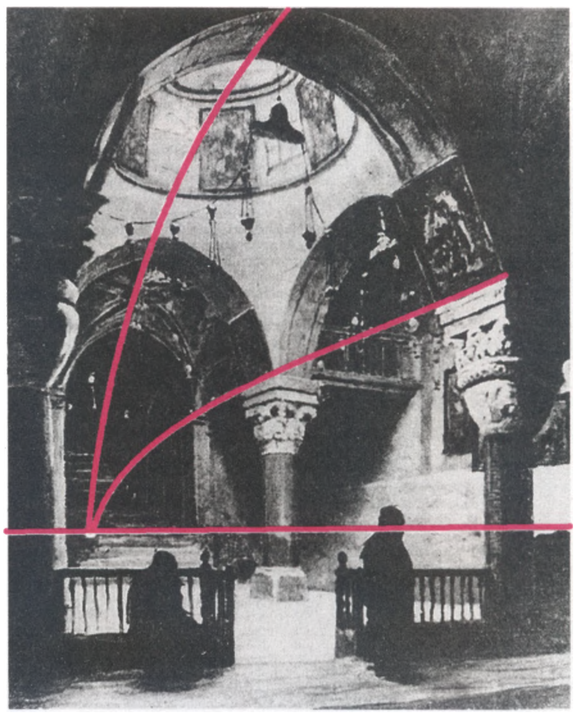
ектов. Этот недостаток ренессансной (а значит, и фотографической) перспективы хорошо знаком альпинистам: запечатлев себя на фоне грандиозной горной панорамы, дома они обнаруживают на пленке жалкую гряду холмов на горизонте. Для среднего плана все ошибки ренессансной перспективы практически равны нулю.

Таким образом, анализ ошибок, неизбежно возникающих в той или иной системе перспективы, позволяет определить границы применимости известных систем перспективы и сделать выводы, которые были приведены на с. 314.

Анализ ошибок при изображении пейзажа (глубокого пространства) показывает, что в любой системе перспективы наибольшим искажениям подвержен именно передний план. Этот «закон наибольших искажений переднего плана» хорошо осознан художниками на практике. Поэтому при изображении пейзажа опытные мастера либо «отсекают» передний план границами картины, либо погружают его в тень.

Обратим внимание на то, что в варианте перспективы, правильно передающем глубину пространства (рис. *а*), образы прямых линий, уходящих к горизонту, становятся криволинейными (см. координатные линии, сходящиеся в точке A, и «дорогу»). Это свойство перспективы, правильно передающей глубину, было интуитивно «нащупано» некоторыми художниками XIX—XX вв., которые стали умело им пользоваться. А вот искусствоведы, подходившие к анализу живописи с позиций ренессансной системы перспективы либо приводившие в качестве аргументов фотографии (но это также линейная перспектива!), продолжали обвинять таких художников в отступлении от «научных» канонов линейной перспективы.

Особенно «не повезло» здесь Полю Сезанну (1839—1906), чьи пейзажи в специальной монографии были тщательно сравнены с соответствующими фотографиями и где были указаны все его «ошибки». Возьмем, к примеру, акварель Сезанна «Каштановая аллея в Жа де Буффан». Эта акварель удобна для перспективного анализа тем, что ряды каштанов в натуре заведомо прямолинейны. Однако на акварели они явно искривлены, что и позволило сделать скоропалительный вывод о том, что Сезанн отступал от натуры. Однако, как показал Раушенбах, криволинейный треугольник ANP в соответствующем масштабе с удивительной точностью вписывается в кри-



В. ПОЛЕНОВ. Церковь Св. Елены. *1882 г.*
Перспективный анализ Б. В. Раушенбаха.

волинейную сетку координат на рисунке *а* (с. 320). Таким образом, именно горизонтальная поверхность Земли (а значит, и ряды каштанов) переданы Сезанном в полном соответствии со зрительным восприятием. Следует отметить, что Сезанн действительно иногда отступал от зрительных ощущений. Так, он часто преувеличивал размеры горы св. Виктории, которую ему хотелось видеть похожей на гималайскую вершину.

Не менее убедительным оказывается и сделанный Раушенбахом перспективный анализ этюда В. Д. Поленова (1844—1927) «Церковь Св. Елены». Этот этюд был написан Поленовым в 1882 г. во время путешествия по Ближнему Востоку. В ренессансной системе перспективы (или на фотографии) образы параллельных линий равной высоты, проходящих по карнизам колонн и через середины (верхние точки) трех арок, должны быть прямолинейными. Как видно из иллюстрации, эти линии на этюде сильно искривлены. Пересекаясь на линии горизонта, они указывают на истинную главную точку картины, отмеченную кружком. Столь сильное искривление образов объективно прямых линий вызвано тем, что в изображаемом интерьере передний план вплотную приближен к зрителю. Однако такая геометрия этюда Поленова также не является «перспективной ошибкой», а, напротив, хорошо согласуется с вариантом *а*, правильно передающим глубину пространства.

Эти два примера убеждают в том, что художники прежде всего предпочитают те варианты научной перспективы, которым свойственна правильная передача глубины пространства. Но это и понятно, ибо именно здесь решается извечный парадокс живописи: убедительно изобразить трехмерное пространство мира (а значит, прежде всего показать глубину пространства) на двумерной плоскости картины.

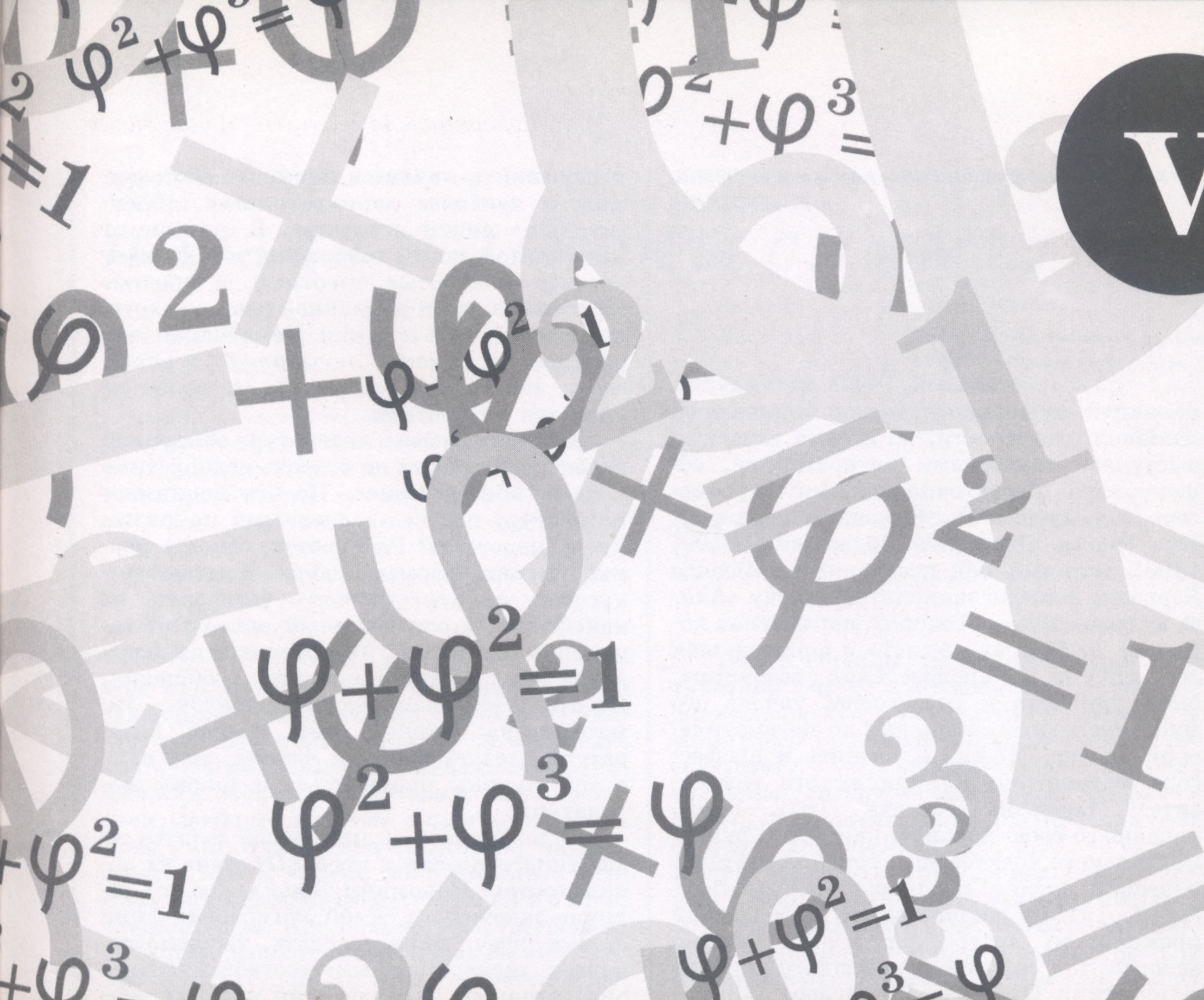
Еще раз отметим, что с позиций общей теории перспективы с помощью математического анализа ошибок изображения удалось строго указать границы применимости таких двух систем перспективы, как аксонометрия и слабая обратная перспектива. Эти две системы при определенных условиях (см. с. 314) являются совершенно естественными и равноправными вариантами научной системы перспективы. Аксонометрия и слабая обратная перспектива являются хорошими способами передачи формы и объема отдельного предмета, а не целостного пространства. При этом аксонометрия является счастливым исключением, абсолютно безошибочно передающим близкие и не слишком протяженные объекты. Так, в рамках общей теории перспективы обрели свое место аксонометрия и обратная перспектива, не имевшие прежде теоретического фундамента, но сыгравшие выдающуюся роль в истории искусства (см. гл. 24).

Книга Б. В. Раушенбаха «Системы перспективы в изобразительном искусстве. Общая теория перспективы» вышла в свет в 1986 г. До этой книги в течение почти 500 лет не появлялось фундаментальных трудов по перспективе! Проблема перспективы казалась решенной раз и навсегда еще в XV в. И вот в конце XX в. появляется труд, автор которого исходит из того, что не было известно науке XV в. — математического анализа, дифференциальных уравнений, геометрии Лобачевского — и что так и осталось недоступным искусствоведам века XX. Только человек, соединяющий в одном лице глубокое знание математики с тонким чуством прекрасного, мог сделать это открытие!

Спираль науки сделала гигантский виток длиной в 500 лет и на качественно новом уровне решила, казалось бы, старую как мир задачу. Но вряд ли стоит думать, что все точки над *i* в теории перспективы расставлены окончательно. Пути науки, как и пути искусства, не имеют «точек схода», они простираются в бесконечность.

V

МАТЕМАТИКА И ЛИТЕРАТУРА



Вдохновение нужно в поэзии, как и в геометрии.
А. С. ПУШКИН

То, что математики являются не только тонкими ценителями изящной словесности, но и сами зачастую выступают маститыми литераторами, общеизвестно. Достаточно вспомнить профессора математики Оксфордского университета Чарлза Латуиджа Доджсона (1832—1898), который под псевдонимом Льюиса Кэрролла написал знаменитую сказку «Алиса в стране чудес». Говорят, английская королева, любившая «Алису» и попросившая доставить ей все произведения сказочника, была удивлена и расстроена, увидев его многочисленные сочинения по математической логике. Можно вспомнить и профессора математики Кембриджского университета Бертрана Рассела (1872—1970), начавшего свою научную карьеру с фундаментального трехтомного труда по математической логике «Principia Mathematica» (1910—1913) и закончившего Нобелевской премией по литературе (1950). Можно вспомнить и скромного немецкого учителя математики Освальда Шпенглера (1880—1936), автора двухтомного философско-художественного бестселлера «Закат Европы», и не менее скромного и великого русского учителя математики Александра Солженицына, ставшего не только гордостью современной русской литературы, но и совестью современной России.

Но то, что строгие математические законы часто определяют структуру всего литературного произведения, подчас вызывает удивление даже у профессиональных филологов. Из всех рассмотренных нами искусств литература[1] наиболее удалена от математики, и не случайно раздел «Математика и литература» стоит в нашей книге на последнем месте. Причина этого кажется очевидной: литература, в отличие от музыки, с которой мы начали специальные части книги, является наименее абстрактным и наиболее демократичным, «безыскусным» видом искусства. В отличие от музыкантов, поэты говорят на том же языке, что и простые смертные, а простые смертные в своей обыденной речи ежедневно рискуют стать поэтами. Не случайно укоренилось выражение *литература и искусство*, как будто литература и вовсе не является искусством.

Конечно, назвать литературу обыденной речью, записанной на бумаге, недопустимо и даже кощунственно. Но что поднимает литературу над каждодневными монологами и диалогами? Разумеется, законы формы. Законы формы вообще отличают *искусство* от *неискусства* — симфонию от какофонии, архитектурный шедевр от заурядной постройки, литературное произведение от информационного сообщения. Но форма — это порядок, а порядок — это математика. Значит, чем строже литература следует законам формы, тем ярче в ней должны проявляться и законы математики.

Художественная литература делится на два типа — поэзия и проза. Отличие их общеизвестно. Напомним только, что это отличие заложено в самой этимологии слов: *поэзия* (греч. ποιεω — делать, творить) означает «искусственный», сотворенный по определенным правилам тип художественной речи, тогда как *проза* (лат. *prosus oratio* —прямая, свободная речь) есть свободно текущая художественная речь, более близкая обыденной, «несотворенной» речи.

Значит, в поэзии должны более ярко выступать законы построения данного типа художественной формы, а значит, и более отчетливо проявляться строгие математические закономерности. Не случайно поэтому наш раздел «Математика и литература» мы начинаем именно с поэзии.

Ну а важнейшие законы построения формы — это принцип симметрии. В своей нобелевской лекции Юджин Вигнер назвал симметрию сверхпринципом физики. На протяжение всей книги мы пытались доказать, что симметрия является и сверхпринципом формообразования в искусстве. Вот почему следующая глава книги называется «Поэзия и законы симметрии».

[1] Разумеется, речь в этой части книги будет идти только о художественной литературе или, как говорили раньше, об изящной словесности.

26.
ПОЭЗИЯ И ЗАКОНЫ СИММЕТРИИ

Тигр, о тигр, светло горящий
В глубине полночной чащи,
Кем задуман огневой
Симметричный образ твой?
У. БЛЕЙК

Итак, поэзия отличается от прозы более высоким уровнем организации художественной формы. По каким же признакам можно организовать поэтическую форму? По признакам, отличающим звуки обыкновенной разговорной речи, лежащей в основе и поэзии, и прозы. Речь — это в конечном счете набор звуков, а звук, как и всякий колебательный процесс, описывается формулой $u=A\sin\omega t$ и, следовательно, характеризуется тремя важнейшими физическими параметрами: силой (амплитудой A), длительностью (временем t) и высотой (частотой ω). Все три параметра лежат в основе организации музыки, хотя музыка — это, конечно, прежде всего звуковысотная организация, мелодия, о чем мы подробно говорили во второй части книги. В поэзии же заглавную организующую роль играют первые два параметра — сила и длительность звука[1].

Однако разговорную речь в отличие от музыкальной речи принято делить не на отдельные звуки, а на *слоги* — минимальные единицы речи, состоящие из одного или нескольких звуков и образующие тесное фонетическое единство. Такое деление связано с особенностями устройства нашего речевого аппарата, который единым мускульно-выдыхательным толчком рождает сразу несколько звуков — слог.

[1] В утонченной китайской поэзии высотная организация звуков также является важной компонентой поэтической формы. Но в мировой поэзии это скорее исключение, доказывающее правило.

Таким образом, для организации поэтической формы мы имеем два параметра: *длительность слога* (долгий — краткий) и *сила слога* (ударный — безударный). В соответствии с этим родились и две *стиховые системы: метрическая* (греч. μετρον — мера), упорядочивающая долгие и краткие слоги, и *тоническая* (греч. τονοζ — напряжение, ударение), упорядочивающая ударные и безударные слоги. В зависимости от особенностей языка, выделяющего длительность слога или его силу, в разных языках и в разное время развивались и разные системы стихосложения. Повторяющиеся комбинации долгих и кратких (ударных и безударных) слогов называются *стопами*. Стопы и являются базисными элементами во всякой системе стихосложения.

Исторически первой сложилась *метрическая, или античная, система стихосложения*. Она родилась в Древней Греции и затем перекочевала в Древний Рим. Единицей измерения в античной системе являлся *хронос протос* (греч. χρονοζ προτοζ — первичное время) или *мора* (лат. *mora* — промежуток) — время произнесения краткого слога. Дальше вступали в силу математические законы комбинаторики.

Исключая из рассмотрения примитивные односложные стопы, учитывая, что число всевозможных комбинаций N из 2 элементов по n элементов равно 2^n, и обозначая долгие слоги значком —, а краткие — значком $\cup$, будем иметь следующие двух- ($n=2$), трех- ($n=3$) и четырехсложные ($n=4$) стопы:

М. А. ВРУБЕЛЬ. Муза. *Эскиз занавеса. Ок. 1890 г.* Муза — непременная спутница всякого художника, однако наибольшей любовью музы пользовались у поэтов. Не случайно среди девяти античных муз было три музы поэзии. Как истинная покровительница, муза, быть может, не только подсказывала поэту темы, но и следила за соблюдением симметрийных законов поэзии.

двухсложные ($n=2,\ N=2^2=4$):

∪ ∪ — пиррихий
— ∪ — хорей
∪ — — ямб
— — — спондей;

трехсложные ($n=3,\ N=2^3=8$):

∪ ∪ ∪ — трибрахий
— ∪ ∪ — дактиль
∪ — ∪ — амфибрахий
∪ ∪ — — анапест
∪ — — — бакхий
— ∪ — — амфимакр
— — ∪ — антибакхий
— — — — молосс;

четырехсложные ($n=4,\ N=2^4=16$):

∪ ∪ ∪ ∪ — прокелевсматик
— ∪ ∪ ∪ — пеон I
∪ — ∪ ∪ — пеон II
∪ ∪ — ∪ — пеон III
∪ ∪ ∪ — — пеон IV
— ∪ — ∪ — дихорей
∪ — ∪ — — диямб
— ∪ ∪ — — хориямб
∪ — — ∪ — антиспаст
∪ ∪ — — — ионик восходящий
— — ∪ ∪ — ионик нисходящий
∪ — — — — эпитрит I
— ∪ — — — эпитрит II
— — ∪ — — эпитрит III
— — — ∪ — эпитрит IV
— — — — — диспондей.

Понятно, что наибольшей художественной выразительностью обладают те стопы, где один «выдающийся» слог (долгий или ударный) оттеняется остальными, неприметными. В *тонической системе стихосложения*, сформировавшейся сравнительно недавно, этот принцип вообще был взят за основу. Учитывая к тому же, что четырехсложные стопы в тонической системе распространения не получили, число возможных стоп в тонической системе резко сокращается. Для обозначения типов стоп в тонической системе были сохранены древнегреческие названия. Таким образом, обозначая ударные слоги значком —́, а безударные — значком ∪, мы приходим к следующему набору стоп в тонической системе:

—́ ∪ — хорей
∪ —́ — ямб
—́ ∪ ∪ — дактиль
∪ —́ ∪ — амфибрахий
∪ ∪ —́ — анапест.

Нельзя не отметить, что, как и в случае с музыкальной гаммой, развитие систем стихосложения шло по пути их упрощения. Из 28 стоп в античной метрической системе стихосложения в современной тонической системе осталось только 5!

В некоторых языках деление слогов по длительности или силе вообще очень зыбко. Это относится, прежде всего, к языкам с постоянным ударением во всех словах (например, французскому с ударением на последнем слоге или польскому с ударением на предпоследнем слоге). То же можно сказать и о народной поэзии, которая еще не различала слоги по длительности или силе. Так родилась еще одна, наиболее простая, *силлабическая* (греч. συλλαβη — обхват, слог) *система стихосложения*, единственным требованием которой было равное число слогов в каждом стихе с обязательным ударением на последнем слоге. С силлабической системы в народных песнях и церковных молитвах начиналась и русская поэзия. Силлабическая система в русской поэзии просуществовала вплоть до работ «Новый и краткий способ к сложению российских стихов» (1735) В. К. Тредиаковского и «Письмо о правилах российского стихотворства» (1739) М. В. Ломоносова, которые фактически ввели тоническую систему в русское стихосложение. Однако, поскольку русская тоническая система родилась из силлабической, она была названа Тредиаковским *силлабо-тонической*. По существу, это название и более точное, ибо силлабо-тоническая система ведет счет не только ударным слогам, но и слогам вообще. Силлабо-тоническая система и по сей день господствует в русской поэзии.

Ритмическое повторение одинаковых стоп задает в поэзии тот порядок, который отличает ее от прозы. С точностью до метронома стопы отмеряют пульс поэтической формы, меру стиха. Именно поэтому закон чередования в стихе ударных и безударных (долгих и кратких) слогов называется *метром* (греч. μετρον — мера), а раздел стиховедения, изучающий законы метра, называется *метрикой*.

Метр и число стоп в стихе определяют *стихотворный размер*, скажем *четырехстопный ямб*, если в стихотворной строке стоят 4 ямбические стопы, или *шестистопный дактиль*, если в стихе 6 стоп дактиля. Насколько употребимы те или иные стихотворные размеры в творчестве Пушкина, можно судить по приводимой ниже таблице, где цифры указывают число строк, написанных данным размером. Как видим, ямбом Пушкин написал 87% поэтических произведений, а четырехстопные размеры составляют в его творчестве 68%. Причину распространенности четырехстопных размеров мы уже обсуждали в главе 6.4 — по-видимому, она связана с дыхательным и сердечным ритмом человека.

Таблица 6. Статистика стихотворных размеров в поэзии А. С. Пушкина

Метр	Число стоп в стихе					
	1 и 2	3	4	5	6	Итого
Ямб	99	1584	21605	6443	3754	33485
Хорей	5	125	4105	—	3	4238
Дактиль	138	—	—	—	992	138
Амфибрахий	62	55	213	—	—	330
Анапест	99	25	—	31	—	124
Прочие	—	—	—	—	69	100
Итого	403	1789	25923	6474	3826	38415

Но отвлечемся от математически точной теории метра в поэзии и рассмотрим живое поэтическое слово. Начнем со всем известного начала романа в стихах «Евгений Онегин» А. С. Пушкина:

Мой дядя самых честных правил,
Когда не в шутку занемог,
Он уважать себя заставил
И лучше выдумать не мог.

Размер этого четверостишия — *четырехстопный ямб с гиперкаталектическими*[1] *окончаниями* в 1-й и 3-й строках. Разделяя стопы вертикальной чертой, запишем *теоретическую метрическую схему*

∪–́|∪–́|∪–́|∪–́∪
∪–́|∪–́|∪–́|∪–́
∪–́|∪–́|∪–́|∪–́∪
∪–́|∪–́|∪–́|∪–́

и *фактическую метрическую схему*

∪–́|∪–́|∪–́|∪–́∪
∪–́|∪–́|∪∪ |∪–́
∪∪ |∪–́|∪–́|∪–́∪
∪–́|∪–́|∪∪ | ∪–́

данного четверостишия.

[1] *Гиперкаталектика* (от греч. υπερ=лат. *super* — над, выше и κατα-ληγω — оканчиваться) — «сверхокончание» — один или несколько безударных слогов в последней стопе.

Как видим, теоретический метр выдержан Пушкиным только в первой строке. В целом же в первых четырех строках «Евгения Онегина» Пушкин допускает три отклонения от метрического закона поэмы (эти отклонения выделены коричневым цветом — читатель без труда найдет их в тексте). Три отклонения от метра в четырех строках — много это или мало, плохо или хорошо? Это безбрежная тема для математического и эстетического анализа поэзии, которая составляет предмет отдельной книги.

Математический анализ различий теоретического и фактического метра имеет давнюю традицию, идущую от русского поэта и ученого Андрея Белого (1880—1934), выпускника математического факультета Московского университета. Своему второму рождению это направление математического стиховедения обязано работам выдающегося математика XX в. А. Н. Колмогорова и выдающегося филолога М. Л. Гаспарова. Сегодня это направление успешно развивается ученицей Колмогорова М. А. Красноперовой.

Заметим, что отклонения от теоретического метра в поэзии неизбежны, как неизбежно расхождение любой теоретической модели с конкретным явлением. Об этих неминуемых отступлениях реального стиха от его математического закона почти за сто лет до Пушкина писал первый теоретик русской поэзии Тредиаковский: «Вольность такая есть необходима ради наших многосложных слов, без которой невозможно будет, почитай, и одного стиха сложить...»

Фактический закон чередования в стихе ударных и безударных (долгих и кратких) слогов называется *ритмом*, а изучающий ритм раздел стиховедения — *ритмикой*. Ритм возникает как результат деформации теоретического метра реальным языковым материалом. Живое слово, как пойманная рыба, бьется в руках поэта, не хочет укладываться в расчерченные ячеи метрических законов и часто выскакивает из них. Борьба метра и ритма — извечный закон поэзии, а искусство достижения между ними должного согласия и определяет талант поэта и ценность поэтического произведения. Метрика и ритмика являются важнейшими составляющими науки о законах построения художественной формы — *поэтики*.

Теперь нам остается только вспомнить главу 6.4, где мы установили, что ритм есть переносная симметрия времени. В еще большей степени это относится к теоретическому ритму поэзии — метру. В самом деле, тем, кто знает типы симметрии, очевидно, что *метр в поэзии есть переносная симметрия стоп*. Более того, в любом темпоральном искусстве *метр есть переносная симметрия на оси времени основной метрической единицы* (такта в музыке, стопы в поэзии и т. д.). Теперь мы можем уточнить, сказав, что *ритм есть приблизительная переносная симметрия основной метрической единицы*, или фактическое воплощение симметрии метра. *Метр есть математика искусства, а ритм — его поэтика*. Поскольку метр и ритм связаны неразрывно, то часто имеет смысл вообще говорить о *метроритме как диалектическом единстве точной и приблизительной симметрии в искусстве*.

Метрика и ритмика — фундамент всякой поэзии. Но это только низший уровень проявления законов симметрии в стихосложении, и нам предстоит подняться на следующий симметрийный уровень поэзии — уровень рифмы.

Рифмой (от греч. ρνϑμοζ — ритм, соразмерность) называют повтор некоторой совокупности звуков, связывающих окончания двух или более строк. Если представить себе стихотворение в виде одной длинной строки, расположенной на горизонтальной оси времени, то стопы размечают на этой оси единицы поэтического масштаба, стихи разрезают стихотворную ленту на отдельные куски и укладывают их в виде «поэтической поленницы» — стихотворения, растущего на бумаге сверху вниз. Так появляется вторая, вертикальная координата поэзии, и рифма устанавливает симметрийные отношения порядка по этой второй поэтической координате. Таким образом, мы можем говорить о двух координатах поэзии, по которым действуют законы симметрии,— горизонтальной координате метра и вертикальной координате рифмы. Сама же *рифма есть переносная симметрия стихотворных окончаний*.

Требование симметрии (инвариантности) окончаний приводит к следующим необходимым условиям рифмы: 1) рифмуемые слова должны иметь одинаковое число слогов после ударной гласной; 2) ударные гласные должны звучать (не обязательно записываться!) одинаково; 3) звуки после ударной гласной должны быть подобны (не обязательно тождественны); 4) рифма обогащается подобием звуков, стоящих перед ударной гласной,— *опорных звуков*. В зависимости от того, на какой слог рифмуемой стопы падает ударение (т. е. сколько слогов рифмуется) — последний, предпоследний, третий от конца и т. д., рифмы называют *мужскими, женскими*[1], *дактилическими, гипердактилическими* и т. д. Валерий Брюсов, бывший не только замечательным поэтом и ученым, но и крупным теоретиком поэзии, в книге «Опыты по метрике и ритмике, по евфонии и созвучиям, по строфике и формам» (1912—1918) — уникальном собрании собственных поэтических иллюстраций к теории стиха — в стихотворении «Ночь» дает пример последовательного уменьшения рифм — от семисложных до односложных (мужских).

Ветки темные балдахином свешивающиеся, *a*
Шумы речки с дальней песней смешивающиеся, *a*
Звезды в ясном небе слабо вздрагивающие, *b*
Штампы роз, свои цветы протягивающие, *b*
Запах трав, что в сердце тайно вкрадывается, *c*
Теней сеть, что странным знаком складывается, *c*
Вкруг луны живая дымка газовая, *d*
Рядом шепот, что поет, досказывая, *d*
Клятвы, днем глубоко затаенные, *e*
И еще, — еще глаза влюбленные, *e*
Блеск зрачков при свете лунном белом, *f*
Дрожь ресниц в движении несмелом, *f*
Алость губ не отскользнувших прочь, *g*
Милых, близких, жданных... Это — ночь! *g*

Переносная симметрия окончаний каждой пары строк в этом теоретико-поэтическом эксперименте Брюсова особенно очевидна. В целом же последовательность сменяющихся переносных симметрий $aa \Rightarrow bb \Rightarrow cc \Rightarrow \ldots$ представляет собой цветную симметрию (см. с. 104), когда основное свойство *aa* (переносная симметрия окончаний в двух соседних строках) переносится на следующую пару строк с другой окраской *bb*, затем на следующую пару строк с третьим цветом *cc* и т. д.

Читатель, очевидно, почувствовал, как по мере приближения к концу стихотворение «разгоняется», воспринимается легче и естественнее. Причиной тому — перегруженные гипердактилические рифмы начала «Ночи». Вот почему в русской поэзии преобладают простые мужские и женские рифмы, причем обычно мужская рифма следует за женской, создавая впечатление завершенности окончания поэтического отрезка. Именно такую картину чередования женских и мужских рифм мы видим в рассмотренном отрывке из «Евгения Онегина»: *AbAb* (женские рифмы принято обозначать большими буквами, а мужские — малыми). Интересно, что закон чередования женских и мужских окончаний был установлен французским поэтом Пьером Ронсаром в теоретическом труде «Алгебра французского поэтического искусства» (1565). Так что «поверять» алгеброй гармонию поэты начали задолго до Сальери!

(Заметим в скобках, что обостренное чувство национальной гордости побуждало англичан искать отличные от «французской алгебры» законы рифмы. И вот Байрон пишет знаменитого «Шильонского узника» только мужскими рифмами, которые в переводе Жуковского звучат так:

На лоне вод стоит Шильон;
Там в подземелье семь колонн
Покрыты влажным мохом лет.
На них печальный брезжет свет,
Луч, ненароком с вышины
Упавший в трещину стены...

Нельзя не заметить, что сплошные мужские рифмы, как гвозди, сколачивают поэтическую форму, окрашивая стихотворение в мрачные, аскетические тона.)

Но, отвлекаясь от извечного спора англичан и французов, нельзя не заметить, что закон чередования мужских и женских рифм выводит нас на новый уровень симметрийных отношений в поэзии — *уровень строфики*.

Строфой (греч. στροφη — кружение, поворот) в поэзии называют группу стихов,

[1] Термины «мужская» и «женская» рифмы не имеют в русском языке ничего общего с мужским и женским родом существительных. Их происхождение идет от старофранцузского языка, когда читалось немое *e* на конце слова, отчего слова мужского рода имели ударение на последнем слоге, а слова женского рода — на предпоследнем (например, *un chat — une chatte*: *кот—кошка*).

объединенных заданным законом рифмы. Как правило, строфы повторяются на протяжении всего поэтического произведения, и таким образом *строфика есть следующий уровень симметрийных отношений в поэзии.* Но и в том случае, когда строфы в стихотворении или поэме меняются в определенной последовательности, этот закон смены строф есть не что иное, как разновидность цветной симметрии в поэзии.

Простейшая строфа — *двустишие* — допускает только один тип переносной симметрии *AA (aa).* Наиболее распространенная из простых строф — *четверостишие* — допускает уже три типа симметрии: *AABB — смежная или парная рифма; ABAB — перекрестная рифма* и *ABBA — охватная или кольцевая рифма.* Парная рифма есть переносная цветная симметрия, а перекрестная и кольцевая — простые переносная и зеркальная симметрии соответственно. Эти типы симметрии в четверостишии, как правило, обогащаются сочетанием мужской и женской рифмы, т. е. имеют структуру *AbAb, AAbb* и *AbbA.*

Из двустиший и четверостиший можно собирать более сложные строфы. Именно так поступил Пушкин, соединив все простейшие типы строфической симметрии — три типа четверостиший и единственный тип двустишия — в своей знаменитой *онегинской строфе,* структурная формула которой имеет вид

AbAb CCdd EffE gg.

Онегинская строфа, как и весь Пушкин, легка, но не легковесна. Как отмечает выдающийся знаток русской поэзии М. Л. Гаспаров, онегинская строфа дает легко уследимый и в то же время достаточно богатый ритм: *умеренная сложность (AbAb) — простота (CCdd) — усиленная сложность (EffE) — предельная простота (gg).* И вновь мы видим антисимметрию сложного и простого вместе с симметрией их переноса. Но ритм онегинской строфы несет и глубокую смысловую нагрузку. Четыре формообразующих элемента строфы — это, как правило, и четыре содержательных элемента: *тема — развитие — кульминация — афористическая концовка.* Онегинская строфа была настолько оригинальным и индивидуальным изобретением Пушкина, что после Пушкина почти никто из поэтов не рисковал прикасаться к его детищу.

Но, разумеется, и до Пушкина алгебра строфики немало волновала поэтов. Из средневековых Италии и Прованса, говоривших на языках с богатыми и звучными окончаниями, дошли до нас строфы с тройными и четверными рифмами. Это *терцеты (AAA),* различные типы *секстин (AbAbAb, bAAbbA* и др.), *сицилианы (AbAbAbAb)* и развившиеся из них более яркие *октавы (AbAbAbCC), ноны (AbAbAbbCC), сонеты (AbbA AbbA ccD eDe, AbbA AbbA ccD eeD* и др.) и многие другие типы строф. Сегодня сонет считается наиболее совершенной поэтической формой, созданной в эпоху средневековья. Четырнадцать строк сонета таили в себе и глубокое содержательное единство, являясь воплощением знаменитой диалектической формулы Гегеля: *тезис (AbbA) — антитезис (AbbA) — синтез (ccD eeD).*

Но средневековые поэты — трубадуры, труверы, миннезингеры — еще не знали формулы Гегеля и продолжали биться над изобретением новых строф не менее яростно, чем рыцари на турнирах. Так, наряду с *замкнутыми строфами,* в которых закон

Э. ЛЮСЬЕР. Мельпомена, Эрато и Полигимния. *Ок. 1640 г.*
Мельпомена первоначально считалась музой песни и, таким образом, была четвертой музой поэзии. В классический период Мельпомена считалась музой трагедии.

рифмы не выходил за пределы строфы, были изобретены и *бесконечные*, или *цепные, строфы*, связанные друг с другом переходящей рифмой. Простейшими, но необычайно выразительными из цепных строф являются *терцины*, структурная формула которых имеет вид

aba bcb cdc ded ... xyx yzy z.

Как видим, в основе терцины лежит *симметрия переноса второй рифмы предыдущего терцета на первую и третью рифмы последующего.* Как имя Пушкина ассоциируется с онегинской строфой, так и имя Данте неразрывно с терцинами, которыми написана вся «Божественная комедия»:

Земную жизнь пройдя до половины,	*A*
Я очутился в сумрачном лесу,	*b*
Утратив верный путь во тьме долины.	*A*
Каков он был, о, как произнесу,	*b*
Тот дикий лес, дремучий и грозящий,	*C*
Чей давний ужас в памяти несу!	*b*
Так горек он, что смерть едва ль не слаще,	*C*
Но, благо в нем обретши навсегда,	*d*
Скажу про все, что видел в этой чаще.	*C*

Но терцины явились только разминкой для средневековых поэтических алгебраистов. Вершиной же «алгебры цепных строф» следует признать *большую секстину* и *венок сонетов*. Большая секстина составлялась из шести секстин по очень изощренному алгоритму. За основу бралась первая секстина, рифмовавшаяся по закону *AbAbAb*. Шесть рифмующихся слов первой секстины (обозначим их цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6) являлись рифмами и во всех остальных секстинах, но переставлялись там по закону: *последнее слово в предыдущей секстине ставилось на первое место в последующей, а первое слово — на второе место.* Затем тот же алгоритм применялся к оставшимся четырем стихам предыдущей секстины и, наконец, к оставшимся двум. В целом получался следующий закон перестановки рифмующихся слов в большой секстине:

123456	*AbAbAb*
615243	*bAAbbA*
364125	*AbbAbA*
532614	*AAbbAb*
451362	*bAAAbb*
246531	*bbbAAA*

Следующий, седьмой шаг возвращает рифмуемые слова в исходное положение 123456 *AbAbAb*, поэтому большая секстина состоит именно из 6 секстин. В большой секстине средневековые трубадуры предвосхитили некоторые идеи алгебраической *теории групп*, ставшей через несколько столетий основным математическим инструментом в изучении законов симметрии. Но эта тема выходит за рамки данной главы, и нам остается только привести большую секстину Валерия Брюсова:

Я безнадежность воспевал когда-то	1	*A*
Мечту любви я пел в последний раз.	2	*b*
Опять душа мучительством объята,	3	*A*
В душе опять свет радости погас.	4	*b*
Что славить мне в предчувствии заката,	5	*A*
В вечеровой предвозвещенный час?	6	*b*
Ложится тень в предвозвещенный час;	6	*b*
Кровь льется по наклонам, где когда-то	1	*A*
Лазурь сияла. В зареве заката	5	*A*
Мятежная душа, как столько раз,	2	*b*
Горит огнем, который не погас	4	*b*
Под пеплом лет, и трепетом объята.	3	*A*
Пусть тенью синей вся земля объята,	3	*A*
Пусть близок мглы непобедимый час,	6	*b*
Но в сердце свет священный не погас:	4	*b*
Он так же ярко светит, как когда-то,	1	*A*
Когда я, робкий мальчик, в первый раз	2	*b*
Склонил уста к устам, в лучах заката.	5	*A*
Священны чары рдяного заката,	5	*A*
Священна даль, что пламенем объята.	3	*A*
Я вам молился много, много раз,	2	*b*
Но лишь опять приходит жданный час,	6	*b*
Молюсь я на коленях, как когда-то,	1	*A*
Чтоб нынче луч в миг счастия погас!	4	*b*
Безвестная Царица! Не погас	4	*b*
В душе огонь священный. В час заката	5	*A*
Душа старинным пламенем объята,	3	*A*
Твержу молитву, что сложил когда-то:	1	*A*
«Приди ко мне, хоть и в предсмертный час,	6	*b*
Дай видеть лик твой, хоть единый раз!»	2	*b*
Любви я сердце отдавал не раз,	2	*b*
Но знал, что Ты — в грядущем, и не гас	4	*b*
В душе огонь надежды ни на час.	6	*b*
Теперь в пыланьи моего заката,	5	*A*
Когда окрестность сумраком объята,	3	*A*
Все жду твоей улыбки, как когда-то!	1	*A*

Заметим, что даже выдающийся поэтический алгебраист Брюсов допустил в большой секстине одну ошибку (найдите ее!).

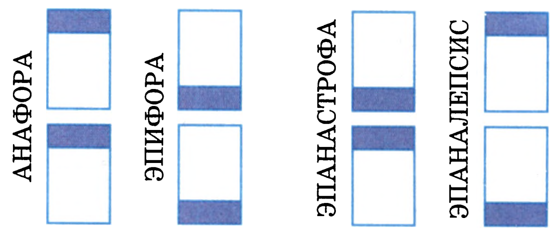
Алгоритм построения венка сонетов был более прост и изящен: *последняя строка* *предыдущего сонета должна являться первой строкой следующего сонета.* Так как в сонете 14 стихов, то данный алгоритм замыкался на 14-м сонете. Наконец, последний, 15-й сонет, называемый *магистралом,* собирался из первых строк всех 14 сонетов, связывая их воедино. Венок сонетов — вершина цепной строфики, и не у многих поэтов хватало таланта и выдержки взобраться на эту вершину. Мы рекомендуем читателю познакомиться хотя бы с двумя, лучшими на наш взгляд, «венками» — «Светочем мысли» Валерия Брюсова и «Венком сонетов» Владимира Солоухина.

Цепные строфы незаметно привели нас от законов устройства одной строфы к законам построения всего художественного произведения как целого. А это уже высший уровень в строении художественной формы и новый раздел поэтики — *композиция.* Итак, *метрика — ритмика — рифма — строфика — композиция* — на всех этих уровнях построения поэтической формы действуют законы симметрии. *По мере восхождения от низших уровней формообразования к высшим действие законов симметрии ослабевает.* В самом деле, без точной симметрии метра и приблизительной симметрии ритма поэзия просто невозможна. Рифма уже не является абсолютным симметрийным законом поэзии. Существуют так называемые *белые стихи* — стихи без рифмы, и даже Пушкин позволял себе иногда белый стих:

...Вновь я посетил
Тот уголок земли, где я провел
Изгнанником два года незаметных.

Строфическая симметрия в поэзии еще менее обязательна, ну а цепные строфы сегодня просто являются экзотикой.

А есть ли другие композиционные законы симметрии в поэзии, помимо цепных строф? Безусловно, есть. Это *анафора* (от греч. ανα-φερω — отнесенный к началу), или *единоначатие,*— повторяющиеся элементы в начале поэтических рядов; *эпифора* (от греч. επι-φερω — отнесенный к концу), или *концовка,*— повторяющиеся элементы в конце поэтических рядов; *эпанастрофа* (от греч. επ-αναστρεφω — возвращаться), или *стык,*— повторяющиеся элементы в конце первого и начале второго ряда; *эпаналепсис* (от греч. επ-αναληψις — взятие назад), или *кольцо,*— повторяющиеся элементы в начале первого и конце второго ряда. Глядя на схемы этих композиционных приемов, легко усмотреть в них законы переносной и зеркальной симметрии.



Переносная симметрия

Зеркальная симметрия

Повторяющиеся элементы в симметрийных законах композиции могут быть самыми разнообразными — от одного слова и даже союза до целой строфы и даже нескольких строф. Вспомним пушкинского «Пророка»:

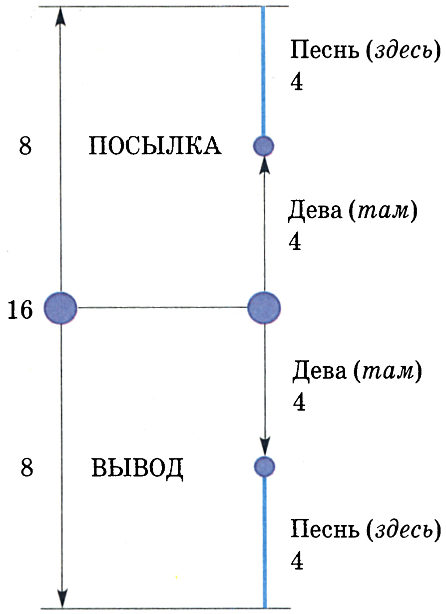
И внял я неба содроганье,
И горних ангелов полет,
И гад морских подводный ход,
И дольней лозы прозябанье.

Или «Медного всадника»:

Люблю тебя, Петра творенье,
Люблю твой строгий, стройный вид...

А вот из 16 строк стихотворения Пушкина «Не пой, красавица, при мне...» 8 образуют эпаналепсис. Композиция этого стихотворения целиком подчинена закону зеркальной симметрии, что хорошо видно на приводимой схеме. Зеркальная симметрия композиции стихотворения подчеркивает мятущееся раздвоение души поэта в этом маленьком шедевре Пушкина.

Помимо структурных законов симметрии в композиции, какими являются анафора, эпифора, эпанастрофа, эпаналепсис и др., поэтов давно волнуют чисто геометрические типы симметрии, которые позволяют подчеркнуть содержание стихотворения в его графическом изображении на бумаге. Еще в III—IV вв. «геометрические стихи» в виде симметричных геометрических фигур были популярны в римской поэзии. Говорят, Пушкин пришел в восторг от стихотворений Нодье, описывающих лестницу



Не пой, красавица, при мне
Ты песен Грузии печальной:
Напоминают мне оне
Другую жизнь и берег дальний.

Увы, напоминают мне
Твои жестокие напевы
И степь, и ночь, и при луне
Черты далекой, бедной девы!..

Я призрак милый, роковой,
Тебя увидев, забываю;
Но ты поешь – и предо мной
Его я вновь воображаю.

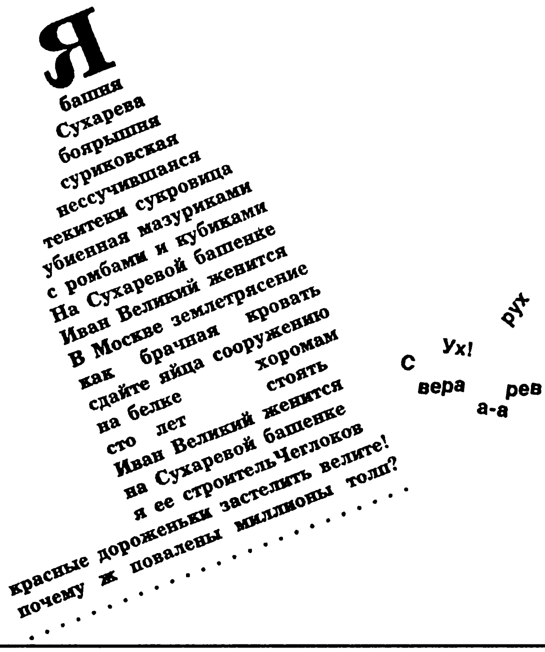
Не пой, красавица, при мне
Ты песен Грузии печальной:
Напоминают мне оне
Другую жизнь и берег дальний.

и расположенных в виде лестницы. По существу же попытки поэтов отразить содержание стихотворения в его геометрической форме есть возрождение древней традиции пиктографического письма, когда носителем содержания были не буквы и слова, а рисунок.

Зеркальную симметрию равнобедренного треугольника мы находим в стихотворении Брюсова «Треугольник».

Я,
еле
качая
веревки,
в синели
не различая
синих тонов
и милой головки,
летаю в просторе,
крылатый как птица,
меж лиловых кустов!
но в заманчивом взоре
знаю, блещет, алея, зарница!
и я счастлив ею без слов!

Но опыты Брюсова в геометрической поэзии — это мальчишеская шалость в сравнении с достижениями на этом поприще современного поэта Андрея Вознесенского. Закончив Московский архитектурный институт, Вознесенский стал выдающимся архитектором стиха. Для своих геометрических стихов Вознесенский придумал свое название — *изопы* — изобразительная поэзия. Вот только один пример из опытов изобразительной поэзии Вознесенского. В изопе «Я башня...» изображена не только зеркальная симметрия выдающегося архитектурного сооружения старой Москвы — Сухаревской башни, но и ее трагическая судьба «убиенной мазуриками» московской красавицы.



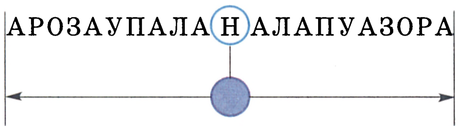
И в заключение еще об одном типе композиционной симметрии, который давно волнует поэтов.

Мы уже говорили, что рифма, строфа и композиция устанавливают симметрийные отношения по второй, вертикальной координате стихотворения, и только метр и ритм организуют поэтическую форму по горизонтали. Но возможны ли другие типы симметрии по горизонтали, кроме переносной симметрии метра и ритма? Возможен ли по горизонтали самый очевидный, зеркальный тип симметрии, так чтобы стихотворение читалось одинаково слева направо и справа налево?

Оказывается, возможен, и этот весьма необычный тип стихотворной формы называется *палиндромом* (от греч. παλινδρομεω — бежать назад, возвращаться) или *перевертнем*. Классическим примером палиндрома является известная строка Афанасия Фета:

А роза упала на лапу Азора.

Легко убедиться, что в обратном направлении она читается так же, как и в прямом. Если записать эту строку без пропусков между словами



то ее зеркальная симметрия станет наиболее очевидной: буквы, равноотстоящие от центра симметрии (буквы *н*), одинаковы.

Хотя сочинение палиндромов — дело далеко не простое, со времен Фета поэтические симметристы продвинулись далеко вперед и научились сочинять целые палиндромические стихотворения. Признанным мастером палиндрома в начале XX в. был Велемир Хлебников. Вот одно из его зеркально-симметричных стихотворений, которое так и называется «Перевертень».

Кони, топот, инок,
Но не речь, а черен он.
Идем, молод, долом меди.
Чин зван мечем навзничь.
Голод, чем меч долог?
Пал, а норов худ и дух ворона лап.
А что? Я лов? Воля отча!
Яд, яд, дядя!
Иди, иди!
Мороз в узел, лезу взором.
Солов зов, воз волос.
Колесо. Жалко поклаж. Оселок.
Сани, плот и воз, зов и толп и нас.
Горд дох, ход дрог.
И лежу. Ужели?
Зол, гол лог лоз.
И к вам и трем с смерти мавки.

Мы позволили себе воспроизвести это стихотворение не в традиционной форме, использованной Хлебниковым, а в виде, подчеркивающем его зеркальную симметрию.

Говорят, в годы гражданской войны среди русских монархистов был популярен бог весть кем придуманный палиндром

МОЛОТ СЕРП ПРЕСТОЛОМ!,

который белые офицеры повторяли как заклинание.

Сегодня истинным «королем палиндрома» считается московский поэт и филолог Дмитрий Авалиани, которого, впрочем, с филологией одно время связывала только работа ночным сторожем в Литературном музее М. Ю. Лермонтова. Перу Авалиани принадлежат и палиндромы-воззвания:

МИР, О ВДОВЫ, ВОДВОРИМ!,

и палиндромы-философемы:

АХ, У ПЕЧАЛИ МЕРИЛО, НО ЛИРЕ МИЛА ЧЕПУХА!,

и даже палиндром, написанный классическим античным гекзаметром:

Море могуче. В тон ему, шумен, отвечу Гомером
Море, веру буди — ярок, скор, я иду буревером.

В 1998 г. интерес к палиндрому и прочим симметрийным преобразованиям в слове подогрела газета «Комсомольская правда», объявившая конкурс «Анаграмма-98». И вот изощренный борьбою с кризисом русский ум родил массу диковин: *двойной палиндром* — палиндром с несколькими центрами симметрии, *антипалиндром* — ритмические строки, смысл которых при обратном прочтении меняется на противоположный, и даже *магический палиндромный квадрат* — аналог магического числового квадрата, который одинаково читается в четырех направлениях:

Т У З А М
У Б А Р А
З А К А З
А Р А Б У
М А З У Т

Прочитав в обратном направлении антипалиндромы А. Бубнова и С. Федина

ХОРОШИ ТАМ ЯНКИ И «МАРС» — А ТУТА?

НА РИТКЕ СНЕГ,

легко убедиться, что их новый смысл не так уж безобиден. (Впрочем, современная молодежь уже слабо представляет, кто такой был ГЕНСЕК — и слава Богу! Жаль только, что слово ТИРАН сегодня остается не менее актуальным, чем во времена изобретшей его античности.)

Все эти симметрийные опыты в поэзии очень увлекательны. И тем не менее нельзя не заметить, что все это не более чем забава, жонглирование словами, игра ума. Гекзаметром написаны «Илиада» и «Одиссея», терцинами — «Божественная комедия», онегинской строфой — «Евгений Онегин». Все это бессмертные шедевры мировой литературы. А вот серьезной палиндромической поэзии нет и быть не может. Почему?

Все дело в «стреле времени». Поэзия есть искусство, развивающееся во времени. А время вспять не течет! Поэтому поэзия, как и музыка, носит ярко выраженный однонаправленный характер, и обращение стиха или мелодии противоречит одному из фундаментальных законов природы — *закону необратимости времени*. Вот почему даже такому выдающемуся математику и знатоку законов симметрии в музыке, каким был И. С. Бах, только один раз удался «музыкальный палиндром». Это «Ракоходный канон» из «Музыкального приношения». Канон потому и назван ракоходным, что в нем партия второй скрипки есть движение вспять партии первой скрипки. Поскольку обе партии звучат одновременно, то разгадать на слух эту музыкально-математическую загадку Баха просто невозможно. Недаром Бах предварил канон эпиграфом из Евангелия от Луки: Quarendo invenietis — Ищите и обрящите.

Иное дело — пространственные искусства: архитектура, живопись, орнамент, где движение вспять не запрещено необратимостью времени. Вот почему в композициях обеих «Тайных вечерь» — Леонардо да Винчи и Сальвадора Дали — а это чистой воды пространственные палиндромы — зеркальная симметрия выглядит художественно и убедительно. Тем более в архитектуре зеркальная симметрия здания, читаемая одинаково в прямом и обратном горизонтальных направлениях, создает при восприятии архитектурного сооружения ощущение устойчивости, фундаментальности. Но мы никогда не встретим палиндром по вертикальной координате в архитектуре, ибо здесь важно подчеркнуть не статику, а динамику, движение вверх. Вот поэтому в вертикальной пропорции архитектуры преобладает закон динамической симметрии золотого сечения. Впрочем, мы уже слишком далеко отошли от поэзии.

Итак, метрика, ритмика, рифма, строфика, композиция; ямб, хорей, дактиль, амфибрахий; рифмы перекрестные и рифмы кольцевые; терцеты и терцины, секстины и октавы, сицилианы и ноны, спенсерова строфа и державинская строфа, строфы замкнутые и цепные; анафора и эпифора, палиндром и антипалиндром — целые разделы поэтики — все эти рассмотренные и масса не рассмотренных нами понятий теории стихосложения основаны на *едином принципе симметрии*. Это единство в многообразии поистине поражает, и мы еще раз убеждаемся в конце книги в универсальности этого основного закона эстетики, с которого мы начали книгу. Так что *единство в многообразии, в основе которого лежит принцип симметрии, является основным формообразующим принципом поэзии*. Не в этом ли высшее назначение философии вообще, и философии искусства в частности,— за разнообразием конкретных форм и явлений искать единые обусловливающие их принципы?!

Но нам предстоит остановиться еще на одном типе симметрии, играющем выдающуюся роль в организации поэтической формы,— *симметрии подобия золотого сечения*.

27.
ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ В ПОЭЗИИ

Воскликнул жрец: «О, дети, дети!» —
На речь афинского посла.
И ум, и мир, как плащ, одеты
На плечах строгого числа.
В. ХЛЕБНИКОВ

От изобразительной поэзии Вознесенского перейдем к его «нормальным» стихам, которые также содержат массу ярких примеров действия законов симметрии в поэзии. Это и неудивительно: воспитанное на пропорциональном строе мировых шедевров архитектуры, зрение и умозрение Вознесенского отличаются обостренным чувством симметрии, пропорциональности и ритма — всех тех количественных слагаемых прекрасного, которые принято объединять в качественном понятии гармонии.

Итак, рассмотрим стихотворение Андрея Вознесенского «Гойя», содержащее всего 14 строк.

Я –Гойя!
Глазницы воронок мне выклевывал ворог,
слетая на поле нагое.
Я – горе,

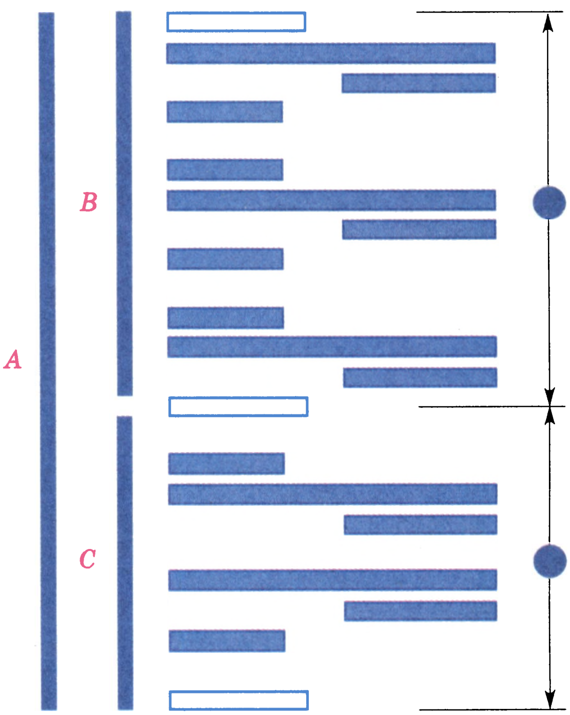
Я – голос
войны, городов головни
на снегу сорок первого года.
Я – голод.

Я – горло
повешенной бабы, чье тело, как колокол,
било над площадью голой ...
Я – Гойя!

О грозди
возмездья! Взвил залпом на Запад –
я пепел незваного гостя!

И в мемориальное небо вбил крепкие
звезды –
как гвозди.

Я – Гойя!



Глядя на структурную схему стихотворения, приведенную справа от текста, легко заметить, что рефрен «Я — Гойя!» делит стихотворное целое *A* на две неравные части *B* и *C*. Обе части зеркально-симметричны относительно срединных строк, что хорошо видно на схеме.

Теперь представим себе, что строки между рефренами «Я — Гойя!» вытянуты в одну линию. Подсчитаем «длину» отрезков *B* и *C*, считая число букв, пропусков между словами и фонетически значимых знаков препинания, т. е. тех, которые обозначают остановку в движении фразы. Тогда $B=207$

и C=125, а их отношение B/C=1,656 равно коэффициенту золотого сечения Ф=1,618 с относительной ошибкой

$$\Delta=\frac{1{,}656-1{,}618}{1{,}618}100\%=2{,}3\%.$$

Если восклицательный знак, обозначающий более яркое выделение фрагмента текста и, как следствие, более длительную паузу, принять равным не одной, а двум точкам, то тогда B=207, C=127 (во второй части стихотворения два восклицательных знака), B/C=1,630 и Δ=0,7%, т. е. закон золотого сечения выполнен с ошибкой 0,7%. При любой схеме расчета мы видим, что рефрен «Я — Гойя» делит стихотворение в пропорции золотого сечения с большой точностью, заключенной в пределах от 1% до 2%. Такой точности могут позавидовать многие инженерные расчеты!

Поскольку золотое сечение есть одна из разновидностей симметрии — симметрия подобия частей и целого (см. гл. 6.3), то, таким образом, в структуре данного стихотворения мы имеем три глобальные симметрии — две зеркальные и одну золотую.

Нетрудно отыскать в стихотворении и еще две глобальные фонетические симметрии. Первая часть стихотворения пронизана ритмом «Я — Го» по следующей зеркально-симметричной схеме:

Я-Гойя – **Я-го**ре – **Я-го**лос – **Я-го**лод – **Я-го**рло – **Я-Го**йя

Во второй части также зеркально-симметричны фонетически подобные фразы «О грозди» — «Как гвозди».

Теперь о локальных симметриях. Стихотворение написано амфибрахием. Ритм стихотворения, как и закон золотого сечения, также выдержан с математической точностью — только в одной строфе ритм отличается от метра. И наконец, рефрен «Я — Гой — Я» также зеркально-симметричен в звуковом отношении.

Итак, 14 строк стихотворения содержат по крайней мере 8 типов симметрии (5 глобальных и 3 локальных):

1) зеркальная симметрия 1-й части;
2) зеркальная симметрия 2-й части;
3) золотое сечение частей и целого;
4) зеркальная симметрия ритма «Я — Го» в 1-й части;
5) зеркальная симметрия фраз «О грозди» — «Как гвозди» во 2-й части;
6) метр амфибрахия;
7) ритм амфибрахия, фактически совпадающий с метром;
8) зеркальная симметрия рефрена «Я — Гой — Я».

Итак, восемь симметрий на четырнадцать строк стихотворения! Не правда ли, здорово?! Принцип симметрии пронизывает во всех направлениях это короткое стихотворение — от симметрии малых форм до симметрии отдельных частей и, наконец, до симметрии подобия частей и целого — золотого сечения. Отточенное на архитектурных пропорциях чувство красоты и меры Вознесенского находит воплощение в его поэзии, делая ее необычайно архитектоничной и соразмерной.

И здесь важно отметить следующее. Конечно, ни Андрей Вознесенский в «Гойе», ни Андрей Рублев в «Троице», ни Иоганн Себастьян Бах в «Хроматической фантазии», ни другие творцы искусства не вычисляли свои золотые пропорции на бумаге. Все рассмотренные нами примеры скорее свидетельствуют о действии в подсознании художника неких природных формообразующих принципов. Эти принципы построения формы в равной мере определяют как морфологию природы, так и морфологию искусства. Дремлющие в подсознании художника или внушаемые ему Главным Творцом универсальные принципы формы в конце концов выплескиваются наружу и материализуются в его бессмертных творениях. И здесь уместно еще раз вспомнить знаменитое высказывание Лейбница в письме Гольбаху от 17 апреля 1712 г., стоящее эпиграфом к главе 12: «Музыка есть таинственная арифметика души, которая вычисляет себя, сама того не сознавая». В равной мере это относится и к поэзии.

Нам же остается только показать, что золотое сечение в «Гойе» Вознесенского не является «белой вороной» в поэзии, что *закон золотого сечения является основным формообразующим законом поэзии, действующим во все времена и на всех уровнях построения поэтической формы.*

Ясно *a priori*, что наиболее ярко золотое сечение действует на уровне композиции поэтической формы, ибо в отличие от переносной симметрии для проявления симметрии подобия нужен минимальный «оперативный простор», минимум элементов, составляющих форму. Этот минимум задается числами Фибоначчи 3, 5, 8, ниже которых в ряду Фибоначчи опускаться просто нельзя, ибо они аппроксимируют закон золотого сечения слишком грубо (см. гл. 17). Гораздо лучшее приближение к золотому сечению дает тройка чисел Фибоначчи — 5, 8, 13, очень хорошее — 8, 13, 21 и т. д. Какие же золотые пропорции можно разглядеть на уровне метрики?

...В истории мировой культуры есть поэты, ставшие символом нации: Гомер — это Эллада, Данте — Италия, Шекспир — Англия, Пушкин — Россия. Шота Руставели и его поэма «Витязь в тигровой шкуре» — это Грузия. Написанная в XII в., поэма Руставели только в конце XIX в. была открыта европейской культурой, подобно Трое, открытой в то же время Шлиманом. Перед изумленной Европой предстал совершенный литературный памятник.

Жил в Аравии когда-то царь от Бога, царь счастливый,
Ростеван, искусный воин и владыка справедливый.
Снисходительный и щедрый, величавый и правдивый.
Был он грозный полководец и мудрец красноречивый.

Исследователей давно мучила загадка гармонии поэмы Руставели, и ее потому никак не удавалось разгадать, что большинство лингвистов подходило к поэме с мерками русского силлабо-тонического стихосложения, тогда как «Витязь...» написан в силлабической системе. Тайну гармонии «Витязя...» открыл выдающийся грузинский лингвист академик АН СССР Георгий Церетели (1904—1973).

«Витязь...» написан строфами из четырех стихов — катренами. Каждый стих состоит из 16 слогов и делится на два равных *полустишия* по 8 слогов с *цезурой*[1] между полустишиями. Полустишие, в свою очередь, делится на два *сегмента* своей цезурой. Таким образом, сразу же бросается в глаза самоподобие, *фрактальность структуры строфы и стиха «Витязя...»: в строфе — 16 сегментов по 4 стиха, в стихе — 16 слогов по 4 сегмента.*

Деление полустишия на сегменты допускается только двух типов:

A — *симметричное*: полустишие состоит из двух равных сегментов (8=4+4);

B — *асимметричное:* полустишие состоит из двух неравных сегментов (8=5+3 или 8=3+5).

Чередование сегментов типа *A* и *B* в пределах стиха или строфы запрещено. Таким образом, сегменты типа *A* или *B* образуют строфы различных ритмических структур:

строфа типа A — высокий шаири

$\cup\cup\cup\cup|\cup\cup\cup\cup\|\cup\cup\cup\cup|\cup\cup\cup\cup$

строфа типа B — низкий шаири

$\cup\cup\cup\cup\cup|\cup\cup\cup\|\cup\cup\cup\cup\cup|\cup\cup\cup$

или

$\cup\cup\cup|\cup\cup\cup\cup\cup\|\cup\cup\cup|\cup\cup\cup\cup\cup$

Здесь $\cup$ обозначает слог, $|$ — цезуру в полустишии, $\|$ — цезуру в стихе. Наш искушенный в симметрии читатель легко заметит, что метрика высокого шаири целиком построена на зеркальной симметрии (16=8+8, 8=4+4), а метрика низкого шаири — на сочетании зеркальной симметрии и пропорции золотого сечения (16=8+8, 8=5+3=3+5).

Объединив в поэме высокий и низкий шаири, Руставели одновременно решил массу художественных и технических задач. Во-первых, общая для обоих метров главная цезура на 8-м слоге объединяла метрику всей поэмы, а ее зеркальная симметрия придавала каждому стиху уравновешенность. Во-вторых, чередование зеркальной симметрии и золотого сечения в

[1] *Цезура* (от лат. *caesura* — разрез) — постоянный словораздел в стихе.

полустишиях высокого и низкого шаири разнообразило ритмический рисунок поэмы. Соотношение двух метров в поэме также зеркально-симметрично: из приблизительно 1600 катренов поэмы (это число колеблется в зависимости от редакции текста) около 850 написаны низким шаири и 750 — высоким. В третьих, использование в поэме низкого шаири позволило Руставели употреблять пятисложные слова (их в поэме около 1500, или 4%), использование которых в высоком шаири просто запрещено законами метрики. И так далее.

Но самым блистательным математико-поэтическим решением Руставели был выбор именно 16-сложного стиха поэмы. Ясно, что любой стих с четным числом слогов можно разбить на два равных полустишия. Но только полустишие из 8 слогов допускает одновременно разбиение по принципу дихотомии (зеркальная симметрия) и по принципу золотого сечения (динамическая симметрия). В самом деле, если взять основную единицу силлабического стиха — слог и затем наращивать эту единицу по принципу удвоения и по принципу Фибоначчи, то получим два ряда чисел:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,...
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...

Если отбросить единицы и двойки, которые не могут образовывать полноценные полустишия, мы видим *единственное общее число для обеих систем — 8!* Именно это число слогов в полустишии и выбрал гениальный математик и поэт Шота Руставели!

«Витязь в тигровой шкуре» дарует нам уникальный пример метрической организации грандиозной поэмы на основе закона золотого сечения. Сегодня востоковеды и лингвисты терзаются сомнениями: знал ли Руставели закон золотого сечения? Сознательно применил или бессознательно привнес золотую пропорцию в метрику низкого шаири? Этого мы также не знаем. Но мы знаем, что далее, на уровне строфики, и в особенности композиции, начинается обширное царство закона золотого сечения в поэзии. И нам предстоит приоткрыть двери этого царства.

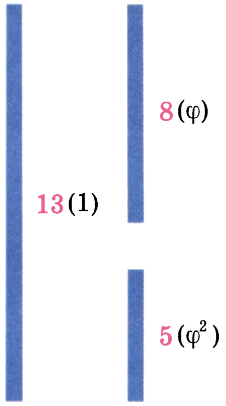
Рассмотрим небольшое и незатейливое стихотворение Пушкина «Сапожник» (см. с. 340). В нем всего 13 строк, объединенных в 2 строфы из 8 и 5 строк.

Как видим, строфика стихотворения построена на числах Фибоначчи 5, 8, 13 (8+5=13), т. е. отвечает закону золотого сечения. И это несмотря на то, что поэту всегда удобнее рифмовать строфы с четным числом стихов!

Легко заметить, что закон золотого сечения в данном случае организует не только строфическую структуру стихотворения, но и его смысловую структуру. В самом деле, «Сапожник» является не чем иным, как басней с обязательной басенной антитезой *сюжет — иносказание*. Первая строфа есть басенный сюжет, вторая — иносказание. Так что в данном случае закон золотого сечения играет не только *морфологическую*[1],

С. КОБУЛАДЗЕ. Иллюстрация к поэме Шота Руставели «Витязь в тигровой шкуре». *1935—1937 гг.*
Предоставляем читателю самостоятельно определить линии золотого сечения в композиции этой гравюры Кобуладзе.

[1] *Морфология* (от греч. μορφη — наружность, форма) — учение о форме.



Картину раз высматривал сапожник
И в обуви ошибку указал;
Взяв тотчас кисть, исправился художник.
Вот, подбочась, сапожник продолжал:
«Мне кажется, лицо немного криво…
А эта грудь не слишком ли нага?»…
Тут Апеллес прервал нетерпеливо:
«Суди, дружок, не свыше сапога!»

Есть у меня приятель на примете:
Не ведаю, в каком бы он предмете
Был знатоком, хоть строг он на словах,
Но черт его несет судить о свете:
Попробуй он судить о сапогах!

формообразующую, но и *семантическую*[1], *смыслообразующую,* роль. Морфологическая и семантическая функции золотого сечения проявлены в «Сапожнике» исключительно ярко, а благодаря числам Фибоначчи — и предельно точно. Вообще как форма и содержание в искусстве неразделимы, так морфология и семантика золотого сечения слиты воедино.

Помимо *разделительной функции,* определяющей границу смысловых частей стихотворения, золотое сечение часто указывает на *кульминацию* и *главную мысль* художественной формы. Еще чаще все эти семантические функции золотого сечения слиты воедино. Возьмем знаменитую «Вакхическую песню» Пушкина.

Что смолкнул веселия глас?
Раздайтесь, вакхальны припевы!
Да здравствуют нежные девы
И юные жены, любившие нас!
Полнее стакан наливайте!
На звонкое дно
В густое вино
Заветные кольца бросайте!
Поднимем бокалы, содвинем их разом!
Да здравствуют музы, да здравствует разум!
Ты, солнце святое, гори!
Как эта лампада бледнеет
Пред ясным восходом зари,
Так ложная мудрость мерцает и тлеет
Пред солнцем бессмертным ума.
Да здравствует солнце, да скроется тьма!

Вряд ли у кого возникнут сомнения в том, что ставшая крылатой десятая строка стихотворения *Да здравствуют музы, да здравствует разум!* концентрирует в себе главную мысль стихотворения. Где расположена эта строка? Точно на линии золотого сечения! (16/10=1,6).

Или вот знаменитое «Бородино» Лермонтова. Стихотворение состоит из 14 строф по 7 стихов в каждой, а семантически делится на *вступление* — обращение к ветерану Бородина (1-я строфа) и *главную часть* — рассказ старого солдата (13 строф). Морфология главной части построена на эпаналепсисе, т. е. зеркально-симметрична — ее первая и последняя строфы фактически тождественны: «Да, были люди в наше время…» Это придает главной части величавую устойчивость, сродни крепости и надежности старого участника Бородина.

Семантика же главной части основана на неравновесной динамической симметрии золотого сечения, что придает рассказу особый динамизм. В самом деле, главная часть состоит из двух повествований: *ожидание боя* (8 строф) и *описание боя* (5 строф), т. е. построена на числах Фибоначчи (8+5=13). Напряжение ожидания боя в первом повествовании все более нарастает и достигает высшей точки в словах *«Ну ж был денек!»* — начале второго повествования. Затем картина боя постепенно успокаивается («Вот смерклось…») и рассказ возвращается к исходному философствованию («Да, были люди в наше время…»). Так что строка *«Ну ж был денек!..»* — классическая кульминация, семантическая вершина рассказа. Расположена она на границе первого (8 строф) и второго (5 строф) повествований, т. е. точно на линии золотого сечения! (Понятно, что золотую пропорцию здесь можно

[1] *Семантика* (от греч. σημα — знак) — учение о смысловой функции языка.

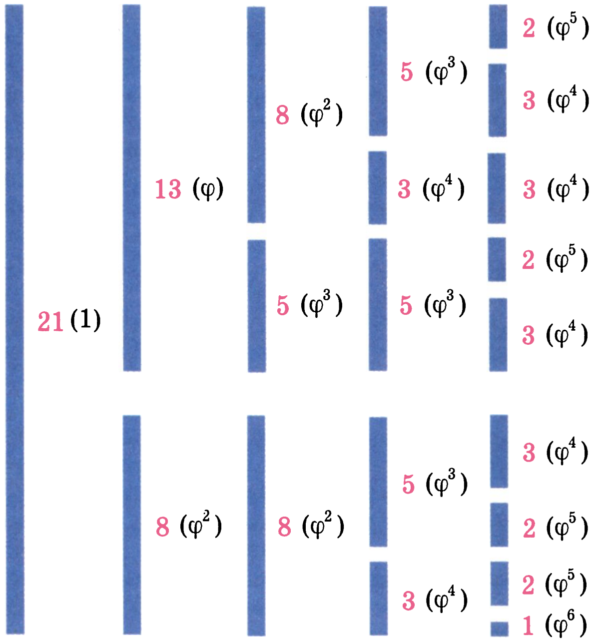
проверить и более точно, пересчитав стихи главной части.) Строго говоря, строка *«Ну ж был денек!..»* вмещает в себя все функции золотого сечения: это и граница смысловых частей рассказа (ожидание боя — описание боя); это и кульминация рассказа; это и его главная мысль, ибо весь рассказ посвящен только одному «деньку» Бородина.

Различные функции золотого сечения в художественной форме — будь то поэтическое или музыкальное произведение — были впервые отмечены Э. К. Розеновым в докладе «Закон золотого сечения в поэзии и музыке», на который мы уже ссылались в 12-й главе. Там же на примере «Хроматической фантазии» И. С. Баха мы видели, что золотая пропорция «не живет» в одиночку, что, возникнув единожды в художественном целом, золотая пропорция порождает семейство себе подобных в частях целого, т. е. порождает теоретически бесконечный ряд золотого сечения. Таким образом, ряд золотого сечения обусловливает структурное самоподобие целого и его частей, т. е. является *морфологическим фракталом*.

А возможно ли нечто подобное в поэзии? Разумеется, да, ибо с точки зрения законов построения формы разницы между поэзией и музыкой нет никакой. Прекрасный пример *поэтического фрактала*, построенного на самоподобии пропорций золотого сечения, дает стихотворение Пушкина «Из Пиндемонти».

Это стихотворение, содержавшее сокровенные мысли Пушкина и только по цензурным соображениям отсылавшее в заглавии к малоизвестному итальянскому поэту Пиндемонти, написано в 1836 г., менее чем за год до гибели поэта, когда Пушкин находился на вершине поэтического мастерства. Структура стихотворения построена на числах Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, отчего закон золотого сечения выполнен в нем с предельной точностью. Рассмотрим эту структуру подробнее.

И. Е. РЕПИН. А. С. Пушкин на акте в Лицее 8 января 1815 года.
Две линии золотого сечения картины по вертикали и горизонтали определяют основные композиционные элементы картины — фигуру юного Пушкина и фигуры присутствующей на акте публики.



Не дорого ценю я громкие права,
От коих не одна кружится голова.
Я не ропщу о том, что отказали боги
Мне в сладкой участи оспоривать налоги
Или мешать царям друг с другом воевать;
И мало горя мне, свободно ли печать
Морочит олухов, иль чуткая цензура
В журнальных замыслах стесняет балагура.
Все это, видите ль, *слова, слова, слова.*
Иные, лучшие мне дороги права;
Иная, лучшая потребна мне свобода:
Зависеть от царя, зависеть от народа –
Не все ли нам равно? Бог с ними.
Никому
Отчета не давать, себе лишь самому
Служить и угождать; для власти, для ливреи
Не гнуть ни совести, ни помыслов, ни шеи;
По прихоти своей скитаться здесь и там,
Дивясь божественным природы красотам,
И пред созданьями искусств и вдохновенья
Трепеща радостно в восторгах умиленья.
Вот счастье! Вот права…

Прежде всего в структуре «Из Пиндемонти» бросается в глаза излом 13-й строки — слово *Никому* оторвано Пушкиным от родного стиха и помещено отдельно. Тем самым четко выделяется граница между двумя основными смысловыми частями стихотворения: *их ценности — низость земного раболепия* (13 строк) и *мои ценности — высота духовной свободы* (8 строк). Части находятся в золотой пропорции. Первая часть, в свою очередь, делится золотой пропорцией по принципу антитезы: *описание мнимых ценностей* (8 строк) и *отвержение их автором* (5 строк) — «Все это, видите ль, *слова, слова, слова…*». И так далее. Смыслы стихотворения дробятся на все меньшие и меньшие самоподобные части, вплоть до трех, двух и даже одной строки. Морфологически эти части организуются знаками препинания.

Н. Н. ГЕ. Александр Сергеевич Пушкин в селе Михайловском.
Трехчастные структуры золотого сечения $\varphi^2 : \varphi^2 : \varphi^3$ определяют композиционный строй картины по вертикали и горизонтали.

Итак, «Из Пиндемонти» есть прекрасный пример морфологического и семантического фрактала, построенного на ряде золотого сечения. С одной стороны, ряд золотого сечения обеспечивает структурное самоподобие целого и его частей, т. е. выступает как морфологический фрактал. С другой стороны, тот же ряд золотого сечения определяет и смены смыслов художественного текста, что позволяет назвать его семантическим фракталом.

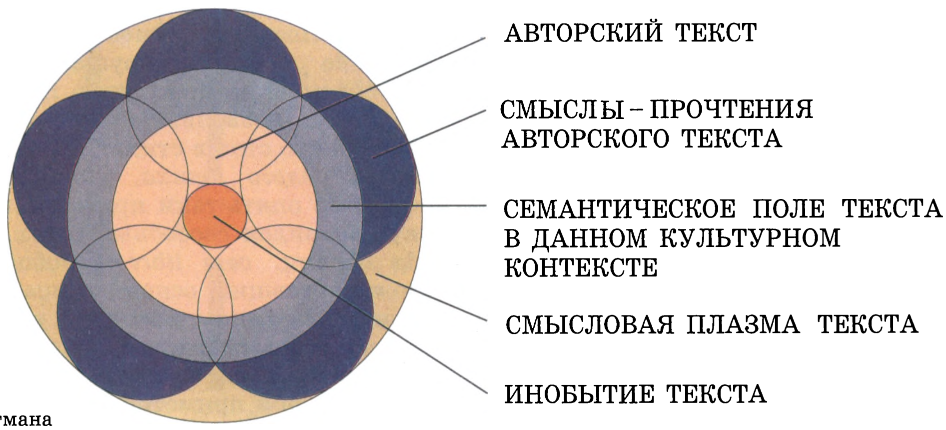
Если же принять во внимание, что за каждой сменой смыслов стоит также и фрактально бесконечная смена толкований этих смыслов при каждом новом прочтении, то важность золотого сечения как семантического фрактала возрастет неизмеримо. По существу, свойство семантической фрактальности и обеспечивает вечную жизнь каждому истинному произведению искусства. Давно замечено, что каждая эпоха толкует поэта на свой лад, каждый человек несет в себе своего Пушкина, но и в течение жизни этот «свой» Пушкин у каждого человека является разным. Вся эта бесконечная цепь самоподобных прочтений одного и того же произведения, когда новое прочтение старого рождает новые смыслы — вспомним последовательное «разглядывание под лупой» фрактальных структур в главе 5, и есть *семантическая фрактальность искусства.*

Проблема соотношения авторского текста и совокупности смыслов, извлекаемых из него читателем и целой культурной эпохой, — серьезнейшая философская и междисциплинарная проблема, которой в России занимались и занимаются такие выдающиеся мыслители, как М. М. Бахтин (1895—1975), Ю. М. Лотман (1922—1993), В. В. Налимов (1910—1996), Д. С. Лихачев, С. С. Аверинцев, М. Л. Гаспаров, Вяч. Вс. Иванов и другие. Вот как пишет о проблеме *текста и смысла* в статье «Структура текста и культурный контекст» Б. М. Гаспаров: «Смысл всякого текста — прозаического и поэтического, художественного и нехудожественного — складывается во взаимодействии и борьбе различных, даже противоположных смыслообразующих сил. С одной стороны, текст представляет собой некое построение, созданное при помощи определенных приемов... С другой стороны, текст представляет собой частицу непрерывно движущегося потока человеческого опыта... В своей двуплановой сущности текст выступает и как артефакт, то есть целостный и законченный продукт конструктивной деятельности, и как аккумулятор открытого и текучего континуума культурного опыта и культурной памяти». Итак, всякий текст имеет двуплановую знаково-смысловую природу, которую можно изобразить формулой

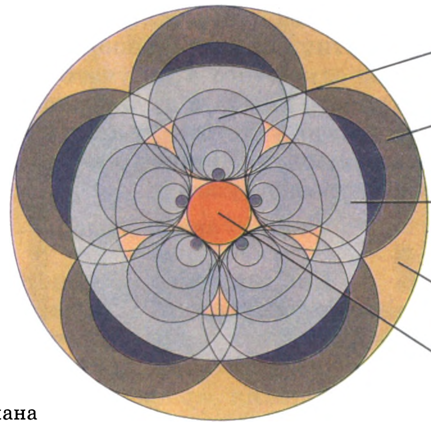
текст=знак+смысл.

В. А. Копцик, физик, кристаллограф, почетный профессор МГУ, а также известный теоретик искусства, автор *синергетико-симметрологической концепции искусства,* предложил красивую графическую модель проблемы текст+смысл, которую он назвал *цветок Лотмана.* Сердцевину цветка Лотмана (желтый круг) представляет *авторский текст,* понимаемый в узком значении как материально-знаковое воплощение авторской мысли. Авторский текст несет в себе некую совокупность смыслов, которые при прочтении могут оказаться шире смыслов, заложенных самим автором. Вот почему лепестки цветка Лотмана — *смыслы отдельных компонент авторского текста* — выходят за границы сердцевины цветка. Это не только те смыслы, которые вложил в свой текст автор, но и те новые идеи, которые привнесли в текст читатель и его культурная эпоха.

Лепестки-смыслы рождают вокруг цветка некую ауру, некое благоухание, которое В. Налимов назвал *семантическим полем,* Ю. Лотман — *семиосферой,* Б. Гаспаров — *смысловой плазмой.* Смысловая плазма — это интегральный смысл текста, построенный совместно автором, читателем и его эпохой, это в том числе и те новые смыслы,



Цветок Лотмана



Роза Лотмана

о которых и не предполагал сам автор текста. Удивительно, насколько остро прочувствовал эту проблему более ста лет назад гениальный русский поэт и философ Федор Тютчев:

> Нам не дано предугадать,
> Как наше слово отзовется...

Но даже интегральное смысловое поле, смысловая плазма не в состоянии охватить все многообразие смыслов, таящихся в авторском тексте. Поэтому в нем всегда остаются некие неосознанные, нераскрытые, потаенные смыслы, некое *«инобытие текста»*, которое на цветке Лотмана представлено его нетронутой сердцевиной. В результате раскрытый данной культурной эпохой совокупный смысл текста получается в чем-то шире, а в чем-то уже исходного авторского текста. Так рождается *семантическое поле текста в конкретном культурном контексте* — это синее кольцо в цветке Лотмана, превышающее авторский текст, но не достигающее его центра. Цветок Лотмана — красивый и глубокий символ проблемы прочтения замыслов художника. Недаром цветок Лотмана стал эмблемой проходившей в 1996 г. в Суздале Международной конференции «Математика и искусство».

Когда В. Копцик обдумывал структуру цветка Лотмана, идея фрактала, что называется, только носилась в воздухе. Сегодня в развитие идеи Копцика мы хотим предложить *розу Лотмана.* Роза является идеальным воплощением идеи самоподобия в природе. Вложенные друг в друга и непрерывно уменьшающиеся к сердцевине лепестки розы составляют самоподобный фрактальный бутон. Никто не знает, сколько у розы таких лепестков! Но также и каждый конкретный смысл авторского текста представляет собой не конечный фрагмент, а самоподобный бесконечный ряд вложенных друг в друга смыслов-прочтений. Поэтому порождаемые авторским текстом смыслы лучше изображать не в виде набора дискретных лепестков ромашки, а в виде бесконечных рядов самоподобных лепестков розы. Изображая условно «лепестки розы» в виде набора касающихся в одной точке окружностей, мы получим *фрактальную розу Лотмана,* состоящую из бесконечного числа самоподобных прочтений каждого нового смысла.

Но вернемся от философии текста к самим текстам. От розы Лотмана перейдем к благоухающей розе, имя которой русская поэзия. Вернемся к лучшим цветкам поэзии...

Современное искусство идет по пути разрушения формы, и если в нем и осталось что-то от формы, то только ритм барабанного боя. Поэзия, разумеется, не оказалась в стороне от формоche разрушающих тенденций современного искусства. Помимо *вольного стиха*, позволявшего себе нефиксированное число стоп в стихах одной метрики, помимо *белого стиха,* игнорировавшего рифму, но опять-таки признававшего метрику, появился *свободный стих*, или *верлибр* (франц. *vers libre* — свободные стихи), отвергавший основу основ поэзии — метрику и ритмику, а заодно и рифму. Если вольным и белым стихом баловались порой классики XIX в., то свободный стих стал отличительной приметой поэзии XX в. Но отвергает ли верлибр законы симметрии в поэзии?

Отнюдь. Более того, при переходе от классической метрики к верлибру мы сталкиваемся с феноменом, который можно назвать *закон сохранения симметрии в поэзии*. Покинув в свободном стихе уровни метра, ритма и рифмы, законы симметрии стали с большей силой проявлять себя в композиции стихотворения, а также на интонационно-синтаксическом уровне. Четкая и ясная переносная симметрия стоп в метрической поэзии сменяется в верлибре более утонченной и завуалированной симметрией звуковых рядов, границы которых обозначаются синтаксическим членением. Краткие метрические единицы — стопы — сменяются в верлибре более протяженными ритмическими единицами — звуковыми рядами. Симметрия становится более сложной и менее броской. Но это вовсе не означает, что она исчезла.

Рассмотрим стихотворение из цикла «Александрийские ночи» признанного мастера верлибра замечательного русского поэта Михаила Кузмина (1872—1936).

«Александрия» состоит из трех строф, но это одновременно и три предложения, три синтаксически замкнутых ряда, исчерпывающие три темы: *блаженная Александрия, мудрая Александрия, великая Александрия.* Структура первых двух строф абсолютно тождественна. Мы видим, как на смену классической переносной симметрии метра в «Александрии» приходит переносная симметрия анафорических рядов: *как песня матери..., как горное эхо..., как далекий прибой...* . Все шесть анафорических рядов в обеих строфах построены одинаково и распадаются на две синтаксические группы: *первая группа* содержит три элемента — анафорическое *как*, основное существительное и его ближайшее определение (*как песня матери, как горное эхо* и т. д.); *вторая группа* содержит дальнейшее определение основного существительного (*песня — над колыбелью ребенка, эхо — утром на пастуший рожок отозвавшееся* и т. д.). Переносная симметрия данных синтаксических групп в стихотворении тем более очевидна, что она подчеркивается выделением этих групп в отдельные строки (стихи).

21 (1)

8 (φ^2)

Как песня матери
над колыбелью ребенка,
как горное эхо,
утром на пастуший рожок отозвавшееся,
как далекий прибой
родного, давно не виденного моря,
звучит мне имя твое
трижды блаженное:
Александрия!

8 (φ^2)

Как прерывистый шепот
любовных под дубом признаний,
как таинственный шум
тенистых рощ священных,
как тамбурин Кибелы великой,
подобный дальнему грому и голубей воркованью,
звучит мне имя твое
трижды мудрое
Александрия!

5 (φ^3)

Как звуки трубы перед боем,
клекот орлов над бездной,
шум крыльев летящей Ники,
звучит мне имя твое
трижды великое:
Александрия!

Третья, заключительная строфа «Александрии» укорочена и построена на симметрии трех кратких сравнений, выделенных в три строки. Она звучит как заключительный аккорд после двух предыдущих арпеджио. Наконец, заканчиваются все три строфы тождественными по форме концовками, которые, однако, различаются единственным определением — *блаженное, мудрое, великое.* Это определение заключает в себе семантику каждой строфы. В целом же все три концовки дают нам прекрасный пример цветной симметрии в поэзии, когда сохраняется форма, но меняется качество.

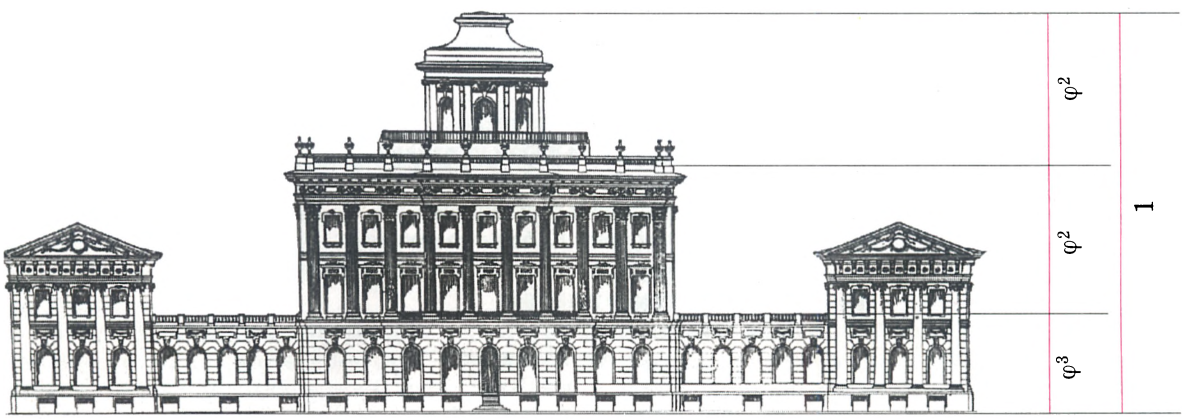
Итак, *в основе формообразования в верлибре лежит переносная симметрия синтаксических рядов.* Помимо «синтаксической» симметрии, «Александрия» содержит и симметрию ударных долей как некий рецидив удаленного тонического метра. Первые стихи анафорических рядов содержат две ударные доли: *как песня матери, как горное эхо, как далекий прибой,* тогда как число неударных долей в них различное. Стих, построенный на симметрии (равенстве) *ударных долей* — словесных групп, объединенных ударением при произвольном числе и расположении безударных слогов, называется *дольником.*

Так что 1, 3, 5-й стихи первых двух строф «Александрии» написаны двухударным дольником. Однако верлибр не был бы верлибром, если бы этот тип симметрии сохранялся во всем стихотворении. 2, 4, 6-й стихи тех же строф содержат различное число ударных долей, т. е. теряют «ударную» симметрию, сохраняя «синтаксическую».

Но главный сюрприз «Александрии» нас ждет впереди. Ясно, что рефрен *«Александрия!»* служит своеобразной линией раздела между строфами. Это как бы черта под строфой, отграничивающая остальное содержание строфы. Но тогда первые две строфы состоят из 8 строк, а третья — из 5 (8+8+5=21). Но это опять числа Фибоначчи! Таким образом, в отличие от двухчастной структуры золотого сечения «Гойи», рефрен *«Александрия!»* делит стихотворение на 3 части, относящиеся в золотой пропорции:

$$\varphi^2 : \varphi^2 : \varphi^3 \quad (\varphi^2+\varphi^2+\varphi^3=1).$$

Трехчастное деление целого в золотой пропорции — важнейший закон гармонизации художественной формы, который мы находим в самых различных искусствах. В следующей главе мы еще вернемся к трехчастным золотым структурам в искусстве несимметричного $\varphi^2 : \varphi^2 : \varphi^3$ и симметричного $\varphi^2 : \varphi^3 : \varphi^2$ типов. Сейчас же нам остается сделать еще один шаг на пути деструктуризации словесной формы и перейти от свободного стиха к прозе.



В. И. БАЖЕНОВ. *1784—1786 гг.* Дом Пашкова в Москве (ныне старое здание Государственной национальной библиотеки).
Гармония этого шедевра русского зодчества основана на горизонтальной зеркальной симметрии и трехчастной динамической симметрии $\varphi^2 : \varphi^2 : \varphi^3$ по вертикали.

28.
ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ В ПРОЗЕ

Подобно живой клетке искусство являет нам одну из наиболее сложных структур с комплексной системой внутренних саморегуляций и обратных связей.

Ю. М. ЛОТМАН

Кажется, будто вчера, а тому уже не год и не два, я сидел у изголовья тяжело болевшей мамы. Мы были одни в потускневшей от болезни хозяйки квартире. Мама забылась или заснула. Было ясно, что это последняя ее болезнь. От этого все валилось из рук, и не хотелось даже читать. Я тупо смотрел в угол, но в конце концов пересилил себя и раскрыл наугад томик с пестрыми рассказами Чехова. Рассказ назывался «Шуточка».

Содержание рассказа по-чеховски просто и непритязательно — вечная тема любви. Гимназист любит, а может, и не любит гимназистку и шепчет ей на ухо заветные слова: «Я люблю вас, Надя!» Любовь их, как водится, распалась, прошли годы, но зрелая Надя, мать троих детей, все еще вспоминает ласковый шепот: «Я люблю вас, Наденька!» Вот и все. Сюжет рассказа уместился у нас в два предложения, да и у Чехова он занимает чуть более четырех страниц. Но так ли прост рассказ как художественное целое? Какие скрытые пружины делают эту банальную историю маленьким литературным шедевром?

Чтобы ответить на эти вопросы, приглядимся к рассказу пристальнее. Итак... «Ясный зимний полдень... Мороз крепок, трещит, и у Наденьки, которая держит меня под руку, покрываются серебристым инеем кудри на висках и пушок над верхней губой». Наденька и ее кавалер — имени его мы даже не знаем —стоят на высокой горе, и кавалер приглашает Наденьку скатиться на санках вниз. Наденька очень боится, но наконец уступает, и они летят на санках с горы. «Рассекаемый воздух бьет в лицо, ревет, свистит в ушах, рвет, больно щиплет от злости, хочет сорвать с плеч голову». И в этот момент кавалер говорит вполголоса: *«Я люблю вас, Надя!»*

Санки наконец остановились. Надя ни жива ни мертва и глядя на кавалера полными ужаса глазами, восклицает: «Ни за что в другой раз не поеду!» Они долго гуляют вокруг горы, но гулянье не в радость Наденьке. Ее мучит загадка: были ли те слова в самом деле или ей только почудилось на ветру? В конце концов Надя сама предлагает скатиться с горы еще раз. Снова шумит ветер, жужжат полозья и при самом сильном порыве ветра Надя снова слышит заветные слова: *«Я люблю вас, Наденька!»*

Так повторяется в третий раз, а на следующий день и в четвертый. И каждый раз в шуме ветра Надя слышит волшебную фразу: *«Я люблю вас, Надя!»* На этом первая часть рассказа заканчивается.

«Скоро Наденька привыкает к этой фразе, как к вину или морфию. Она жить без нее не может». И Надя решается испытать судьбу — съехать на санках одной и узнать, ветер ли шепчет ей эти слова. Наде страшно, она бела как снег. Но жребий брошен, она съезжает и... и не понимает, были ли те слова или не были.

А между тем наступает март, гора тает, да и кавалеру настает время собираться в Петербург. Но перед отъездом он видит сквозь щели забора поникшую Наденьку на крыльце ее дома, и, дождавшись порыва ветра, он шепчет все то же: *«Я люблю вас, Надя!»*

А время бежит и разлучает молодых навсегда. И Наденька теперь жена секретаря дворянской опеки, и теперь у нее трое детей. Но самым счастливым и трогательным воспоминанием для нее остаются те слова, которые шептал ей то ли ветер, то ли еще кто-то: *«Я люблю вас, Наденька!»*

Не будем обсуждать содержание этого светлого, как морозный день, и чуть грустного, как ранняя весна, рассказа. Не будем

Б. М. КУСТОДИЕВ. Масленица. *1916 г.*
Цикл картин Кустодиева «Масленица» пронизан светлой и здоровой чистотой русской природы, в которой, как морозная пыль в зимнем воздухе, искрится веселье и удаль русского человека. Однако в построении формы Кустодиев по-немецки строг: вертикальный и горизонтальный строй картины определен трехчастными симметричными структурами золотого сечения $\varphi^2 : \varphi^3 : \varphi^2$ (найдите их).

обсуждать и тем более осуждать поведение гимназиста (да и гимназиста ли?), который и по прошествии лет не знает, говорил ли он правду или только шутил. Нас, как и везде в этой книге, интересует форма рассказа как художественного целого. И эта форма, словно в противовес незатейливому содержанию, отнюдь не проста.

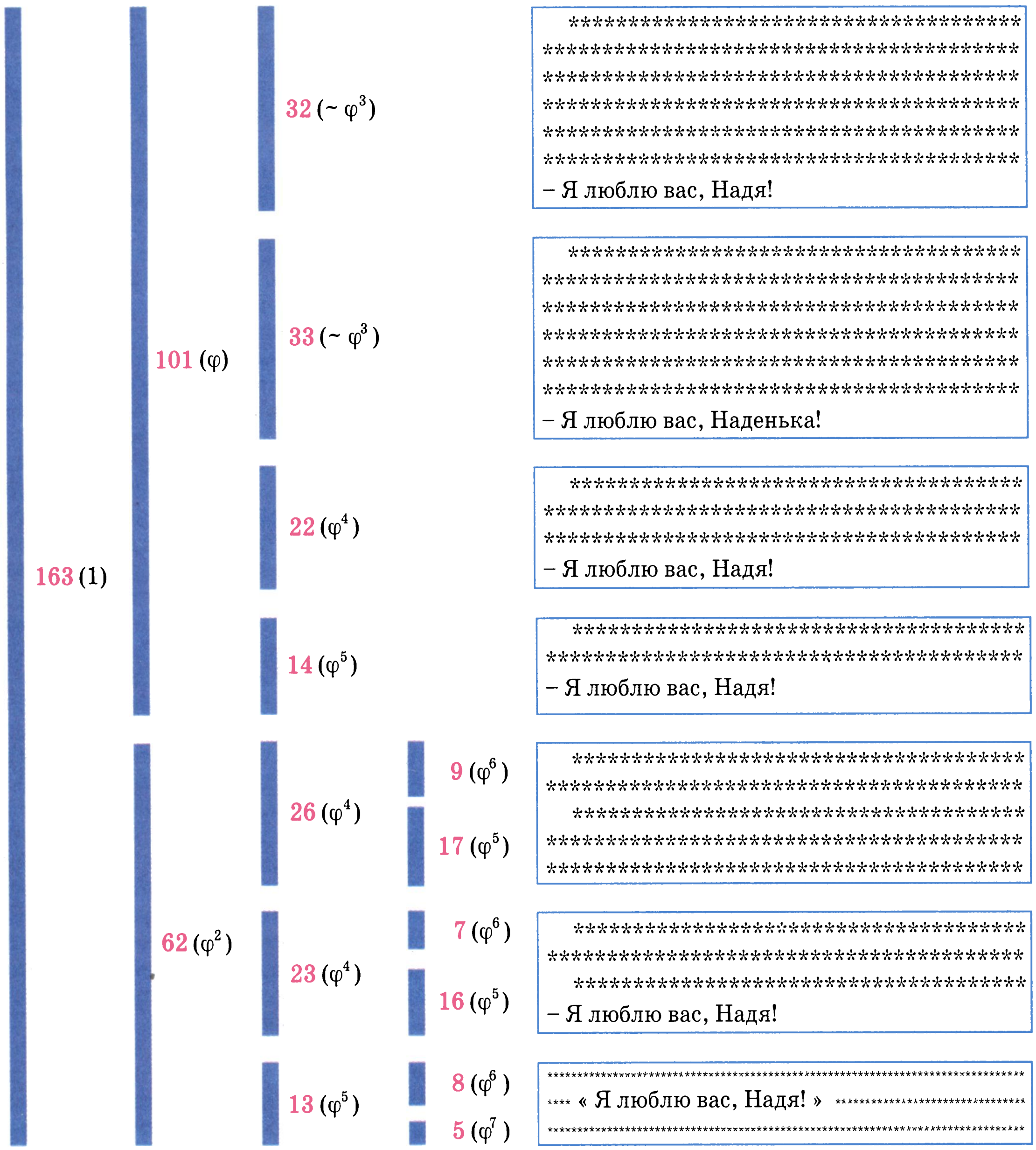
Рассказ распадается на две части. Первую, мажорную часть, когда беззаботные гимназисты катаются на санках, можно назвать одним словом *«вместе»*. Вторую, чуть грустную часть, в которой юные друзья расстаются, озаглавим *«одни»*. Эти две части заключают в себе основную антитезу или семантическую антисимметрию рассказа. Какова морфология этих частей?

Всего в рассказе 163 строки; в первой части 101, а во второй — 62. Неважно, по какому изданию мы подсчитываем число строк. Важно не абсолютное число строк, а их отношение, которое для всех изданий будет одним и тем же. И это отношение в рассказе поразительно точно выдержано в золотой пропорции: $163/101=1{,}614$ ($\varphi=1{,}618$, и, значит, относительная ошибка $\Delta\varphi=0{,}25\%$!). Итак, нормированная (отнесенная к общему числу строк) длина первой части рассказа равна φ, второй части — φ^2 ($\varphi+\varphi^2=1$).

Первая часть «Шуточки», в свою очередь, делится на четыре фрагмента рефреном *«Я люблю вас, Наденька!»*. Первые два фрагмента (32 и 33 строки соответственно) фактически одинаковы по объему, и их нормированная длина близка к φ^3. Структурная симметрия первых двух фрагментов придает началу рассказа спокойную уравновешенность, создает впечатление неизменной устойчивости в отношениях молодых людей, готовых вечно быть вместе. Далее скорость развития событий нарастает, как скорость несущихся с горы санок. Третий фрагмент (24 строки) имеет относительную длину φ^4, а четвертый (14 строк) — φ^5.

С точки зрения математики гармонии первую часть «Шуточки» следовало бы поделить на три фрагмента: φ^3, φ^3, φ^4

($\varphi^3+\varphi^3+\varphi^4=\varphi^3+\varphi^2=\varphi$). Такая трехчастная композиция первой части была бы более размеренной и гармоничной. Именно так выглядит структура большинства народных сказок, где описываемое событие непременно повторяется три раза, причем в третий раз действие развертывается быстрее, чем в первые два. Однако Чехов, наперекор математическим законам гармонии, делает первые два фрагмента на 5—6 строк короче и за счет этого вводит в первую часть четвертый, самый короткий фрагмент. Пропорциональный строй первой части явно утяжеляется, но это оправдано художественными целями автора: перегружая часть *«вместе»* положительными эмоциями — четвертым рефреном *«Я люблю вас, Наденька!»*, Чехов усиливает драматизм предстоящей разлуки во второй части *«одни»*.



Разумеется, подобная перегрузка никак не возможна во второй части рассказа, где на смену радости приходит грусть. Вторая часть *«одни»* построена по классической трехчастной схеме, а семантика всех ее фрагментов так или иначе связана со словом «конец»: *«конец совместных катаний», «конец зимы», «конец безмятежной юности»*. Морфология второй части, как уже догадывается читатель, целиком построена на золотой пропорции $\varphi^4 : \varphi^4 : \varphi^5$ ($\varphi^4+\varphi^4+\varphi^5=\varphi^4+\varphi^3=\varphi^2$). Заметим, что первый фрагмент второй части (26 строк) на 2 строки превышает его теоретическую длину ($a\varphi^4=24$, $a=163$), а второй (23 строки) и третий (13 строк) — на одну строку короче. Мы видим, как Чехов, непревзойденный мастер короткого и динамичного рассказа, «разгоняет» рассказ по мере приближения к концу.

И последнее. Первые два фрагмента второй части состоят всего из двух абзацев каждый. Предоставляя читателю самостоятельно определить семантику этих абзацев, заметим, что их морфология тождественна и их длины снова относятся в золотой пропорции $\varphi^6 : \varphi^5$ ($\varphi^6+\varphi^5=\varphi^4$). Наконец, в третьем фрагменте, теперь уже внутри текста, в последний раз встречается рефрен *«Я люблю вас, Наденька!»*, и он опять-таки делит третий фрагмент в золотой пропорции $\varphi^6 : \varphi^7$ ($\varphi^6+\varphi^7=\varphi^5$). Мы видим, что вторая часть «Шуточки» является необычайно гармоничной. Она буквально соткана из самоподобных золотых пропорций, т. е. является морфологическим фракталом. Гармония формы второй части как бы компенсирует дисгармонию ее содержания. В этом плане первая часть рассказа антисимметрична второй; в ней дисгармония формы уравновешивается гармонией светлого содержания.

Композиция «Шуточки», состоящей из 163 строк, настолько точна, что снова всплывает все тот же вопрос: неужели писатель рассчитывает на бумаге пропорции своего произведения? Конечно, лучше всего этот вопрос адресовать самому писателю. Но люди искусства предпочитают уходить от ответа на подобные вопросы, хотя и признаются: после долгих (а часто и мучительных) раздумий композиция произведения сама *«приходит»* к художнику, разумеется, без всяких математических расчетов. Всесильная интуиция художника где-то в глубинах подсознания сама *«выстраивает»* или, если следовать философии Платона, *«припоминает»* пропорции нового произведения. И здесь уместно вспомнить любопытный пример из совершенно иной области.

Что есть инженерное дело, как не строгий математический расчет, воплощенный в геометрическом чертеже? Но вот великий русский кораблестроитель, математик и механик, академик АН СССР А. Н. Крылов (1863—1945) в своих воспоминаниях рассказывает о замечательном русском самородке Петре Акиндовиче Титове, чья невиданная интуиция в деле кораблестроения превосходила инженерные расчеты целых научных коллективов. «Верность его глаза,— пишет Крылов,— была поразительна. Назначая, например, размеры отдельных частей якорного или буксирного устройства, или шлюпбалок, или подкреплений под орудия, он никогда не заглядывал ни в какие справочники, стоявшие на полке в его кабинете, и, само собой разумеется, не делал, да и не умел делать, никаких расчетов. Н. Е. Кутейников, бывший в то время самым образованным корабельным инженером в нашем флоте, часто пытался проверять расчетами размеры, назначенные Титовым, но вскоре убедился, что это напрасный труд,— расчет лишь подтверждал то, что Титов назначил на глаз».

Крылов вспоминает, как, будучи молодым мичманом, он показывал Титову расчеты того или иного узла корабля и как тот вынимал из стола свой эскиз, сделанный «на глазок» и с необыкновенной легкостью, и говорил: «Да, мичман, твои формулы верные: видишь, я размеры назначил на глаз — сходятся». Далее Крылов пишет: «Лишь восемнадцать лет спустя, занимая самую высокую должность по кораблестроению, я оценил истинное значение этих слов Титова. Настоящий инженер должен верить своему глазу больше, чем любой формуле...» Что же говорить о настоящем художнике, который конечно же не променяет ни на какие формулы нежный голос своей музы!

Но, может быть, все эти удивительные примеры из области математики композиции справедливы только для малых художественных форм? В «Шуточке» чуть более полутора сотен строк, а все рассмотренные в предыдущих двух главах стихи были и того меньше. Что ж, остановимся на величайшем романе в прозе.

«Война и мир» Льва Толстого — грандиозный памятник русской и мировой литературы. В произведении изображены широчайшие эпические картины *войны* русских и французов 1812 года и тончайшие нити переживаний, связующие внутренний *мир* героев романа. Статьи и монографии о «Войне и мире» в сотни раз переросли по объему четыре тома самого произведения. И тем не менее...

Никто не замечал, что в самом заглавии романа — «Война и мир» — закодирован закон золотого сечения. В самом деле, название романа построено на первых четырех членах ряда Фибоначчи 1, 2, 3, 5. Один союз, два существительных, три слова. Пять букв в первом ключевом слове, три буквы во втором, одна буква в союзе. Отношение ключевых слов $5:3=1{,}666...$ есть первое рациональное приближение коэффициента золотого сечения. Не в этом ли простота, весомость и гармония названия романа?!

Конечно, как палиндром не может быть серьезной поэзией, так и наши изыскания с названием романа не более чем разминка перед настоящим погружением в глубины эпопеи Толстого. А масштабы «Войны и мира» воистину циклопические: 4 тома, 17 частей, 361 глава, 1618 страниц, около 66300 строк! Последние две цифры могут изменяться в зависимости от издания, но, как мы уже говорили, для изучения пропорций романа важно их отношение, а не абсолютные значения. Любопытно, что в моем издании за вычетом неполных страниц получилось 1618 страниц, т. е. 1000Ф!

Признаться, я никогда не отважился бы «поверить алгеброй» гармонию рожденного Львом Толстым гиганта (объем «Войны и мира» в 3000 — 5000 раз превышает объем рассмотренных нами стихотворений!), если бы не одна подсказка. Известно, что в главе 19 (ч. 2, т. 3) «Войны и мира» Толстой развивает один из основных тезисов своей философии истории о том, что не полководцы, а солдаты выигрывают сражения, и шире: не герои, а народ является подлинным творцом истории. По этому поводу Толстой с присущей ему прямотой пишет: «Давая и принимая Бородинское сражение, Кутузов и Наполеон поступили непроизвольно и бессмысленно. А историки под совершившиеся факты уже потом подвели хитросплетенные доказательства предвидения и гениальности полководцев...»

В. В. ВЕРЕЩАГИН. Перед Москвой в ожидании депутации бояр. *1891—1892 гг.*
Все 90-е годы Верещагин, которого называли Толстым в живописи, работал над циклом картин о войне 1812 г., создав 20 законченных полотен. Стоя на Поклонной горе, Наполеон ждет ключей от Москвы. Он сделал шаг с линии золотого сечения картины в сторону Москвы и замер. В его позе мрачное оцепенение, предчувствие того, что Москва не покорилась, что война не кончилась и что самое плохое еще впереди.

Далее Толстой говорит о том, что по поводу Бородинского сражения у историков имеется вполне определенное и совершенно ложное представление, а именно: «Все историки описывают дело следующим образом:

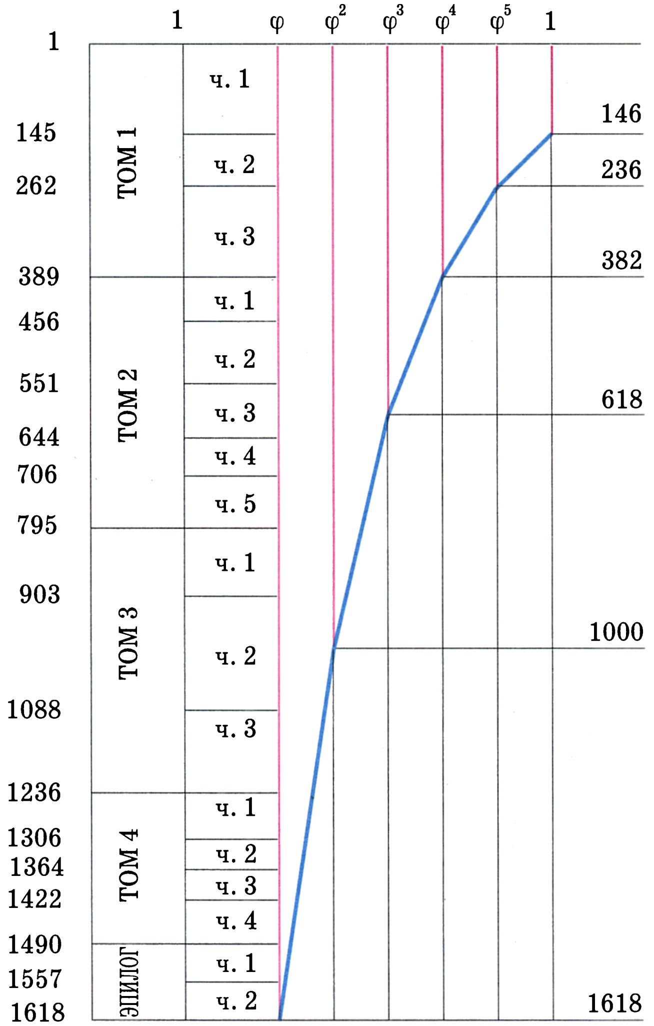
Русская армия будто бы в отступлении своем от Смоленска отыскивала себе наилучшую позицию для генерального сраже-

ния, и таковая позиция была найдена будто бы у Бородина.

Русские будто бы укрепили вперед эту позицию...» В развенчании этого заблуждения Толстой видел одну из сверхзадач «Войны и мира», о чем он прямо говорит в послесловии к роману. Недаром он выделяет это место курсивом.

Так вот, подсказка состояла в том, что в кулуарах одной конференции я как-то услышал, что Толстой, увлекавшийся всякой тайной символикой, умышленно поместил свои заветные мысли в точке золотого сечения романа. Поскольку роман огромен, то попасть «на глазок» точно в точку золотого сечения 66 тысяч строк кажется немыслимым. С другой стороны, размышления Толстого о Бородине почти не связаны с сюжетной линией романа, и, имея законченный роман, их легко можно было сдвинуть в любое место, в том числе и в точку золотого сечения «Войны и мира». Нет сомнений в том, что Толстой, уже в отрочестве размышлявший о сущности симметрии, знал о всех тринадцати «исключительных», «возвышенных» и «почти сверхъестественных» свойствах божественной пропорции, о которых писал Лука Пачоли. Вполне возможно, что, как и многие старые мастера, он захотел на своем полотне оставить некий тайный знак.

Вернувшись домой, я решил проверить все услышанное мною. Результат превзошел все ожидания: действительно, выде-



т. 1, конец ч. 1 – начало ч. 2. Мир (ч. 1) – Война (ч. 2)

т. 1, ч. 2, гл. 17. "Началось! Вот оно!" – думал князь Андрей...

т. 1, ч. 3, гл. 19. – Voila une belle mort, – сказал Наполеон, глядя на Болконского

т. 2, ч. 3, гл. 19. ... так радостно и ново ему было на душе, как будто он из душной комнаты вышел на вольный свет Божий. Ему и в голову не приходило, чтоб он был влюблен в Ростову...

т. 3, ч. 2, гл. 19. *Русская армия будто бы в отступлении своем от Смоленска отыскивала себе наилучшую позицию для генерального сражения, и таковая была найдена будто бы у Бородина.*

ленное курсивом место лежало точно в точке золотого сечения «Войны и мира»! Понятно, что я не мог удержаться и не проверить более старшие члены ряда золотого сечения. И снова открывались удивительные вещи! Точке φ^2 соответствует конец главы 19 (ч. 3, т. 2), где князь Андрей влюбляется в Наташу,— одна из кульминаций романа: «... так радостно и ново ему было на душе, как будто он из душной комнаты вышел на вольный свет Божий. Ему и в голову не приходило, чтоб он был влюблен в Ростову...»

Точка φ^3 указывала на еще более драматический эпизод из бытия главного героя романа — ранение князя Андрея в Аустерлицком сражении: «На Парацельской горе, на том самом месте, где он упал с древком знамени в руках, лежал князь Андрей Болконский, истекая кровью...» К вечеру поле битвы объезжал Наполеон. «Вот прекрасная смерть, — сказал Наполеон, глядя на Болконского». Этой сценой (гл. 19, ч. 3, т. 1 — снова глава 19!) фактически заканчивается первый том романа. Так что точка φ^3 в данном случае не только указывает на кульминацию, но и выполняет разделительную функцию.

Точка φ^4 отмечает еще одну кульминацию романа — Шенграбенское сражение — боевое крещение Андрея Болконского. «Началось! Вот оно!» — думал князь Андрей, чувствуя, как кровь чаще начинала приливать к его сердцу... «Началось! Вот оно! Страшно и весело!» — говорило лицо каждого солдата и офицера» (гл. 17, ч. 2, т. 1).

Наконец, точке φ^5 снова принадлежит разделительная функция — она точно отмечает границу между первой и второй частями первого тома. Семантика этих частей выражена в романе с предельной ясностью: часть 1 — мир, часть 2 — война.

Итак, первые пять членов ряда золотого сечения играют в «Войне и мире» исключительно важную формообразующую роль. Они отмечают как главные мысли самого автора и кульминационные события в жизни главных героев, так и важнейшие разделы в структуре произведения. Точка φ^3, отложенная от конца романа, является (с точностью до одной страницы!) границей 3-го и 4-го томов с предельно ясной семантикой: конец 3-го тома — *война в Москве,* начало 4-го тома — *мир в Петербурге.* Таким образом, деление романа на тома явно тяготеет к зеркальной симметрии: 1-й и 4-й тома имеют равную относительную длину φ^3, 2-й и 3-й тома также почти одинаковы по объему. Напротив, деление романа на части близко к переносной симметрии: 1-й и 3-й тома имеют по 3 части, 2-й и 4-й — 5 и 6 частей соответственно. В такой структуре легко заметить аналогию с кольцевой и перекрестной рифмой: тома романа «зарифмованы» кольцевой рифмой, а части — перекрестной.

Как видим, золотых пропорций в «Войне и мире» оказалось слишком много, чтобы заподозрить Толстого в преднамеренном структурировании романа по закону золотого сечения. Нет сомнений в том, что гар-

В. В. ВЕРЕЩАГИН. «Не занимай! Дай подойти!» *1887—1895 гг.*
Скрытая в снежном кружеве еловых лап, группа крестьян-партизан ждет приближения отступающих французов. Предводитель отряда сельский староста Семен Архипович (фигура историческая) сдерживает нетерпеливых. Он ждет своего часа и твердо стоит на линии золотого сечения картины.

мония золотых пропорций родилась не в результате математических расчетов, а благодаря скрупулезной работе Толстого над формой произведения. Известно, что роман бессчетное число раз переписывался Толстым; шлифовался, подгонялся, затем ломался и снова подгонялся и шлифовался. Известно, что существовало шесть редакций полного текста романа, пятнадцать вариантов начала произведения! По-видимому, именно в ходе нескончаемых последовательных итераций, тщательной подгонки всех частей целого ключевые события и мысли романа, равно как и его основные разделительные вехи, приблизились к гармоническим золотым пропорциям.

Но если золотые пропорции «Войны и мира» родились на подсознательном уровне, значит, Толстой был в состоянии охватить внутренним взором весь роман целиком, держать в голове одномоментно всю колоссальную художественную форму! Конечно, в это трудно поверить. Но ведь и трудно вообразить простому смертному всю глубину творческого процесса гения. Это тем более трудно, что литература, как и музыка,— искусство темпоральное.

Tempus fugit, говорили древние,— время бежит. Как зенонова стрела в каждый момент времени летит и стоит на месте одновременно, так и литература и музыка звучат и тут же растворяются во времени. Поэтому охватить внутренним взором *всю* темпоральную форму особенно трудно. По собственному признанию такой способностью обладал Моцарт: во время сочинения музыки он доводил себя до такого состояния, когда слышал *одновременно* всю симфонию от начала до конца. Такой «взгляд сверху», в пределе «взгляд из бесконечности» (вспомним древнекитайскую философию живописи!), делает время звучания формы исчезающе малым. Форма звучит как бы одномоментно, она застывает и из литературы и музыки превращается в живопись и архитектуру. Музыка становится архитектурой, литература — живописным полотном. В этот волшебный момент литературная или музыкальная форма всплывает перед внутренним взором художника сказочным градом Китежем, и он до мельчайших подробностей видит все ее пропорции.

Конечно, и это наше исследование только приоткрывает двери в неисчерпаемое фрактальное царство морфологии и семантики «Войны и мира». Оно рождает больше вопросов, нежели дает ответов. Каким рядом описывается бытие в романе другого главного героя — Пьера Безухова? Насколько симметричны, точнее, антисимметричны война и мир в романе? Насколько глубоко самоподобные смыслы войны и мира пронизывают структуру романа? Семантика и морфология «Войны и мира», безусловно, еще ждет своего Мандельброта, который откроет фрактальное царство великой эпопеи во всем неисчерпаемом многообразии. А нам предстоит подняться на одно столетие и перейти от великого романа XIX в. к замечательному роману XX в. Нас ждет «Мастер и Маргарита» Михаила Булгакова.

До сих пор и в поэзии, и в прозе мы интересовались *пространственными структурами* художественной формы. *Пространственные структуры — это геометрия пространства художественного текста*, они определяют физическое время восприятия текста. На листе бумаги пространственные структуры имеют вертикальные количественные характеристики, наиболее простой и удобной из которых является число строк или страниц.

Теперь нам предстоит познакомиться с *темпоральными структурами* художественного текста. *Темпоральные структуры — это алгебра времени художественного текста*, они определяют физическое время развития описываемых в тексте событий. *Пространственные структуры текста тяготеют к художественному времени, а темпоральные — к физическому*. Однако поскольку художник сам является творцом физического времени своего произведения, то темпоральные структуры также отражают замыслы и мастерство художника. Но почему для рассмотрения темпоральных структур мы выбрали именно роман Булгакова «Мастер и Маргарита»?

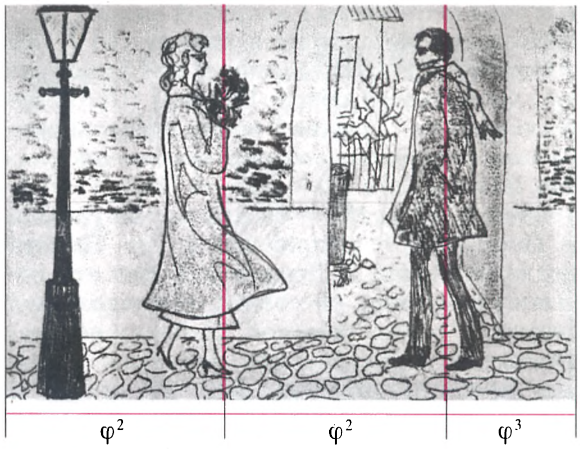
На это есть несколько оснований. Первое. Роман «Мастер и Маргарита» фактически состоит из двух романов — московского, современного и ершалаимского, античного. Московский роман создает впечатление самой современной реальности, он полон самых правдоподобных деталей, хотя и описывает самые неправдоподобные события. Ершалаимский роман, напротив, повествует о древних преданиях, представляя их читателю самым живым и реальным образом. Симметрия двух переплетенных в «Мастере и Маргарите» повествований не только интриговала простых читателей, но и привлекала внимание самых маститых исследователей.

Второе. Известно, что роман «Мастер и Маргарита» — произведение незаконченное и существуют по крайней мере три полноправные редакции романа. Это и натолкнуло на мысль рассмотреть именно темпоральные структуры романа, которые в отличие от пространственных структур в большей мере независимы относительно авторских редакций текста.

И третье. На свете не так уж много произведений, хронологическую канву которых можно реконструировать с точностью до минут. «Мастер и Маргарита» является именно таким произведением — каждое значимое событие романа имеет свою координату на оси времени. Какова же алгебра времени «Мастера и Маргариты»?

Рассмотрим внутреннюю хронологию обоих романов «Мастера и Маргариты». Действие московского романа происходит трое суток: Воланд появляется на Патриарших прудах на закате в среду и покидает Москву в субботу в то же время. Действие ершалаимского романа, написанного Мастером, напротив, начинается утром 14 нисана и заканчивается утром 15 нисана, т. е. длится одни сутки. Построив темпоральные шкалы современного и античного романов и приведя их длину к единице, мы обнаруживаем, что темпоральные структуры обоих романов полностью идентичны.

В самом деле, обозначим точками A начало обоих романов (в Москве — это появление Воланда, в Ершалаиме — появление Пилата) и точками H — их конец. Точками B обозначим начало центральных событий романа (в Москве — это появление Мастера, в Ершалаиме — начало казни Иешуа) и точкой G — конец центральных событий (в Москве — это успокоение и сон Маргариты, в Ершалаиме — успокоение и сон Пилата). Учитывая внутреннюю хронологию обоих романов (см. соответствующие схемы), мы находим для московского романа: $AH=AB+$ $+BG+GH=27{,}5$ ч$+27{,}5$ ч$+17$ ч$=72$ ч; для



Н. РУШЕВА. Первая встреча Мастера и Маргариты. *1968 г.*
Творческое наследие Нади Рушевой (1952—1969) составляет более 10000 графических работ, а прожила юная художница неполных 17. Яркой кометой пролетела Надя над Землей, оставив вихрь хрупких и изящных, как снежинки, рисунков. Замечательно, что композиция этой иллюстрации к роману Булгакова основана на той же трехчастной схеме $\varphi^2 : \varphi^2 : \varphi^3$, что и московский и ершалаимский романы «Мастера и Маргариты».

ершалаимского романа: $AH=AB+BG+$ $+GH=9$ ч$+9$ ч$+6$ ч$=24$ ч. Или в приведенном виде для обоих романов $\varphi^2+\varphi^2+\varphi^3=1$. Таким образом, точки B и G делят темпоральное пространство обоих романов AH на три части: *экспозиция — главная часть — развязка* в пропорции золотого сечения

$$\varphi^2 : \varphi^2 : \varphi^3 \quad (\varphi^2+\varphi^2+\varphi^3=1).$$

Темпоральные структуры обоих романов оказываются абсолютно тождественными! Мы снова видим знакомую по предыдущей главе трехчастную золотую пропорцию.

Однако главный сюрприз нас ожидает в главных частях обоих романов. Именно: главные части московского и ершалаимского романов (длиною φ^2) имеют сложную, но также тождественную структуру

$$\varphi^6+\varphi^4+\varphi^5+\varphi^7+\varphi^6=\varphi^2,$$

определяемую старшими членами ряда золотого сечения! В московском романе эта структура определяется последовательностью кульминационных событий: сон Ивана о казни Иешуа (C) — похороны Берлиоза и сговор Маргариты с нечистой силой (D) — обращение Маргариты в ведьму (E) — бал у Сатаны (F) — успокоение и сон Маргариты, дочитавшей роман Мастера (G). В ершалаимском романе последовательность кульминационных событий такова: проклятие Левием Бога (C) — смерть Иешуа (D) — убийство Иуды (E) — беседа во сне Пилата и Иешуа (F) — успокоение и сон Пилата после разговора с Левием (G). Все эти события отмечены на схемах темпоральных структур обоих романов. Небольшие расхождения теоретических значений отрезков времени BC, CD, DE, EF и FG в ершалаимском романе с фактическими значениями, вычисленными по точкам B, C, D, E, F и G на схеме, объясняются тем, что данные события не указаны Булгаковым с точностью до минут (в художественном плане это было бы просто нелепо) и сознательно проставлялись нами на схеме с точностью до получаса.

Итак, закон золотого сечения полностью определяет темпоральные структуры современного и античного романов. Более того, обе структуры оказываются тождественными!

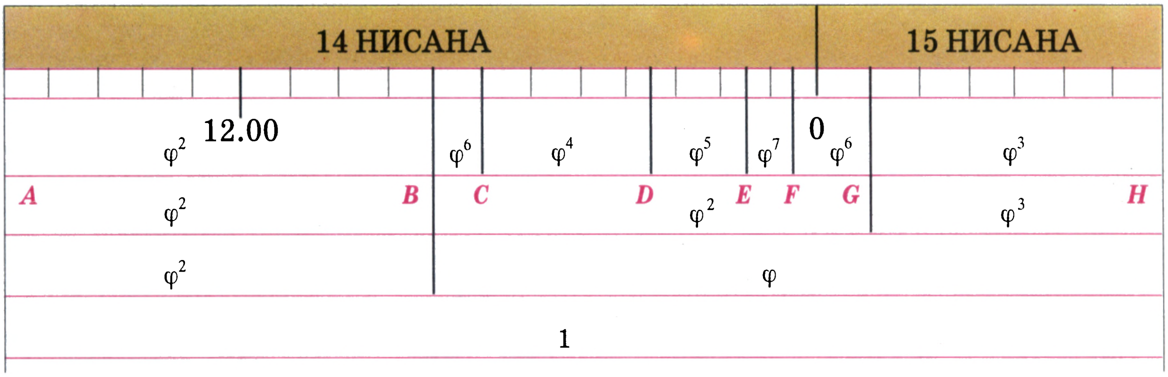
Итак, динамика обоих внутренних романов «Мастера и Маргариты» полностью определяется динамическим типом симметрии — законом золотого сечения. Откуда взялся в темпоральных шкалах обоих романов закон золотого сечения и откуда такая точность и последовательность его выполнения? Это вопрос для психологов искусства, психолингвистов и нейрофизиологов. Для нас нет сомнения в том, что в подавляющем большинстве случаев гармонические структуры выстраиваются на бессознательном уровне или, как проясняется сегодня, на уровне сверхсознания. Закон золотого сечения благодаря его уникальному аддитивному свойству, которое отличает его от всего остального бесконеч-

A — *среда, 21.00.* **Появление Воланда** (начало московского романа).
B — *пятница, 00.30.* **Появление Мастера** (начало центральных событий).
C — *пятница, 04.30.* **Сон Ивана о казни Иешуа.**
D — *пятница, 15.00.* **Похороны Берлиоза.**
E — *пятница, 21.30.* **Маргарита натирается кремом и становится ведьмой.**
F — *пятница, 00.00.* **Великий бал у Сатаны.**
G — *суббота, 04.00.* **Маргарита засыпает** (конец центральных событий).
H — *суббота, 21.00.* **Воланд покидает Москву** (конец московского романа).

AH=72 ч	(1)	BC=4 ч	(φ^6)
AB=27,5 ч	(φ^2)	CD=10,5 ч	(φ^4)
BG=27,5 ч	(φ^2)	DE=6,5 ч	(φ^5)
GH=17 ч	(φ^3)	EF=2,5 ч	(φ^7)
		FG=4 ч	(φ^6)

27,5+27,5+17=72 ч
($\varphi^2+\varphi^2+\varphi^3=1$)

4,0+10,5+6,5+2,5+4,0=27,5
($\varphi^6+\varphi^4+\varphi^5+\varphi^7+\varphi^6=\varphi^2$)



A — *14 нисана, 07.00.* **Появление Пилата** (начало ершалаимского романа).
B — *14 нисана, 16.00.* **Начало казни Иешуа** (начало центральных событий).
C — *14 нисана, 17.00.* **Проклятие Левием Бога.**
D — *14 нисана, 20.30.* **Смерть Иешуа. Гроза.**
E — *14 нисана, 22.30.* **Убийство Иуды.**
F — *14 нисана, 23.30.* **Сон Пилата. Пилат и Иешуа гуляют по лунной дорожке.**
G — *15 нисана, 01.00.* **Пилат засыпает** (конец центральных событий).
H — *15 нисана, 07.00.* **Рассвет** (конец ершалаимского романа).

AH=24 ч	(1)	BC=1,3 ч	(φ^6)
AB=9 ч	(φ^2)	CD=3,5 ч	(φ^4)
BG=9 ч	(φ^2)	DE=2,1 ч	(φ^5)
GH=6 ч	(φ^3)	EF=0,8 ч	(φ^7)
		FG=1,3 ч	(φ^6)

9+9+6=24 ч
$(\varphi^2+\varphi^2+\varphi^3=1)$

1,3+3,5+2,1+0,8+1,3=9
$(\varphi^6+\varphi^4+\varphi^5+\varphi^7+\varphi^6=\varphi^2)$

ного множества геометрических прогрессий, оказался исключительным образом приспособленным для формообразования. Отсюда его необычайная распространенность в природе, отсюда же и его исключительная роль в искусстве.

Что касается тождества структур обоих романов, то не следует забывать, что оба повествования писались одновременно и одним человеком — Михаилом Булгаковым. Поэтому невольным образом динамика одного романа сказывалась на динамике другого и наоборот. Так что совпадение количественных характеристик обоих романов следует отнести скорее к естественным закономерностям творческого процесса, чем к действию на автора сверхъестественных чар Воланда. Возможно, что это самое простое объяснение является и самым правильным.

Круг замкнулся. Трехчастные золотые структуры, которыми мы закончили предыдущую главу о поэзии, вновь заявили о себе при анализе морфологии прозы. Мы уже сказали в предыдущей главе, что *трехчастные структуры золотого сечения являются важнейшим морфологическим законом искусства*. Нам остается только подтвердить это яркими примерами.

Многочисленные примеры трехчастных структур типа $\varphi^2:\varphi^2:\varphi^3$ или $\varphi^2:\varphi^3:\varphi^2$ мы обнаруживаем в музыке, например в пьесах «Движение», «Отражение в воде» и других пьесах из цикла «Образы» Клода Дебюсси, в его симфоническом эскизе «Море», в «Музыке для струнных, ударных и челесты» Белы Бартока, в фортепьянных пьесах Мориса Равеля.

Трехчастные золотые структуры необычайно распространены в архитектуре, где они несут следующую семантическую нагрузку: *основание — главный объем — завершение*. Такими трехчастными структурами обладают знаменитый Дом Пашкова

В. Д. ПОЛЕНОВ. Христос и грешница. *1886—1887 гг.*
Цикл картин Поленова на Евангельские сюжеты отличает не только глубина философского содержания, но и тщательная разработка геометрии композиции. «Христос и грешница» содержит полный спектр горизонтальных трехчастных структур золотого сечения: мир Христа — мир фарисея ($\varphi^2 : \varphi^3 : \varphi^2$), разделенный «нейтральной полосой» шириною φ^3; фигура Христа — фигура грешницы ($\varphi^2 : \varphi^2 : \varphi^3$); фигура апостола — фигура фарисея ($\varphi^3 : \varphi^2 : \varphi^2$). Все пропорции картины читаются слева направо.

архитектора Василия Баженова в Москве, церковь Смольного собора Варфоломея Растрелли в Санкт-Петербурге, колокольня церкви Рождества Христова в Ярославле и многие другие памятники русской и мировой архитектуры.

Прекрасные образцы трехчастных золотых структур мы находим в цикле полотен на евангельские темы русского живописца Василия Поленова (1844—1927): «Воскрешение дочери Иаира», «Христос и грешница», «Христос в пустыне» и др.

Ряд этот можно продолжать бесконечно, переходя от русского искусства к мировому и обратно. В результате получилась бы прекрасная книга, вмещающая в себя многие шедевры мирового искусства. К сожалению, мы не можем позволить себе такой «текст в тексте» и потому ограничимся одним замечанием.

Трехчастные структуры золотого сечения являются антропоморфными структурами. Своему происхождению они обязаны пропорциям человека. В самом деле, пропорция $\varphi^2+\varphi^2+\varphi^3$ повторяет пропорции человека: *голова+торс: бедро: голень* или, точнее, длина человеческого тела от макушки до пупка, от пупка до колена и от колена до основания стопы. Так что, рассматривая пропорции трехчастных золотых структур, мы вновь убеждаемся в мудрости древних, а именно древнегреческого софиста Протагора, сказавшего, что *человек есть мера всех вещей.*

Ну а мы в поисках математических оснований литературной гармонии перенесемся из XX в. к истокам мировой культуры, в «темные века», как их называют историки. Мы обратимся к творчеству основателя мировой литературы — Гомеру.

29.
ГОМЕР, ДАНТЕ, ПУШКИН В ЗЕРКАЛЕ МАТЕМАТИКИ

...Строго и точно расчисленная и вместе с тем подлинно вдохновенная «геометрия» пушкинских композиций остается совершенно незаметной и скрытой от глаз читателя и может быть обнаружена только в результате специального анализа.

Д. БЛАГОЙ

29.1. ГОМЕР

Гомер — величайшая фигура в истории мировой литературы, родоначальник европейской поэзии, вечная немеркнущая слава Эллады. Откуда берутся подобные Гомеру титаны? Почему именно гиганты знаменуют начало пути человечества: Гомер в литературе, Пифагор в математике, Платон в философии?

Гомер, Пифагор, Конфуций, Будда... Были ли они? Быть может, они только привиделись человечеству от долгого вглядывания в сумерки прошедших веков?

В самом деле, что мы знаем о Гомере? Строго говоря, ничего. Когда родился и когда умер? Не знаем. Когда жил? Скорее всего, в VIII в. до н. э., но, может быть, и столетием раньше, а может, и столетием позже. Где родился? Не знаем.

Семь городов соревнуют за мудрого корень Гомера:
Смирна, Хиос, Колофон, Саламин, Пилос, Аргос, Афины.

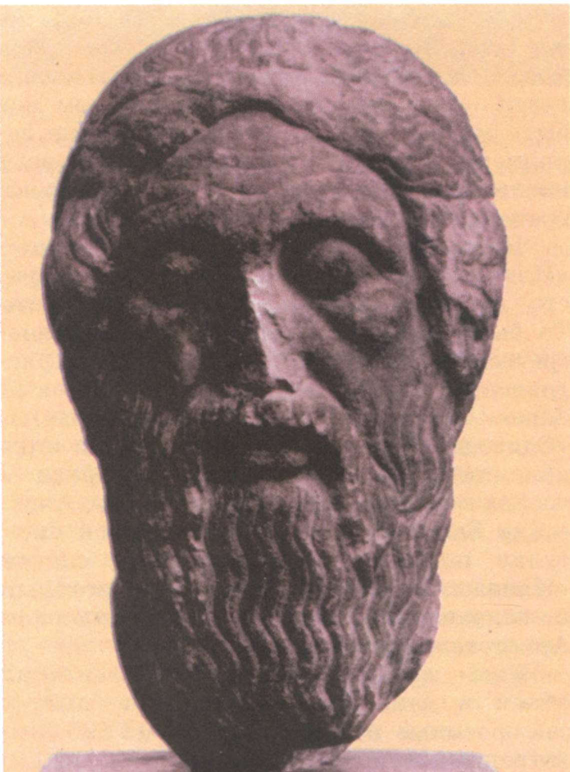
Так утверждало древнее двустишие, хотя в других стихах назывались и другие города, в том числе и Рим, и даже Вавилон. Кто были родители Гомера? Не знаем. А если и знаем, то речного бога Мелета и нимфу Крефеиду, да и тех как незаконных супругов.

По числу городов существует и семь «биографий» Гомера — одна сказочнее другой. Да и что значит само слово «Гомер»: это имя собственное или нарицательное? Возможно и первое, но возможно и второе, ибо « ο μη ορων» на одном из греческих диалектов означает «невидящий», «слепой». Вот здесь сходятся все предания о великом аэде — *Гомер был беден и слеп*. Да и каким мог быть поэт и певец — аэд, как не слепым, и каким мог быть мудрец, как не бедным! Древние верили, что поэтическая муза доставалась аэду вместо зрения, а мудрость и богатство во все времена считались несовместимыми.

Предания называли Гомера автором «Илиады» и «Одиссеи». То были не просто две величайшие поэмы античности. То были «альфа» и «омега» всей древнегреческой культуры, какими для христианского мира стали Ветхий и Новый Завет Библии. Песни из «Илиады» и «Одиссеи» учили наизусть, списки поэм хранили дома как святыни и брали в военные походы как талисман. Сам Александр Великий возил в драгоценной шкатулке покоренного царя Дария список «Илиады», собственноручно переписанный и исправленный его великим учителем Аристотелем.

Уже древних поражал гигантский объем и неисчерпаемая глубина мысли, заключенные в обеих поэмах. 15 693 стихотворные строки в «Илиаде» и 12 110 строк в «Одиссее» — возможно ли простому смертному поднять столь непомерный интеллектуальный груз?! Уже в III в. до н. э. нашлись исследователи Гомера — их стали называть *хоридзонтами* или *разделителями*, которые заметили ряд существенных различий между «Илиадой» и «Одиссеей» и высказали мнение о том, что эти поэмы написаны разными авторами. В противовес хоридзонтам выступили *унитарии*, считавшие автора «Илиады» и «Одиссеи» «единым». Наиболее авторитетным из древних унитариев был Аристарх Самофракийский (ок. 215—145), считавший, что патетическая «Илиада» была написана Гомером в молодости, а более уравновешенная «Одиссея» — на склоне лет. Заметим, что за полтора столетия до Аристарха много ценных мыслей о единстве гомеровского эпоса высказал Аристотель в «Поэтике» и утраченном сочинении «Гомеровские проблемы».

Так возник знаменитый *гомеровский вопрос* — комплекс проблем, связанных с авторством и обстоятельствами возникновения гомеровского эпоса. Эти проблемы во многом остаются неразрешенными и сегодня.



ГОМЕР. *Римская копия с оригинала V в. до н. э. Мюнхен.*
Из многих предполагаемых скульптурных портретов Гомера данный портрет отличается наибольшим богатством внутреннего мира слепого аэда.

Вся последующая история гомеровского вопроса, как это часто бывает со всякой трудноразрешимой проблемой, напоминает качание маятника между хоридзонтами и унитариями. Убежденным хоридзонтом был в XVII в. французский аббат Франсуа д'Обиньяк, который доказывал, что «Илиада» не является единым целым, а представляет механическое соединение самостоятельных песен об осаде Трои, что Гомер как автор «Илиады» никогда не существовал, а было много «гомеров», т. е. слепых певцов, и что гомерова «Илиада» есть только «собрание песен слепцов».

В строго научной форме гомеровский вопрос был впервые поставлен в 1795 г. в работе «Prologomena ad Homerum» («Введение к Гомеру») немецкого филолога Фридриха Августа Вольфа. Свою хоридзонтическую позицию Вольф аргументировал тремя основными тезисами: 1) отсутствие письменности во времена Гомера; 2) наличие античных сообщений о первой редакции и записи гомеровских поэм при афинском тиране Писистрате в VI в. до н. э.; 3) присутствие многих противоречий, повторов и вставок в текстах поэм. Вольф считал невозможным создание столь крупных произведений, как «Илиада» и «Одиссея», без помощи письменности. Но если во времена Гомера письменности не было, то не могло быть и самих произведений, а были только разрозненные песни многочисленных слепых певцов. Третий тезис о многочисленных противоречиях и повторах в поэмах только подтверждал это рассуждение Вольфа.

Позднее в стане вольфианцев сформировалось два основных течения: сторонников *песенной теории Лахмана*, считавших «Илиаду» и «Одиссею» собранием разрозненных самостоятельных песен, и приверженцев *теории первоначального ядра*, доказывавших, что у обеих поэм существовало некое первоначальное ядро, некие «пра-Илиада» и «пра-Одиссея», вокруг которых сформировались более поздние, дошедшие до нас редакции обеих поэм.

И так далее. Для полноты картины нам остается только добавить, что с противоположного конца гомеровский вопрос с равным энтузиазмом пытались решить унитарии, у которых также находилось достаточно аргументов в пользу своей позиции. По-видимому, убежденность в том, что *великое творится личностями, а не коллективами,* привела в стан унитариев многих великих — Шиллера, Гёте, Гегеля. Последний считал Гомера исторической личностью и отмечал, что гомеровские поэмы «образуют истинную, внутренне ограниченную эпическую целостность, а такое целое способен создать лишь *один* индивид. Представление об отсутствии единства и простом объединении различных рапсодий, составленных в сходном тоне, является антихудожественным и варварским представлением».

Итак, *стержнем гомеровского вопроса является проблема* ***единства*** *«Илиады» и «Одиссеи».* Все наши суждения о Гомере и гомеровском эпосе могут быть состоятельными, если мы будем в состоянии ответить на главный вопрос: действительно ли существуют единые поэмы «Илиада» и «Одиссея», созданные по единому художественному плану и единой внутренней логике, или же единство этих поэм чисто внешнее и сами поэмы есть объединение различных песен различных авторов?

Кто же может ответить на вопрос о *единстве* поэм? Только текст самих поэм! Даже если предположить, что свершилось чудо и исследователи получили в руки какие-то невиданные свидетельства о Гомере и обстоятельствах его творчества, даже в этом случае последнее слово должно быть, разумеется, за самим текстом поэм, за его *единой* внутренней логикой, *единством* композиции и языка, *едиными* — иными словами, инвариантными или симметричными — структурами текста и т.д. Ну а там, где логика, структура, симметрия, там на авансцену должна выходить математика!

Но прежде чем перейти к структурно-математическому анализу великих поэм Гомера, отметим одно важное свидетельство единства обеих поэм. «Илиада» есть поэма о десятилетней Троянской войне, а «Одиссея» — о десятилетнем возвращении на родину героя Троянской войны Одиссея. Если бы обе поэмы были простым собранием «песен слепцов», они должны были бы походить на исторические хроники, в которых события нанизываются одно за другим на монотонную нить повествования. Такие хроники были бы безупречными с точки зрения исторической науки, но абсолютно беспомощными с точки зрения поэтического искусства. Гомер был великий художник, и он пошел другим, более сложным и более искусным путем.

В каждой из поэм Гомер выделил одного героя и один эпизод и через этого героя и этот эпизод рассказал обо всех участниках и всех событиях Троянской войны и плавания Одиссея. В самом деле, *«Илиада» есть поэма о гневе Ахилла, повлекшем гибель Патрокла и Гектора, а «Одиссея» — поэма о возвращении мужа накануне измены жены.* Действие «Илиады» длится 54 дня, а действие «Одиссеи» — всего 40 дней. Все остальные события десятилетней Троянской войны и десятилетних скитаний Одиссея искусно вплетены в реплики и рассказы действующих лиц обеих поэм.

В результате в поэмах достигается сильнейшая концентрация художественного материала, тысячекратное сжатие художественного времени, а сами поэмы из мифологических сказаний и исторических хроник превращаются в произведения искусства. Открытый Гомером художественный прием — *воссоздание целостной картины эпохи через конкретное явление и конкретного героя* — стал основой художественного метода во всей мировой литературе от «Илиады» Гомера до «Одного дня Ивана Денисовича» Солженицына. Замечательно, что это открытие Гомера-художника и первое свидетельство в пользу «единого» Гомера было замечено еще в IV в. до н. э. мудрым Аристотелем.

Однако если бы все было так просто, то не было бы никакого «гомеровского вопроса», а сам Аристотель остался бы первым и последним унитарием. Гомер, как и каждый великий, был слишком сложен и слишком противоречив. С каждым новым прочтением он открывал но-

ДИПИЛОНСКАЯ АМФОРА. *Фрагмент. VIII в. до н. э.* Один из лучших образцов геометрического стиля периода гомеровской Греции. На фрагменте главного орнаментального пояса амфоры хорошо видна зеркальная симметрия композиции погребальной процессии относительно ядра композиции — тела умершего вождя, перекликающаяся с зеркальной симметрией композиции гомеровских поэм.

вые, фрактально неисчерпаемые смыслы и загадки и требовал больших усилий для своего понимания. Откроем и мы новую страницу в энциклопедии Гомера-художника.

В истории искусств VIII в. до н.э. век Гомера известен как век *геометрического стиля.* Этот стиль получил свое название от великолепных геометрических орнаментов, украшавших древнегреческие вазы этого периода. Особым мастерством отличались вазы, обнаруженные на Дипилонском кладбище в Афинах. Эти огромные, часто выше человеческого роста, вазы предназначались для жертвенных возлияний, а заодно служили и памятниками на могилах местной аристократии. В сложных и искусных композициях дипилонских ваз с математической точностью и последовательностью воплощены законы зеркальной и переносной симметрии. Но самое удивительное в том, что те же самые симметрийные законы геометрического стиля с той же математической точностью и последовательностью воплощены в композиции гомеровских поэм!

Как нам хорошо известно, закон зеркальной симметрии относительно центра D может быть выражен формулой

$$ABCDCBA,$$

а закон переносной симметрии — формулой

$$ABCDABCD\ldots .$$

Если в данных формулах свойство A, например, меняется на противоположное $\bar{A}$, то мы будем иметь закон зеркальной (или переносной) антисимметрии, а если свойство B частично изменится и перейдет в свойство B*, то мы получим закон зеркальной (или переносной) диссимметрии. Таким образом, законы зеркальной и переносной симметрии в обобщенном виде выразятся формулами вида

$$ABCDCB^{*}\bar{A} \quad ABCD\bar{A}B^{*}CD\ldots .$$

Эти симметрийные законы геометрического стиля являются настоящими фракталами «Илиады» и «Одиссеи» — они пронизывают структуру каждой из поэм от речей отдельных героев через композиции отдельных сцен вплоть до композиционной симметрии различных песен и общей симметрийной структуры каждой поэмы. Далее мы ограничимся разбором симметрийной структуры «Илиады».

Закон зеркальной симметрии вполне отчетливо (и семантически, и морфологически) виден в известном обращении храбрейшего после Ахилла ахейского (греческого) героя Диомеда к не менее славному защитнику Трои Главку (Илиада, песнь VI, стихи 123—143).

Структурная формула монолога имеет вид:

$$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon\ \delta\ \gamma\ \bar{\beta}\ \alpha. \qquad (29.1a)$$

Закон переносной симметрии мы обнаруживаем в композиции обращения троянского героя Полидамаса к его другу и военачальнику Гектору — сыну троянского царя Приама, главному защитнику Трои. Закончился самый кровавый день сражений. Троянцы одержали ряд крупных побед над греками, убит друг Ахиллеса Патрокл. Ночь застает троянцев у стен греческого лагеря. Мудрый Полидамас, опасаясь, что Ахилл может немедленно вступить в бой за Патрокла, предлагает Гектору укрыться на ночь за стенами Трои. Он говорит Гектору о двух альтернативах — остаться на поле боя или вернуться в Трою — и их последствиях (Илиада, XVIII, 266—283).

VI песнь

«Кто ты, бестрепетный муж от земных обитателей смертных?
Прежде не зрел я тебя на боях, прославляющих мужа;
Но сегодня, как вижу, далеко ты мужеством дерзким
Всех превосходишь, когда моего копия нажидаешь.
Дети одних злополучных встречаются с силою моею!
Если бессмертный ты бог, от высокого неба нисшедший,
Я никогда не дерзал с божествами Олимпа сражаться.
Нет, и могучий Ликург, знаменитая отрасль Дриаса,
Долго не жил, на богов, небожителей, руки поднявший.
Некогда, дерзкий, напав, на питательниц буйного Вакха,
Их по божественной Ниссе преследовал: нимфы вакханки
Фирсы зеленые бросили в прах, от убийцы Ликурга
Сулицей острой свирепо разимые; Вакх устрашенный
Бросился в волны морские и принят Фетидой на лоно,
Трепетный, в ужас введенный неистовством буйного мужа.
Все на Ликурга прогневались мирно живущие боги;
Кронов же сын ослепил Дриатида; и после не долгой
Жизнию он наслаждался, бессмертным всем ненавистный.
Нет, с богами блаженными я не желаю сражаться!
Если же смертный ты муж и вскормлен плодами земными,
Ближе предстань, да к пределу ты смерти скорее достигнешь».

α – **Угроза**
β – **Ты бессмертен?**
γ – **Я не сражаюсь с богами**
δ – **Пример Ликурга**
ε – **История Ликурга**
(главная мысль)
δ – **Пример Ликурга**
γ – **Я не сражаюсь с богами**
$\bar{\beta}$ – **Ты смертен?**
α – **Угроза**

XVIII песнь

«В град возвратимся немедля; поверьте мне, так совершится!
Ныне от битв удержала Пелеева бурного сына
Ночь благовонная; если и завтра нас здесь он застанет,
Завтра нагрянув с оружием, – о! не один Ахиллеса
Скоро узнает; войдет не без радости в Трою святую,
Кто избежит от могучего: многих троян растерзают
Враны и псы; но не дайте мне, боги, подобное слышать!
Если вы мне покоритесь, хотя и прискорбно то сердцу,
Ночь проведем мы на площади с силой; а городу стены,
Башни, ворота высокие, оных огромные створы,
Длинные, гладкие, крепко сколоченные, будут защитой.
Утром же мы на заре, ополчася оружием медным,
Станем на башнях; и горе надменному, если захочет
Он, от судов устремившися, с нами вкруг града сражаться!
Вспять к судам возвратится, когда он коней крутовыйных
В долгих бегах истомит, перед градом их праздно гоняя;
В стены ворваться ни гордое сердце ему не позволит;
Их не разрушит он; быстрые псы его прежде изгложут!»

1-я альтернатива

o

α – **Если останемся на поле боя,**
β – **то завтра будем беззащитны**
γ – **и Троя будет разрушена**

2-я альтернатива

o

$\bar{\alpha}$ – **Если вернемся в Трою,**
$\bar{\beta}$ – **то завтра защитят ее стены**
$\bar{\gamma}$ – **и Троя будет спасена**

Итак, рассмотренная часть монолога имеет структурную формулу вида

$$\alpha\ \beta\ \gamma\ \bar{\alpha}\ \bar{\beta}\ \bar{\gamma}. \qquad (29.1.b)$$

Подобные примеры симметрийных законов нетрудно обнаружить и на более высоком уровне — уровне песен. Возьмем VIII песнь, повествующую о первом из трех самых кровопролитных дней сражений «Илиады». Зеркальная симметрия VIII песни очевидна из приводимой схемы.

VIII песнь

ОЛИМП	*a*	1 – 27	Олимп. Речь Зевса. Рассвет
	b	28 – 40	Протест Афины
	c	41 – 52	Зевс отправляется на Иду
ЗЕМЛЯ	*d*	53 – 129	Бои. Колесницы
	e	130 – 144	Вмешательство Зевса (молния)
	f	145 – 166	Сражения
	e	167 – 197	Вмешательство Зевса (громы)
ОЛИМП+ ЗЕМЛЯ	*g*	198 – 244	Олимп. Гера и Посейдон Земля. Молитва Агамемнона
ЗЕМЛЯ	*e*	245 – 252	Вмешательство Зевса (орел)
	f^*	253 – 334	Сражения
	e	335 – 336	Вмешательство Зевса (ободрение троянцев)
	d^*	337 – 437	Бои. Колесницы
ОЛИМП	$\bar{c}$	438 – 443	Зевс уезжает с Иды
	b^*	444 – 468	Протест Геры
	a^*	469 – 488	Олимп. Речь Зевса. Ночь

На уровне песен уже проявляется фрактальное самоподобие законов симметрии «Илиады», когда зеркальная симметрия имеет место как на уровне крупных частей песни:

$$\text{ОЛИМП – ЗЕМЛЯ – ОЛИМП+ЗЕМЛЯ – ЗЕМЛЯ – ОЛИМП,} \qquad (29.2)$$

так и на уровне частей этих частей, так что полная схема песни имеет такой вид (центр зеркальной симметрии, как всегда, обозначен кругом):

$$a - b - c - d - e - f - e - ⓖ - e - f^* - e - d^* - \bar{c} - b^* - a^*. \qquad (29.3)$$

Въедливый читатель, который решит перепроверить сказанное (а именно на такого читателя и рассчитана книга), заметит, что в нашей схеме остался не у дел, т.е. без зеркально симметричной пары, конец VIII песни (стихи 489—565). Для этого отрывка зеркально симметричная пара находится в предыдущей VII песни (стихи 433—482). Таким образом, наша схема получает вполне логичное обрамление:

VII, 433—482	Утро после боя. Лагерь ахейцев.
VIII, 489—565	Ночь после боя. Лагерь троянцев.

Надо сказать, что принятое сегодня деление «Илиады» и «Одиссеи» на 24 песни по числу букв греческого алфавита было установлено александрийскими учеными в III в. до н.э. для удобства работы со списками гомеровских поэм и никоим образом не отражает художественные замыслы самого Гомера.

Не знаю как читателя, а автора этой книги симметрийные структуры гомеровских поэм, созданные без малого 3000 лет назад, просто завораживают. Однако законы симметрии в речах героев и даже на уровне песен еще не могут свидетельствовать в пользу «единого» Гомера. Вполне возможно, что разные аэды пользовались одним и тем же геометрическим стилем при написании разных частей «Илиады» и «Одиссеи». Для доказательства композиционного единства поэм необходимо обнаружить подобные законы не только на локальном, но и на глобальном уровне, т.е. на уровне разных песен и всей поэмы в целом. И глобальные законы симметрии в таких гомеровских поэмах есть!

Рассмотрим первую (I) и последнюю (XXIV) песни «Илиады» — две наиболее удаленные друг от друга части поэмы. Как и во всей поэме, обе песни имеют две основные сюжетные линии: А — *дела земные* и В — *дела божественные* (на схеме они обозначены соответственно черной и белой линиями). Кроме того, обе песни открываются прологом и содержат сообщение о 9 днях страданий и горя (9 дней ниспосланного Аполлоном мора в лагере ахейцев в I песни и 9 дней приготовлений к погребению тела Гектора в лагере троянцев в XXIV песни). Налицо явная симметрия основных сюжетных и композиционных планов. Но это только начало.

I песнь

		1 – 7	Пролог
	a	8 – 21	Хрис приходит к Агамемнону с выкупом за дочь
	b	22 – 42	Агамемнон не принимает выкупа и не возвращает дочь
		43 – 100	Девять дней мора среди ахейцев
A	*c*	101 – 317	Спор между Ахиллом и Агамемноном (Ахилл временно выходит из сражений)
	d	318 – 348	Ахилл и Брисеида (у Ахилла отнимают Брисеиду)
	α	349 – 427	Фетида и Ахилл
	e	428 – 456	Хрисеиду возвращают в свой город (радость Хриса)
	f	457 – 492	Конец мора ахейцев. Ритуал. Пир
B	β	493 – 535	Зевс и Фетида
	γ	536 – 611	Спор богов на Олимпе

XXIV песнь

		1 – 21	Пролог
B	γ	22 – 76	Спор богов на Олимпе
	β	77 – 125	Зевс и Фетида
	α	126 – 140	Фетида и Ахилл
	a^*	141 – 467	Приам приходит к Ахиллу с выкупом за тело сына
	$\bar{b}^*$	468 – 595	Ахилл принимает выкуп и возвращает тело Гектора
A^*	c^*	596 – 642	Беседа Ахилла и Приама (Ахилл временно прекращает бои)
	$\bar{d}$	643 – 676	Ахилл и Брисеида (возвращение Брисеиды)
	e^*	677 – 775	Приам возвращается в Трою с телом Гектора (плач троянцев)
		776 – 784	Девять дней приготовлений к похоронам гектора
	f^*	785 – 804	Погребение тела Гектора. Ритуал. Пир

Земная сюжетная линия А в обеих песнях состоит из 6 частей: a, b, c, d, e, f, семантическая симметрия (или антисимметрия) которых очевидна из схемы. Например, a (Хрис приходит к Агамемнону с выкупом за дочь) — a* (Приам приходит к Ахиллу с выкупом за тело сына) — *симметрия*; b (Агамемнон не принимает выкупа и не возвращает дочь) — $\bar{b}^*$ (Ахилл принимает выкуп и возвращает тело Гектора) — *антисимметрия*. И т. д.

Симметрия божественной сюжетной линии В, состоящей из 3 частей: α, β, γ, выдержана еще точнее — семантически все элементы этой линии строго совпадают. Вообще на протяжении всей поэмы Гомер более строго относится к симметрии божественной линии. Так, в рассмотренной нами VIII песни симметрия божественной линии (Олимп на схеме) выдержана морфологически с точностью до одной строки!

А.Н. ИВАНОВ. Приам, испрашивающий у Ахиллеса тело Гектора. *1824 г.*
Строгая зеркальная симметрия композиции картины Иванова как нельзя лучше соответствует последовательно выдержанной зеркальной симметрии композиции «Илиады» Гомера.

Элементы земной сюжетной линии A обеих песен и их прологи подчинены *закону переносной симметрии,* а элементы божественной сюжетной линии B и сообщения о 9 днях несчастий — *закону зеркальной симметрии.* В I песни земная и божественная линии вплетены друг в друга, что делает композицию первой песни более изощренной, хотя и нарушает симметрию обеих песен. Но именно *нарушенная,* или *приблизительная, симметрия,* как мы знаем из первой части книги, является основным и пока необъяснимым законом морфологии природы. Так что за 3000 лет до обнаружения закона приблизительной симметрии в физике Гомер пользуется этим законом в построении своих поэм!

Существует еще одна любопытная связь между античностью и современностью. Еще античные исследователи Гомера заметили симметрию отдельных монологов и сцен в «Илиаде» и «Одиссее». Однако потребовалось более 2000 лет для того, чтобы разгадать подлинную симметрийную фрактальность бессмертных творений Гомера. Сделал это в последней четверти XX в. грузинский филолог Рисмат Гордезиани.

Главной заслугой Гордезиани было *последовательное проведение принципа симметрии* в исследовании гомеровских поэм. Просто, как все гениальное, как Архимедова идея интеграла. Однако идею от ее воплощения подчас разделяют два тысячелетия. Если две крайние песни «Илиады» зеркально симметричны, значит, должен существовать и центр симметрии. А если вся «Илиада» симметрична, значит, должны существовать ее смысловые блоки, также зеркально симметричные относительно этого центра. Гордезиани нашел этот центр симметрии и эти блоки и в «Илиаде», и в «Одиссее».

Что же является центром симметрии «Илиады»? Напомним, что «Илиада» — это поэма о гневе Ахилла:

Гнев, богиня, воспой Ахиллеса, Пелеева сына
Грозный, который ахеянам тысячи бедствий соделал...

Ахилл разгневался на предводителя ахейского воинства Агамемнона за то, что тот отобрал у него пленницу Брисеиду. Он со своим войском прекращает сражаться на стороне Агамемнона, а мать Ахиллеса богиня Фетида уговаривает Зевса покарать Агамемнона. С этого момента начинаются беды ахейцев. Троянцы теснят греков и готовы поджечь их корабли, дабы отрезать путь к отступлению. Посланный Ахиллом оглядеть поле битвы верный друг Ахилла Патрокл узнает о критическом положении греков. Ахилл разрешает Патроклу помочь грекам. В бою Патрокла убивают, и тогда Ахилл вступает в сражение и начинает мстить троянцам за убитого друга. Ахилл убивает Гектора, сына троянского царя Приама, и оскверняет его тело. Приам по внушению богов приходит к Ахиллу с выкупом за тело сына. Гнев Ахилла смиряется — он отдает отцу труп сына и объявляет перемирие для похорон всех героев:

Все собралися вновь и блистательный пир пировали
В доме великом Приама, любезного Зевсу владыки.
Так погребали они конеборного Гектора тело.

Между антисимметрией гнева Ахилла и плача по Гектору, между этими первыми и последними строками «Илиады» Гомер, словно геометрический орнамент Дипилонской вазы, уложил всю десятилетнюю историю Троянской войны, историю неисчислимых бед двух народов и неизмеримого трагизма каждой отдельной судьбы.

Как считает Гордезиани — и это оправдано логикой развития сюжета, — семантическим центром симметрии поэмы, ее кульминацией является момент, когда посланный Ахиллом Патрокл своими глазами видит бедственное положение греков. Именно со свидетельства Патрокла о критическом положении ахейцев, свидетельства, окруженного описанием ранения главных ахейских героев, битвы у стены греческого лагеря и греческих кораблей, начинается перелом поэмы — вступление в сражение сначала Патрокла, а затем и самого Ахилла. Итак, центральную часть композиции «Илиады», ее центр симметрии, представляет объединяющий XI—XIII песни блок К, внутренняя структура которого также зеркально симметрична и имеет вид:

$$\text{a} \quad \text{ⓑ} \quad \text{a} \qquad (29.4)$$

	a	Беды ахейцев (ранение главных героев)
K	*b*	Свидетельство Патрокла о бедах ахейцев
	a	Беды ахейцев (сражения у стены и кораблей)

Именно от этого центра семантической симметрии «Илиады», как круги по воде, расходятся к началу и концу поэмы тождественные по смыслу, но имеющие разную семантическую окраску события «Илиады». Гордезиани выделяет 10 таких «кругов», 10 зеркально симметричных смысловых блоков поэмы. Таким образом, структура всей «Илиады» оказывается зеркально симметричной относительно *единого* центра симметрии поэмы К. Это ли не лучшее доказательство в пользу *единого* Гомера! Итак, вся «Илиада» построена по следующей зеркально симметричной формуле:

$$\text{A B C D E F G H I J} \quad \text{Ⓚ} \quad \text{J}^* \text{ I H}^* \text{ G}^* \text{ F}^* \text{ E}^* \text{ D}^* \text{ C}^* \text{ B A}^*. \qquad (29.5)$$

Как легко видеть из *формулы «Илиады»* (29.5), восемь пар смысловых блоков поэмы находятся в отношении зеркальной дисимметрии, а две пары, относящиеся к божественной сюжетной линии, точно симметричны. К сожалению, у нас нет возможности раскрыть внутреннюю структуру всех десяти пар семантически симметричных блоков «Илиады», но две крайние пары А—А* и В—В мы уже рассмотрели. Имея в качестве опоры блоки А, В, К, В, А*, любознательный читатель может попытаться самостоятельно, исходя из текста «Илиады», определить внутреннее устройство оставшихся пар. Ну а ответ к этой задаче можно найти в книге Р. Гордезиани «Проблемы гомеровского эпоса». Жаль только, что книга эта, как и большинство хороших книг, является библиографической редкостью.

Но прежде чем читатель ринется решать *уравнение «Илиады»*, заметим, что в формуле Гордезиани (29.5) не нашлось зеркально симметричной пары для X песни «Илиады». Десятая песнь, или «Долония», давно не дает покоя исследователям Гомера. Эта песнь, повествующая о том, как ночью Диомед и Одиссей захватили троянского лазутчика Долона и с его помощью похитили чудесных коней фракийского царя Реса, явно выпадает из контекста всей «Илиады». По мнению большинства гомерологов, «Долония» является более поздним включением в поэму. Формула «Илиады» Гордезиани, в которой не нашлось зеркально симметричной пары только для «Долонии», является, на наш взгляд, лучшим доказательством инородного происхождения этой песни. Таким образом, структурно-математический метод позволяет дать экспертную оценку текста на предмет его единства и принадлежности тому или иному автору. Конечно, подобные *методы математической криминалистики в филологии* находятся еще в эмбриональном состоянии, но безусловные успехи математики в приложении ко всем наукам позволяют быть уверенными, что за этими методами будущее.

Итак, мы рассмотрели пять уровней симметрии «Илиады»: уровень всей поэмы (29.5), уровень смысловых блоков поэмы (29.4), уровень крупных частей песен (29.2), уровень частей крупных частей песен (29.3) и уровень монологов (29.1a,b). И это, разумеется, не предел. Помимо названных, можно выделить еще уровень частей монолога (формула (29.1b) фактически и представляет этот уровень), уровень отдельных сцен поэмы и т. д. Все эти уровни «Илиады» объединены единым формообразующим принципом — *принципом симметрии.* Значит, структуры всех уровней «Илиады» подобны структуре всей поэмы, т.е. *самоподобны.* Значит, *«Илиада» есть симметрийный фрактал поэзии.*

Единый принцип формообразования — *принцип симметрии,* или *геометрический стиль,*— пронизывает всю структуру «Илиады» от целого до мельчайших частей. Структурная скрупулезность Гомера в поэзии сродни математической строгости Баха в музыке, а сами симметрийные структуры «Илиады» Гомера производят не менее глубокое впечатление, чем структуры золотого сечения в Хроматической фантазии и фуге ре минор И. С. Баха. А ведь это все тот же Гомер, автор и трепетной сцены свидания Гектора и Андромахи (VI, 404—411), и ужасающих своим натурализмом картин сражений (XVI, 345—350), и полной глубочайшего драматизма сцены мольбы Приама к Ахиллесу (XXIV, 477—479).

Воистину математик и поэт в гении неотделимы!

И все-таки именно Гомер-математик должен подвести нас к решению гомеровского вопроса, ибо именно математике принадлежит последнее слово в решении любых научных споров. *Единство* симметрийного алгоритма *в многообразии* самоподобных структур «Илиады», *фрактал геометрического стиля* — не это ли лучшее доказательство в пользу единого Гомера?! Десятки километров и сотни килограммов книг и статей написаны по гомеровскому вопросу. Но не является ли одна строка *формулы «Илиады»* более весомым вкладом в гомеровский вопрос?! Ответ нам представляется очевидным — является! И пять тысячелетий истории математики в истории мировой культуры убеждают нас в справедливости этого ответа.

Итак, структурно-математический анализ «Илиады» не оставляет сомнений в том, что «Илиада» написана по единому плану одним автором. А как обстоят дела с «Одиссеей»? Ведь именно с различий между двумя поэмами и начался гомеровский вопрос. Симметрийный анализ «Одиссеи», проделанный Гордезиани, дает ответ и на этот вопрос: *«Одиссея» имеет ту же структурную формулу, что и «Илиада»,* а именно:

$$\mathrm{A\ B\ C\ D\ E\ F\ G}\ \ \textcircled{\mathrm{H}}\ \ \mathrm{G^*\ F^*\ E^*\ D^*\ C^*\ B^*\ A}. \qquad (29.6)$$

На уровне всей поэмы «Одиссея», как и «Илиада», подчинена закону зеркальной симметрии, тогда как на уровне смысловых блоков в «Одиссее», как и в «Илиаде», преобладает закон переносной симметрии. Значит, «Одиссея» также написана по единому плану одним автором. Более того, поскольку структурные формулы обеих поэм совпадают, значит, *обе поэмы написаны одним и тем же автором.*

Ну а как быть с различиями «Илиады» и «Одиссеи» в лексике, эпических формулах и даже этических нормах и мировоззренческих позициях, которые были замечены еще харидзонтами? Да, таких различий немало, но ведь и поэмы Гомера посвящены абсолютно разным темам: «Илиада» — это война, а «Одиссея» — это мир. Действия и помыслы героев «Илиады» устремлены к одной общей идее — победе над врагом, тогда как герои «Одиссеи» более независимы и индивидуальны в своих чаяниях и поступках. Даже боги в «Илиаде» ближе к людям, чем в «Одиссее», боги в «Илиаде» воюют наравне с людьми и объединены с ними общим стремлением к победе. Так что различие в лексике и даже философии в обеих поэмах вполне закономерно и объясняется скорее различием содержаний двух поэм, чем несовпадением авторов.

Для решения же гомеровского вопроса более важными являются стилистические и композиционные особенности обеих поэм, по которым с большим основанием можно судить о «руке» автора. И здесь обе поэмы обнаруживают более сходства, чем отличия. *«Илиада» и «Одиссея» имеют тождественные глобальные и различные локальные структуры.* Глобальные структуры «Илиады» и «Одиссеи» определяются тождественными зеркально симметричными формулами (29.5) и (29.6). Локальные структуры на уровне отдельных сцен и монологов в «Илиаде» также тяготеют к зеркальной симметрии, тогда как в «Одиссее» на этом уровне преобладают законы переносной симметрии и более сложные композиционные принципы. Так что в главном — в глобальных структурах, определяющих композиционный строй обеих поэм, Гомер оставался Гомером, тогда как в малом его стиль эволюционировал к большей изощренности и большему разнообразию в отделке «Одиссеи». И это также важное свидетельство, с одной стороны, в пользу единого Гомера, а с другой стороны — в пользу Гомера-художника. Ибо истинный художник, с одной стороны, всегда стремится оставаться самим собой в главном, но, с другой стороны, всю жизнь старается преодолеть себя и совершенствует свой стиль.

И последнее. *Распределение объема речей центрального героя «Илиады» Ахилла и двух главных героев Агамемнона и Гектора симметрично.* «Илиада» — поэма о гневе Ахилла, значит, Ахилл самим Гомером определен как главный герой поэмы. Следующими за Ахиллом по значимости героями являются предводитель греков Агамемнон и военачальник троянцев Гектор. Эта тройка главных героев «Илиады» образует зеркально антисимметричную композицию с Ахиллом в центре и двумя враждующими командирами по бокам. А как распределены объемы речей этих трех главных героев «Илиады»?

Казалось бы, поскольку Ахилл прогневался на Агамемнона и не участвует в боевых действиях — а других действий в «Илиаде» нет,— то его речи должны уступать в объеме речам Агамемнона или Гектора. Но отнюдь. Как подсчитал Гордезиани, *речи Ахилла в «Илиаде» занимают почти 1000 (960) строк, а речи Гектора и Агамемнона приблизительно по 500 строк.* Таким образом, речи Ахилла по объему не только не меньше речей Агамемнона или Гектора, но *объем речей Ахилла равен сумме объемов речей Гектора и Агамемнона.* Более того, *объемы речей противоборствующих вождей Гектора и Агамемнона равны.* Не это ли лучшее доказательство в пользу единого Гомера? Могло ли «собрание песен слепцов» вдруг оказаться столь тщательно взвешенным и уравновешенным?! Из всего обилия симметрийных законов Гомера этот простой и ясный результат кажется нам наиболее впечатляющим (возможно, именно благодаря своей ясности и простоте), и мы специально сберегли его для прощания с Гомером.

29.2. ДАНТЕ

Гомер — Вергилий — Данте. Неразрывная связь времен, неизбывная преемственность культур заключена в этих трех именах трех высочайших вершинах человеческого духа. Рождение римской культуры из греческой и возрожденческой культуры из них обеих символизируют эти три имени, обнимающие два тысячелетия в истории человечества. Так что, памятуя начало Евангелия от Матфея, описывающее родословную Иисуса Христа, Сына Давидова и Сына Авраамова, можно сказать: *Гомер родил Вергилия, Вергилий родил Данте.*

Гомер — Вергилий — Данте. В начале века выдающийся знаток и популяризатор античности Фаддей Зелинский писал, что эти три имени с такою же точностью определяют развитие идеи загробного мира, с какою три точки определяют окружность. Сейчас нам хочется взглянуть на трех великих поэтов шире и сказать: *вопреки тому, что три точки необходимо лежат на одной прямой, эти три точки, лучше — три звезды, определяют главный вектор развития всей мировой литературы.* Недаром святой Иеро-

РАФАЭЛЬ. Данте. *Фрагмент фрески «Парнас». 1510 г. (справа).*
Могила Данте. *Равенна (слева).*

ним называл Вергилия «истинным Гомером латинян», а Данте называли «тосканским Гомером»: каждый поэт мечтал бы вести свою духовную родословную от Гомера, но не всякий даже из великих заслужил право встать на этой почетной прямой. Данте, бесспорно, заслужил.

Как и Гомер, и Вергилий, Данте больше чем поэт. Это символ. Символ высших культурных ценностей и символ целых эпох. Это последний поэт уходящей эпохи средневековья и в то же время первый поэт грядущей эпохи Возрождения. Закономерно, что главным произведением Данте является символическая поэма «Божественная комедия», ставшая энциклопедией философии, теологии и культуры средних веков. «Произведение наиболее зрелое и содержательное внутри себя, подлинный художественный эпос христианского католического средневековья, величайший сюжет и величайшая поэма — это «Божественная комедия» Данте». Так писал о великой поэме великий Гегель.

Данте Алигьери родился в мае 1265 г. во Флоренции, богатом и просвещенном городе Тосканы. Он не без гордости считал себя потомком древних римлян, сограждан и современников обожаемого им Вергилия, хотя на самом деле выходил из среднего сословия. В девятилетнем возрасте и на всю жизнь он влюбился в девочку своих лет по имени Беатриче, но в 25 лет Беатриче умерла, оставив в душе молодого Данте первую незаживающую рану:

> На небе Беатриче воссияла,
> Где ангелов невозмутим покой...

Эпоха рубежа 1200—1300-х годов — *дученто и треченто* — была бурным временем в истории Флоренции. То было время яростной борьбы *гвельфов*, сторонников римского папы, и *гибеллинов*, сторонников германских императоров. Данте с головой окунулся в водоворот этой борьбы. Он занимает ряд ответственных постов в партии гвельфов и правительстве Флоренции, выполняет важные дипломатические поручения. В мае 1300 г. партия гвельфов раскололась на *белых* и *черных*. Вскоре черные гвельфы победили, и Данте как один из лидеров белых гвельфов был заочно приговорен к сожжению на костре и конфискации имущества. Начались годы изгнания из родной Флоренции — вторая незаживающая рана поэта.

Поначалу, оскорбленный незаслуженным приговором, Данте пытался продолжать борьбу из эмиграции, но скоро осознал, что политика — удел грязных и бесстыдных людей, отступил и, как он сам говорил, организовал «партию из самого себя». История Флоренции потеряла заурядного политика, а мировая культура обрела великого поэта.

Последняя вспышка политической активности Данте была связана с годами правления германского императора Генриха VII. Но Генрих неожиданно умер, а вместе с ним и надежды Данте на возвращение в родную Флоренцию. Политические враги Данте вновь победили, и в октябре 1315 г. он вновь был приговорен к смертной казни. Теперь уже навсегда — приговор был отменен только в 1966 г.! То была третья и последняя рана поэта.

Три раны Данте не могли не оставить следа в его творчестве. Они во многом определили торжественный пафос и гордое величие «Божественной комедии», которые недостижимы в произведениях благоденствующего автора. Символично, что последние годы жизни Данте провел в Равенне — последней столице древней Римской империи. Здесь он закончил свою поэму, здесь в 1321 г. нашел вечное успокоение. Тело Данте покоится в Равенне и поныне, несмотря на запоздалые попытки Флоренции дать родину своему гению, хотя бы после его смерти.

Свое главное произведение Данте безыскусно нарек «Комедией», возможно, потому, что оно было написано на «vulgaris» — общенародном итальянском языке, а не на ученой латыни, как подобало бы трагедии или философскому трактату. Возможно, надменный Данте умышленно принизил название своего шедевра, дабы ввести в заблуждение простодушных читателей. Кто-кто, а Данте прекрасно понимал, что в «Комедии» он выступает не только как поэт и философ, но и как пророк и Божий избранник. Но благодарные потомки быстро осознали истинную цену творения Данте и наградили «Комедию» эпитетом «Божественная». Как следовало понимать этот эпитет? Как указание на произведение о граде Божьем или как намек на Боговдохновенность книги, подобной Библии, Авесте или Корану?

Действительно, открываемые в Дантовой «Комедии» горизонты настолько грандиозны, что невольно приходит мысль о Божественном озарении автора. Недаром Пушкин относил «Комедию» к произведениям, сам замысел которых гениален. Откуда явились Данте эти миры — сумрачные круги Ада, крутые уступы Чистилища, лучезарные сферы Рая? Кто поведал ему об устройстве мироздания? Как мог один человек охватить мыслью и сердцем эту «poema sacra» — священную поэму об откровениях потустороннего мира? Вот как отвечает на этот вопрос выдающийся русский дантолог, потомок прославленного русского полководца И. Н. Голенищев-Кутузов: «Чтобы создать эти миры, которые были едва намечены в немощных произведениях средневековой литературы — хождениях, легендах, миры, неясные даже для теологов, ронявших немногие скупые слова о том, что будет с душами, покинувшими земные пределы, необходима была фантазия, равной которой не знала Европа со времен Гомера. Воображение Данте поистине превзошло и восточный вымысел автора «Книги лестницы», где рассказывается о запредельных путешествиях Магомета, и «Видение апостола Павла».

Прежде чем ступить в Дантовы миры два слова о том, кто сделал эти миры доступными для русского читателя. Путь Данте в Россию растянулся на шесть веков. Только в 1932 г. одаренный поэт и высокообразованный филолог Михаил Лозинский взял на себя смелость принять предложение издательства «Academia» по воссозданию «русского Данте». Более десяти лет в адских условиях сталинских гонений на интеллигенцию, в холоде и голоде блокадного Ленинграда работал Лозинский над переводом поэмы. Воистину то был титанический труд, сравнимый с усилиями самого Данте. В 1939 г. в переводе Лозинского вышел «Ад»; в 1944 г. — «Чистилище»; в 1945 г., в год Победы,— «Рай»; в 1946 г. Лозинский был удостоен Государственной премии первой степени. Сталин любил и ценил грандиозные проекты: несмотря на войну и разруху, несмотря на явное противоречие теистической «Комедии» атеистической «линии» партии, нашлись и бумага, и краска на книгу и деньги на премию. «Русский Данте» стоил затрат, а перевод Лозинского остается лучшим русским переводом «Комедии» и сегодня, полвека спустя.

Но вернемся к самой «Божественной комедии». Лозинский писал: «По грандиозности замысла, по архитектурной стройности его воплощений, по многообразию и разительности образов, по страстной силе своего реализма поэма Данте не знает себе равных среди европейских литератур». Нас будет интересовать только архитектоника поэмы, хотя только одна эта тема может составить предмет многих исследований.

Данте не случайно называл себя геометром:

Как геометр, напрягший все старанья,
Чтобы измерить круг, схватить умом
Искомого не может основанья,
Таков был я при новом диве том...
(Рай, XXXIII, 133—136)

В своей поэме Данте выступил гениальным геометром и архитектором. Пропорции поэмы, гармония ее частей и целого воистину совершенны. Поэму Данте справедливо сравнивают с готическим собором, хотя это сравнение стало столь же избитым и столь же невразумительным, как разговоры о «законах красоты» Маркса. А ведь пропорциональный строй поэмы звучит мощным хоралом и доставляет не меньшее эстетическое наслаждение, чем сами образы поэмы. Войдем и мы под своды дантовых пропорций.

Если «Комедия» Данте — готический собор, то этот собор, безусловно, построен по системе ad triangulum. Число 3 пронизывает структуру поэмы от целого до мельчайших частей. Воистину «Комедия» есть причудливый троичный фрактал, подобный звезде Кох, в основании которой лежит равносторонний треугольник и которая рассыпается на сотни и тысячи таких же исчезающе малых треугольников. Рассмотрим этот фрактал подробнее.

ДОМЕНИКО ДИ МИЧЕЛИНО. Данте и три царства. *Фрагмент. 1465 г.*

Поэма Данте состоит из трех частей (кантик): «Ад», «Чистилище», «Рай». Это история странствий Данте по трем царствам потустороннего мира. Каждое из трех царств имеет свое строго определенное предназначение. Ад — это *мир осуждения* и торжества высшей справедливости; Чистилище — *мир искупления* и восхождения к духовному самоопределению; Рай — это *мир блаженства* и познания абсолютной истины.

Три части поэмы — это и три мира, в которых жил сам Данте. Это *ад* его мирской жизни изгнанника и борца за справедливость; это *чистилище* внутренней борьбы поэта с самим собой, извечная необходимость выбора между легкодоступным земным и труднодостижимым горним; это *рай* духовной жизни поэта, его вера в вечные идеалы и абсолютные ценности, его христианская любовь к себе подобным.

Каждая кантика «Комедии» заканчивается словом «stella» — звезда, светило. Так что *три путеводные звезды указывают путь Данте по трем загробным мирам.*

В каждой части поэмы 33 песни — две тройки, поставленные рядом. Таким образом, троичное деление поэмы на кантики рассыпается в каждой кантике на тридцать три песни. Вместе это дает 99 песен. Но «Ад» за счет вводной первой песни содержит не 33, а 34 песни, т.е. оказывается как бы неправильной кантикой. Зато на уровне всей поэмы это несовершенство «Ада» приводит к тому, что общее число песен в поэме становится равным 100 — десятикратному повторению священного пифагорейского числа 10. Итак, нарушенная симметрия «Ада» обеспечивает гармонию всей «Комедии», так же как и зло является необходимым элементом прекрасного универсума.

Ад разделен на 9 кругов, Чистилище — на 9 уступов (считая 2 уступа Предчистилища), Рай — на 9 небесных сфер. Таким образом, число 9 — «триада триад» — определяет строение всего Дантова космоса, структуру каждого из трех потусторонних миров. Вместе с тем, по глубокому убеждению Данте, каждый из этих миров не может не являть собой совершенства, определяемого священной десяткой, поэтому в целом все три загробных мира содержат по 10 элементов.

Ад, помимо 9 кругов, имеет преддверие, в котором, гонимые вихрем слепней и ос, томятся души *ничтожных* — людей не добрых и не злых, людей, в равной степени безразличных и Богу, и Его врагам. Гора Чистилища, имеющая 9 уступов, венчается Земным Раем — царством гармонии и блаженства на Земле. Здесь две реки: Лета, дающая забвение грехам, и Эвноя, воскрешающая память о добрых делах. Небесный Рай, помимо 9 небесных сфер, содержит также Эмпирей (εμ-πυρος — объятый пламенем) — высшую и наиболее близкую к Богу часть Рая, откуда сила, мысль и любовь Бога питает энергией небесные сферы.

Ключевые числа 3, 9 и 10 участвуют также в делении структурных элементов трех загробных миров на более мелкие составляющие. Так, *седьмой круг Ада состоит из 3 поясов; восьмой круг Ада — особый ад в аду — содержит 10 концентрических рвов — Злых Щелей, соединенных мостами; Эмпирей состоит из 9 кругов, на которых обитают 9 ангельских чинов.*

Ангельские чины разбиты на три триады: первая, наиболее близкая к Богу — серафимы, херувимы, престолы; вторая, центральная тройка — господства, силы, власти; третья, самая удаленная от Бога и самая приближенная к миру и человеку триада — начала, архангелы, ангелы. Серафимы, обитающие на ближайшем к Богу и потому самом маленьком круге Эмпирея, правят самым большим, девятым кругом Рая — Перводвигателем; херувимы правят восьмой небесной сферой — сферой звезд и т. д.

В седьмом круге Ада карается *насилие.* Это тяжкий грех, заслуживающий особого внимания, и оттого *седьмой круг Ада разбит на три пояса.* В первом поясе, в кипящей крови реки Флегетон, мучаются *насильники над ближними* — убийцы, грабители, тираны. Второй пояс образует лес самоубийц — *насильников над собой.* Их души превращены в засохшие ветви скрюченных деревьев, терзаемых ужасными птицами гарпиями. В третьем поясе — раскаленной пустыне, поливаемой огненным дождем,— страдают *насильники над Богом,* богохульники.

Наиболее тяжкий и разнообразный из грехов — *обман* — карается в восьмом круге Ада. Поэтому в нем 10 Злых Щелей, где терпят разнообразные мучения разного рода обманщики — люди, злоупотребившие доверием людей: соблазнители, льстецы, церковные коррупционеры — симонисты, прорицатели, взяточники, лицемеры, воры, коварные советники, сеятели раздоров, фальсификаторы. В иерархии грехов Данте строго соблюдает единственный принцип: *чем глубже преступление вторгается в духовные сферы бытия, тем страшнее возмездие.* Поэтому убийцы у Данте менее грешны, чем самоубийцы, а фальшивомонетчики караются строже убийц. Аналогичный принцип определяет и физическую географию Ада: *чем глубже круг в воронке Ада (больше его порядковый номер), тем тяжелее грех, караемый в нем.*

Принцип возмездия определяет *троичную структуру Ада по типам прегрешений: невоздержанность, насилие и обман.* Невоздержанность, или нарушение естественной меры, — наименее тяжкий грех, почти не затрагивающий духовных сфер бытия. Поэтому невоздержанность карается в верхних кругах Ада: втором (сладострастники), третьем (чревоугодники или попросту обжоры), четвертом (скупцы и расточители) и пятом (гневливые и унылые). Насилие, как мы уже говорили, карается в седьмом круге, а обман — в восьмом и девятом, самых страшных кругах Ада.

Девятый круг, где мучаются разного рода предатели — самые гнусные из обманщиков, — это царство леденящего душу холода. Это уже не круг на уступах адской воронки, а ее дно, ледяное озеро Коцит, куда вмерзли предатели родных, предатели отечества, предатели друзей и предатели благодетелей. Слезы замерзают на их щеках, ужасный ветер леденит их душу. В центре озера — а это одновременно и центр Земли — находится вмерзший по пояс в лед властитель Ада сатана Люцифер. Некогда ближайший к Богу серафим, он предал Бога, за что был низвергнут с небес и превращен из самого прекрасного в самое ужасное творение. От удара Люцифера о Землю и образовалась воронка Ада.

У Люцифера три пары крыльев и три лица. Крылья Люцифера неистово машут, поднимая ледяной вихрь, зубы скрежещут, слезы смерзлись в огромные сосульки, а из трех пастей стекает омерзительная слюна. *В трех пастях Люцифера три самых гнусных предателя.* В пасти среднего, красного лица торчит ногами наружу Иуда, предатель Христа. Сатана жует его и сдирает когтями кожу со спины. В пасти правого, мертвенно-желтого и пасти левого, черного лица — Кассий и Брут, предатели и убийцы Цезаря. Эти ужасные триады завершают структуру Дантова Ада.

Между тем наше изучение триадных структур в композиции «Комедии» и конструкции Дантова космоса неизбежно привело нас к *триадной символике* поэмы. Здесь «Комедия» открывает неисчерпаемые кладовые.

Три спутника сопровождают Данте по трем загробным мирам: Вергилий, Беатриче и святой Бернар. На земле от врат Ада с знаменитой надписью «Входящие, оставьте упованья»[1] до Земного Рая Данте провожает Вергилий. Это первые 63 (6+3=9) песни поэмы (Ад, I — Чистилище, XXIX). Но язычник Вергилий не может войти в сферы Небесного Рая, и далее от Земного рая до Эмпирея Данте сопровождает христианка Беатриче. Это следующие 34 (3+4=7) песни поэмы (Чистилище, XXX — Рай, XXX). Наконец, в сферы Эмпирея Данте вводит не простая христианка, а святой Бернар Клервоский (1091—1153), любимый и уважаемый Данте богослов-мистик и поэт, настоятель основанного им монастыря в Клерво, один из создателей духовно-рыцарского ордена тамплиеров и вдохновителей второго крестового похода. Это последние 3 песни поэмы (Рай, XXXI —Рай, XXXIII).

«Три благословенные жены», три заступницы Данте на небесах — Мария, Лючия и Беатриче — посылают поэту Вергилия. Во II песни «Ада» рассказывается, как Мария, заметившая попавшего в беду Данте, склоняет к милости Христа и обращается к Лючии с просьбой послать ему вожатого. Лючия, почитаемая Данте сиракузская мученица IV в., которой он молился и просил излечить больные глаза, передает поручение Марии Беатриче. Беатриче спускается в Ад к Вергилию — как все язычники и некрещеные младенцы он обитает в первом круге Ада — и доверяет ему миссию проводника. Но что приключилось с Данте?

> Земную жизнь пройдя до половины,
> Я очутился в сумрачном лесу,
> Утратив правый путь во тьме долины.
>
> (Ад, I, 1—3)

Данте пытается выбраться из лесной чащи, карабкаясь по склону горы. Но тут *три зверя — рысь, лев и волчица — преграждают путь Данте.* Это начало поэмы полно тайного смысла. Сумрачный лес — это и хаос заблуждений человеческой души, и мрак политической жизни Флоренции. Данте пытается вырваться из этого хаоса, но путь ему преграждают три зверя. Это снова аллегория. Три зверя означают и наиболее опасные пороки человека: рысь — ложь и предательство, лев — гордость и насилие, волчица — алчность и себялюбие. Но это и порочные общественные институты, отравлявшие жизнь Данте: рысь — предавшая поэта родная Флоренция; лев — правитель-тиран, французский король Филипп IV Красивый, разгромивший любимый Данте рыцарский орден тамплиеров; волчица — погрязшая в корыстолюбии римская церковь.

И так далее. Символические и семантические триады превращаются у Данте в настоящую «триадоманию». Мы видим *три звезды,* символизирующие три христианские добродетели: веру, надежду, любовь. *Три ступени* из разного камня у врат Чистилища: белый мрамор символизирует первородную природу человека, пурпурный камень — грех, алый порфир — искупительную жертву. В Раю венец из сияющих и поющих солнц *трижды* оборачивается вокруг поэта. *Три слоя бытия* раскрываются в поэме: личная драма Данте, история общества и устройство мироздания. В свою очередь,

[1] Помимо этого первода Лозинского, популярен также и другой русский перевод: «Оставь надежду, всяк сюда входящий».

бытие мироздания преподается как *бытие трех миров:* мира неорганической природы, мира живой природы и мира небесной природы, о которых говорится соответственно в первой, второй и третьей кантиках. *Три мифологических и исторических пласта* слиты воедино в поэме: ветхозаветный, античный и христианский. И так далее.

Помимо структурных, семантических и символических триад, *триадный принцип пронизывает всю поэтику «Комедии».* «Божественная комедия» написана *терцинами* — цепными строфами из трех стихов (см. гл. 26). Разумеется, терцины выбраны Данте не только как поэтический символ триады. Как отмечают многие исследователи, цепи терцин являются необычайно «философичной» строфикой, несущей в себе непрерывную цепь рождений, взаимных превращений явления в сущность, гегелевских переходов от тезиса к антитезису и от антитезиса к синтезу.

Многие песни «Комедии» объединены в семантические триады. Так, песни XV, XVI и XVII дантологи называют *трилогией Каччагвиды.* Здесь на пятой небесной сфере, небе Марса, происходит встреча Данте со своим прадедом, праведным воином Каччагвидой. Прадед предсказывает своему правнуку изгнание из Флоренции и грядущую нетленную славу:

Твой крик пройдет, как ветер по высотам,
Клоня сильней большие дерева;
И это будет для тебя почетом.

(Рай, XVII, 133—135)

И опять-таки заключительные слова Каччагвиды в трилогии занимают 6 (=3+3) терцин, а само предсказание помещено точно в центре речи прадеда Данте — начале четвертой терцины.

В *трех песнях* (Рай, XXIII—XXV) *три апостола* — Петр, Иаков и Иоанн экзаменуют Данте о сущности *трех богословских добродетелей* — веры, надежды, любви. В *трех* последних песнях «Рая» дается описание Эмпирея, структуру которого, как мы уже отмечали, определяет «триада триад» — число 9.

«Комедия» изобилует *тройками терцин,* образующими в тексте семантические абзацы. Особенно хорошо это видно на прямой речи. Вот, например, реплика Вергилия из диалога Вергилия и Данте в III песни «Ада»:

И вождь в ответ: «То горестный удел
Тех жалких душ, что прожили, не зная
Ни славы, ни позора смертных дел.

И с ними ангелов дурная стая,
Что, не восстав, была и неверна
Всевышнему, средину соблюдая.

Их свергло небо, не терпя пятна;
И пропасть Ада их не принимает,
Иначе возгордилась бы вина».

(Ад, III, 34—42)

Песнь I «Ада» начинается с пяти смысловых троек терцин, которые можно озаглавить Лес — Рассвет — Ободрение —Рысь — Лев. В целом деление I песни на семантические абзацы происходит только по целым терцинам и выглядит следующим образом (цифры обозначают число терцин):

3-3-3-3-3-2-3-2-4-4-4-3-3-3-2.

Как видим, I песнь содержит 9 троек, 3 двойки и 3 четверки терцин, т. е. тройки терцин составляют 60% объема первой песни. Михаил Лозинский признавался, что, работая над переводом «Комедии», он научился думать терцинами. Можно смело утверждать, что в поэме Данте думал тройками терцин.

Многочисленны в «Божественной комедии» примеры *троекратных анафор:*

Я увожу к отверженным селеньям,
Я увожу сквозь вековечный стон,
Я увожу к погибшим поколеньям...

(Ад, III, 1—3)

троекратных рефренов:

Когда я внял: «Что я меняюсь цветом,
Не удивляйся; внемля мой глагол,
Все переменят цвет в соборе этом.

Тот, кто, как вор, воссел *на мой престол,*
На мой престол, на мой престол, который
Пуст перед Сыном Божиим, возвел

На кладбище моем сплошные горы
Кровавой грязи; сверженный с высот,
Любуясь этим, утешает взоры».

(Рай, XXVII, 19—27)

Здесь же мы снова встречаем пример тройки терцин в прямой речи. Можно отметить также частые примеры *трех типов обращений.* Так, на протяжении поэмы Данте называет Вергилия *отец, учитель, вождь.* И так далее.

Последнюю и важнейшую символическую триаду «Божественной комедии» мы встречаем в последней, XXXIII песни «Рая». Святой Бернар обращается с молитвой к Богоматери и просит даровать Данте способность увидеть Бога. Молитва Бернара принята благосклонно, и Данте вслед за Марией вонзает взор в глубины «Света Неизреченного». Зрение и дух Данте крепнут, «и созерцанием опламененный», он видит триединого Бога, Пресвятую Троицу — Бога Отца, Бога Сына и Бога Духа Святого — в виде трех «равноемких» кругов:

> Я увидал, объят Высоким Светом
> И в ясную глубинность погружен,
> Три равноемких круга, разных цветом.
>
> Один другим, казалось, отражен,
> Как бы Ирида от Ириды встала;
> А третий – пламень, и от них рожден.
>
> (Рай, XXXIII, 115—120)

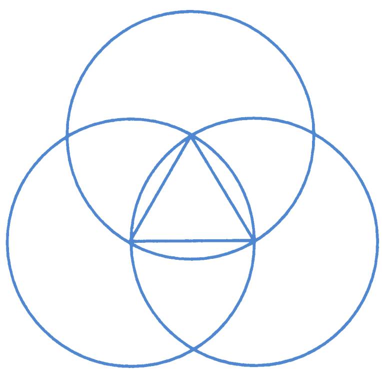
Вот он, истинный источник Дантовой «триадомании». Создавая символическую энциклопедию средневекового христианства, Данте не мог не положить в основу ее символики идею Троицы. Ибо Троица — главный догмат христианской религии, отличающий ее от других монотеистических религий.

Принятый в точных формулах на Втором Вселенском соборе в 381 г. как Символ веры, догмат Троицы остается самым непостижимым учением христианства. Что значит, что Бог, с одной стороны, един, а с другой является Троицей? Что означают парадоксальные равенства 1=3 и 3=1, в которых выражена идея троичности Бога? «До этой истины не может вознестись естественными силами никакой человеческий разум, измыслить ее не в состоянии никакая человеческая мудрость. Догмат о троичности лиц в Боге есть догмат богооткровенный в особенном и полнейшем значении этого слова, догмат собственно христианский». Так пишут богословские книги. А православный богослов Павел Флоренский добавляет: «Из всех философских доказательств бытия Божия наиболее убедительно звучит именно то, о котором даже не упоминается в учебниках: «Есть Троица Рублева, следовательно, есть Бог».

Как же описать увиденную Троицу, если сказано в Евангелии: «...никто не знает Сына, кроме Отца; и Отца не знает никто, кроме Сына» (Матф.: 11, 27)?! Поразительно, с какой мудростью и деликатностью решает Данте эту труднейшую богословскую задачу. Единственно верным шагом здесь остается обращение к абстрактным геометрическим образам. И Данте выбирает круг, точнее три круга, в качестве зримого образа Троицы.

Во всех культурах с древнейших времен круг почитается самой совершенной фигурой. Не зная понятия симметрии, древние прекрасно понимали, что из всех плоских фигур только круг при любом повороте вокруг центра совпадает сам с собой, т. е. обладает высшей центральной симметрией. Вот почему круг издревле символизирует Небо, путь Солнца, сферу звезд — все, что возвышенно, совершенно, вечно и приближено к Богу. Эстетика круга как высшей степени совершенства подсказала Пифагору гипотезу о круговых траекториях планетных орбит, которая, как мы знаем сегодня, в целом оказалась верна.

Но как конкретно представлял себе Данте взаимное расположение трех «равноемких» кругов? Об этом также говорится только полунамеками. Философ и культуролог, профессор Александр Доброхотов, автор небольшой, но необычайно емкой книжечки о Данте, по поводу трех кругов пишет: «Видимо, Данте представлял себе при этом фигуру, получающуюся, если из вершин равностороннего треугольника описать окружности, радиусы которых равны стороне треугольника. Образованная таким способом трехлепестковая роза часто встречается в витражах средневековых собо-



ров. Два круга, напомнивших Данте феномен двойной радуги, это Отец и Сын. Круг, вставший над ними как язык пламени, — Святой Дух. Цвета Троицы, очевидно, традиционны: золотой — Отец, белый — Сын, красный — Дух Святой».

Через сто лет после Данте русский гений Андрей Рублев положил три круга в основу композиции своего шедевра «Троица Ветхозаветная». Как показал автор[1], пропорции прямоугольника «Троицы» Рублева близки к отношению $\sqrt{\Phi}:1$, где Ф есть коэффициент золотого сечения. Но прямоугольник $\sqrt{\Phi}:1$ обладает уникальными геометрическими свойствами и, в частности, порождает бесконечный ряд вписанных окружностей, радиусы которых относятся в золотой пропорции Ф. Первые три круга этого ряда — круг трех ликов, круг рук крайних ангелов, круг рук среднего ангела — и составляют основу композиции «Троицы» Рублева. Они показаны на обложке книги.

Сегодня трудно сказать, читал ли Рублев великого Данте. Скорее всего, не читал — слишком далеко отстояли в то время русское средневековье и итальянский проторенессанс. Однако три «равноемких» круга — у Рублева это три «равнопропорциональных» круга — незримо присутствуют в композиции прославленного русского шедевра. Они связывают центрально-симметричными золотыми пропорциями важнейшие смысловые элементы «Троицы» — лик среднего ангела и чашу, лик левого ангела с рукой правого, лик правого с рукой левого — и придают иконе Рублева божественную гармоничность.

Но почему именно число «три» определяет сущность Бога? Почему не «два» и не «четыре», а именно «три»? Много копий сломано философами и богословами вокруг числа «три». При этом назывались совершенно рациональные свойства, выделяющие число «три» в окружающей нас действительности. Это и *трехмерность геометрического пространства,* в котором мы живем. Это и *троичная природа времени:* прошлое, настоящее, будущее. Это и *триединство биологии семьи:* отец, мать, ребенок. Это и *троичная природа сознания,* в котором выделяют *рациональную, эмоциональную* и *интуитивную* составляющие. Это и сформировавшиеся на основе триединого сознания *триадные общекультурные ценности: истина — красота — добро, надежда — любовь — вера* и др. Это и открытая Гегелем *трехкоординатная диалектика мысли: тезис — антитезис — синтез.* Так что, действительно, как сказал Павел Флоренский, «троичность есть наиболее общая характеристика бытия».

И тем не менее, тот же Флоренский заключает свои «Заметки о троичности» словами: «Итак, никто не сказал, почему Божественных Ипостасей Три, а не иное число. Неслучайность этого числа, внутренняя разумность его чувствуется в душе, но нет слов, чтобы выразить свое чувство». Оставим и мы жалкие попытки объяснить божественную природу числа «три». Тем более что впереди нас ждут новые числовые тайны «Божественной комедии».

Земную жизнь пройдя до половины... Уже эта первая строка, открывающая «Комедию», полна глубокого философского и символического смысла. Она высвечивает огромную роль «половины» — центра симметрии и точки равновесия — и является ключом ко многим структурным закономерностям поэмы. В начале трудного пути в иные миры Данте видит себя странником, поднявшимся на вершину горы жизни (пол-жизни — это действительно вершина, с которой начинается спуск в старость), откуда в равной мере открыты и прошлое, и будущее.

Половина земной жизни, по Данте,— это 35 лет, и значит, для Данте, родившегося в 1265 г., это 1300 г. Действие «Комедии» относится к 1300 г., точнее к Страстной неделе 1300 г., хотя поэма писалась с 1307 по 1321 г. Увы, Данте не внял собственной теории и вместо «идеальных» 70 лет прожил только 56. Волею судьбы 35 лет оказались для Данте не центром симметрии его жизни, но центром динамической симметрии золотого сечения (56 : 35=Ф). Оба типа симметрии играют в «Комедии» заглавные роли.

---

[1] См.: Волошинов А.В. Троица Андрея Рублева: геометрия и философия // Человек.— 1997.— № 6.

1300-й год значил для Данте гораздо больше чем просто половину его собственной жизни. Смена веков во все века будоражила умы свидетелей этого события. Верующим, отслужившим в 1300 г. 15-дневную молитву в храмах Петра и Павла в Риме, отпускались грехи, и в своем благочестии они считались равными крестоносцам. Современники Данте видели в 1300 г. даже больше чем просто «середину» между эпохами дученто и треченто. В те времена 1300 г. понимался как центр всей мировой истории, первой половиной которой считались 6500 лет от сотворения Адама до 1300 г., а второй — 6500 лет от 1300 г. до Страшного суда. Вся мировая история составляла таким образом 13 000 лет, а 1300 г. был ее центром. Центральным событием 1300 г. являлась, разумеется, Пасха — праздник праздников, светлый день Воскресения Христова. Данте, чей центр жизни приходился на центр мировой истории, верил в свое особое предназначение — создать нерукотворный памятник этому выдающемуся событию. Так что Данте, пытавшийся объять весь миропорядок и названный за это через 500 лет «центральным человеком мира», воспринял бы эту характеристику буквально.

Сила и могущество центра, объединяющая стать центральной симметрии, гармония и очарование зеркальной симметрии, уравновешенность мысли и чувства и устойчивость мира и миропонимания становятся важнейшими эстетическими, символическими и формообразующими элементами всей «Комедии». Даже беглого знакомства с поэмой достаточно, чтобы убедиться в этом.

Вот первая, вводная песнь «Комедии», она же и песнь I «Ада». В песни две темы: *Данте,* «утративший правый путь во тьме долины» и теснимый тремя злыми зверями, и *Вергилий,* посланный ему на помощь. В песни 136 стихов или 45 терцин (напомним, что последняя терцина песни *yzy* всегда замыкается одним дополнительным стихом *z,* так что формула любой песни «Комедии» имеет вид $3n+1$, $n \in N$). Итак, 23-я терцина является морфологическим центром I песни «Ада», именно она служит семантической границей между темой «Данте» и темой «Вергилий», именно в ней *Вергилий представляется Данте*:

> Он отвечал: «Не человек; я был им;
> Я от ломбардцев низвожу мой род,
> И Мантуя была их краем милым.
>
> (Ад, I, 67—69)

Встреча Данте и Вергилия символизирует не просто встречу ученика и учителя, но и более широко — встречу христианства и античности. Для позднего средневековья, а лучше раннего предвозрождения античность становится не чуждой культурой, а истинным Учителем мудрости и красоты. Сам же Вергилий был для Данте не просто любимым поэтом, связующим Данте с «отцом поэзии» Гомером, но и провозвестником христианства — именно так толковали во времена Данте туманные стихи Вергилия о «деве» и «младенце». Итак, если свое время Данте понимал как центр мировой истории, то свою миссию он видел в центрроположении античной и христианской культур. И «как геометр» Данте помещает это центральное смысловое событие первой песни точно в ее геометрический центр.

Укажем еще на одну деталь архитектоники первой песни «Комедии», замеченную А. Доброхотовым. В 70-й строке песни Вергилий называет время своего рождения: «Рожден sub Julio (при Юлии. — *А.В.*), хоть в поздний год», а это 70 г. до н.э. Речь Вергилия в I песни занимает 51 стих по числу лет, прожитых Вергилием. Эта маленькая деталь в строении I песни — лучшее свидетельство того, с какой строжайшей тщательностью и в большом и в малом относился Данте к числовой структуре своей поэмы. В ней каждый шаг полон скрытого смысла!

В отличие от первой песни вторая песнь «Ада» не имеет явно выраженной зеркально-симметричной структуры и представляет собой три монолога — Данте, Вергилия и Беатриче, перемежающиеся между собой. Речь Беатриче передается устами Вергилия и фактически является частью его монолога. Однако и здесь важнейшее событие песни — *первое в поэме упоминание имени Беатриче* — помещено точно в центр песни. В песни 142 стиха или 47 терцин, а значит, 24-я терцина является центром песни, оставляя позади и впереди себя по 23 терцины. Именно здесь мы впервые читаем имя Беатриче:

Я Беатриче, та, кто шлет тебя;
Меня сюда из милого мне края
Свела любовь; я говорю любя.
(Ад, II, 70—72)

Беатриче в «Комедии» не просто юношеская любовь Данте. Беатриче — и муза, и заступница, и духовная наставница поэта. Если Вергилий в поэме символизирует земной разум, то Беатриче есть символ разума божественного. Она и «единственная, кем смертный род возвышенней, чем всякое творенье», она и «Господня чистая хвала». Поэтому неудивительно, что первое упоминание имени Беатриче Данте считает центральным событием второй песни. Удивительна математическая точность, с которой Данте воплощает в поэме задуманное.

На протяжении всей поэмы Данте остается необычайно строг и скрупулезен с употреблением имени Беатриче, как, впрочем, и со всеми другими именами. Свое имя в «Комедии» Данте называет только один раз и только в Чистилище (XXX песнь). Имя Христа употребляется строго 4 раза по числу Евангелий, оно встречается только в «Рае» и рифмуется только с собой. Имя Беатриче упоминается 63 раза во всех кантиках поэмы (6+3=9 — «число Беатриче»), причем рифмуется ее имя строго 9 раз. Воистину числовая символика поэмы неисчерпаема!

И последнее о второй песни. В песни 142 стиха, из которых монолог Вергилия и Беатриче занимает 84 стиха, монолог Данте — 35 стихов и авторская речь — 23 стиха (23+35+84=142).

Все эти числа очень близки к числам Фибоначчи 21, 34, 89 и 144 (21+34+89=144). Вспоминая, что отношение двух соседних членов ряда Фибоначчи есть коэффициент золотого сечения (см. гл. 17), мы приходим к выводу, что вторая песнь имеет в своей основе динамическую симметрию золотого сечения, определяемую четырьмя членами ряда золотого сечения:

$$\varphi^4 + \varphi^3 + \varphi = \varphi^2 + \varphi = 1.$$

Вот где источник гармонии и динамики второй песни! Это наша первая встреча с законом золотого сечения в «Комедии».

Но как появились пропорции золотого сечения во второй песни поэмы? Считал ли Данте число строк в речах своих героев? Для нас нет сомнений как в том, что Данте тщательно подсчитывал число упоминаний имени Беатриче или номер строки, где впервые должно появиться ее имя, так и в том, что подобные золотые пропорции появлялись в «Комедии» на подсознательном уровне. Как истинный художник с врожденным чувством гармонии Данте *чувствовал* и *угадывал* подобные пропорции поэмы, и они *сами* гармонизировали его «Комедию». Рассчитанное и угаданное, сконструированное и сотворенное, «левополушарное» и «правополушарное» тесно переплетены в поэме, и этот союз, по нашему глубокому убеждению, и составляет истинное искусство.

Третья песнь «Ада» в отличие от первой и второй не имеет структурно-семантического центра. Это и понятно, ибо третья песнь представляет собой трехчастную структуру типа $\varphi^3 : \varphi^2 : \varphi^2$. В самом деле, в песни из 136 стихов явно обозначены три темы: *врата Ада, ничтожные* и *Харон*, содержащие соответственно 30, 51 и 55 строк (30+51+55=136). Это очень близко к теоретическим значениям пропорций золотого сечения (32+52+52=136). Итак, в третьей песни мы впервые в «Комедии» встречаемся с трехчастной структурой золотого сечения.

Третья песнь — одна из важнейших песен «Комедии». В ней Данте вступает в иной мир: входит во врата Ада, проходит так называемое преддверие, где томятся души ничтожных, и, наконец, пересекает в лодке перевозчика Харона подземную реку Ахерон — границу, за которой следуют девять кругов Ада. Поэтому неудивительно, что третью песнь отличают как трехчастные динамические пропорции золотого сечения, являющиеся важнейшим морфологическим законом искусства, так и высочайший уровень поэтики. Третья песнь начинается с троекратной анафоры — излюбленного поэтического приема античной и средневековой риторики. Здесь и леденящая душу надпись на вратах Ада, предупреждающая о неотвратимости наказания зла:

Древней меня лишь вечные созданья,
И с вечностью пребуду наравне.
Входящие, оставьте упованья.

И чеканная фраза Вергилия, ободряющая Данте перед входом во врата Ада:

Здесь нужно, чтоб душа была тверда;
Здесь страх не должен подавать совета.

И полная презрения характеристика ничтожных — людей не плохих и не хороших, людей морально аморфных:

Их память на земле невоскресима;
От них и суд, и милость отошли.
Они не стоят слов: взгляни – и мимо!

И зловещие слова Харона:

Забудьте небо, встретившись со мною!

Г. ДОРЕ. Иллюстрация к «Божественной комедии» Данте. *1861 г.*
Флетий переправляет Данте и Вергилия через Стигийское болото в пятом круге Ада.

Если золотые пропорции третьей песни мы склонны отнести к «угаданным», то та же песнь дает нам еще один показательный пример пропорций «исчисленных». В песни III «Ада» Данте пересекает врата Ада, а в песни IX «Чистилища» — врата Чистилища. Эти события отделяет 40 песен — символическое число испытаний. Пройдя все круги Ада и Предчистилища, составившие 40 песен поэмы, Данте входит в Чистилище — отсюда начинается его восхождение к спасению и свободе, к небесным сферам Рая.

И так далее. В «Комедии» 100 песен, 3 кантики и необъятное число внутренних связей в них и между ними. Разумеется, мы не можем рассказать обо всем, да мы и не знаем всего, ибо «Божественная комедия» — это неисчерпаемый фрактал смыслов, символов и отношений. Мы рассмотрели только 3 первые песни поэмы. Завершая тему центра в поэме, укажем еще на три песни — по одной из каждой кантики.

Итак, «Ад» XXXIV — последняя песнь первой кантики. В песни 139 стихов, а в ее центре, 69-й строке, слова Вергилия, подводящие итог путешествию Данте по Аду: «Ты видел все, что было в нашей власти».

Далее, «Чистилище» XXX — центральная по смыслу и богатейшая по поэтике песнь поэмы. В песни 145 строк, а в ее центре, на 73-м стихе, происходит долгожданная встреча Данте с Беатриче: «Взгляни смелей! Да, да, я — Беатриче...» До этой строки — одной из важнейших кульминаций поэмы — в песни 72 стиха (7+2=9), после нее также 72 стиха (7+2=9). Более того, до XXX песни «Чистилища» в поэме 63 песни (6+3=9), после нее 36 песен (3+6=9). Так что вся XXX песнь зашифрована числом Беатриче! И как всегда у Данте от числа благодати 9 до совершенного числа 10 только один шаг. В самом деле, номер песни в кантике 30 (трижды священная десятка); номер песни в поэме 64 (6+4=10 — снова священная десятка).

И наконец, «Рай» XXXIII — последняя песнь поэмы. В ней также 145 стихов или 48 терцин. В 24-й терцине мощным аккордом звучит мольба Данте к Богу дать ему силы рассказать увиденное:

И даруй мне такую мощь речей,
Чтобы хоть искру славы заповедной
Я сохранил для будущих людей!

Приведенных примеров, очевидно, достаточно, чтобы убедиться: принцип зеркальной симметрии, принцип диады — уравновешенной пары — является наряду с триадным принципом одним из главных формообразующих принципов в поэтике Данте. Этот морфологический закон составляет часть философии «центрального человека мира» Данте, для которого Бог был центром мироздания, источником равновесной гармонии и симметричной устойчивости. Не случайно в нарушении равновесной меры Данте видел причины многих грехов. Поэтому для Данте в равной мере грешны *скупцы* и *расточители*, которые в четвертом круге идут «рать на рать» с воплями «Чего копить?» и «Чего швырять?»; *гневливые* и *унылые*, которые вместе барахтаются в грязи пятого круга. Данте претили любые нарушения меры, и он сам строжайше соблюдал законы меры в своей поэме.

До сих пор речь у нас шла в основном о законах меры в отдельных песнях «Комедии». Нам остается сказать несколько слов о законах меры, обнимающих всю великую поэму. В «Комедии» 14 233 стиха, которые распределены по кантикам следующим образом: «Ад» — 4720, «Чистилище» — 4755, «Рай» — 4758. Вторая и третья кантики различаются всего на 3 стиха, а их относительная разность составляет 0,06%. Трудно отыскать в истории искусств подобные примеры столь тщательного уравновешивания частей целого. Центр всей поэмы приходится на 7117 строку или 125 строку XVII песни «Чистилища», а центр центральной кантики — на 106 строку той же песни. Оба центра не совпадают на 19 строк и одновременно определяют трехчастное деление в золотой пропорции речи Вергилия о классификации грехов. Неужели Данте все-таки мог «слышать» все 14 322 строки ненаписанной поэмы одновременно?!

Число стихов в песни колеблется от 115 до 160. Впрочем, песен из 115 стихов только две, а из 160 — только одна. Среднее число стихов в кантике таково: «Ад» — 138,82, «Чистилище» — 144,09 и «Рай» — 144,18. Мы видим, что по мере приближения к Богу средняя длина песен в кантике увеличивается. Но еще важнее другое: среднее число стихов в «богоприближенных» кантиках — «Чистилище» и «Рае» — равно 144. Но это же число Фибоначчи! А два соседних числа Фибоначчи определяют золотое сечение.

Правда, «формула песни» $3n+1$ $(n \in N)$ не допускает решения 144, но имеет решение вида $144+1=48 \cdot 3+1=145$, т. е. 48 терцин + 1 стих. Это формула «идеальной» с точки зрения структурной гармонии песни. Таких песен в поэме 13, а по кантикам они распределены следующим образом: «Ад» — 1, «Чистилище» — 9, «Рай» — 3. Итак, по нашим расчетам, «Чистилище» получается самой гармоничной кантикой, и большинство дантологов сходятся в этом.

А самой совершенной песней с точки зрении структурной гармонии нам представляется XXXIII песнь «Рая». Само положение этой песни в «Комедии», песни, где Данте видит Бога, и песни, завершающей поэму, обязывает ее к совершенству. И это действительно так. Песнь открывается молитвой св. Бернара к Марии. Вот главные комплименты св. Бернара Марии.

7—8-й стихи:

В твоей утробе стала вновь горящей
Любовь, чьим жаром райский цвет возник...

13-й стих:

Ты так властна, и мощь твоя такая...

21-й стих:

Всех совершенств душевных совмещенье!

А вот и сама просьба в 33-м стихе:

И высшую открой ему Отраду.

Молитва св. Бернара услышана, Данте всматривается в «высокий свет, который правда льет», и (стих 55)

И здесь мои прозренья упредили
Глагол людей...

Данте говорит о том, как трудно ему выразить увиденное, ибо одновременно он увидел все, «что разлистано по всей вселенной: суть и случайность, связь их и дела». Он увидел (стих 89):

Все — слитое столь дивно для сознанья...

Заканчивает песню, кантику и поэму стих, объясняющий главную движущую силу увиденного. Эта сила — основа всего христианства, ибо это (стих 145)

Любовь, что движет солнце и светила.

Мы видим, что ряд Фибоначчи 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 высвечивает в XXXIII песни «Рая» главные вехи вознесения Данте к Богу (имеющиеся при этом два отклонения в одну строку не стоят упоминания). Это все убыстряющийся полет, но это равноускоренное движение с ускорением, равным коэффициенту золотого сечения Ф. Это скрытая сила гармонии и совершенства песни. Знал ли Данте о трудах Леонардо, по прозвищу Фибоначчи, из соседней с Флоренцией Пизы, умершего за 25 лет до рождения поэта? Но знал ли сам Леонардо Пизанский о тех высоких следствиях, к которым ведет его непритязательная задача о размножении кроликов?

Таковы некоторые числовые структуры и символы великой «Комедии» Данте. Таковым было творчество великого Алигьери, который, подобно творцу вселенной, соединил в своем творении «и жар холодных числ, и дар божественных видений». Мы рассказали только о части известного нам числового каркаса «Комедии», но нас не покидает ощущение, что большая часть этой внутренней арматуры поэмы остается до сих пор неизвестной. Седьмое столетие математика «Комедии» ждет своего исследователя.

И она непременно дождется, как дождались через три тысячелетия поэмы Гомера своего Гордезиани. «Как по ориентировке алтаря можно восстановить день закладки храма, так и по структуре «Божественной комедии» можно воспроизвести черты духовной жизни зрелого средневековья. Но сама эта задача требует творческих усилий. Жизнь поэмы в последующих веках и ее современное понимание — это не только разъяснение ее загадок, но и самопознание тех, кто подходил к ней с Дантовым призывом: «Яви мне путь...»

Эти слова из книги А. Доброхотова «Данте» вселяют в нас уверенность, что математика «Комедии» во все времена будет оставаться столь же привлекательной, как и ее поэзия. Воистину шедевры искусства фрактально неисчерпаемы.

29.3. ПУШКИН

Гомер — Данте — Пушкин. Эти три имени, разделенные тремя тысячелетиями, объединяет прежде всего то, что они являются высочайшими вершинами своих культурных эпох и своих национальных литератур. Но высочайшие вершины национальных литератур определяют и главный вектор развития мировой литературы. Так что, если попытаться отразить всю мировую поэзию в трех именах, возможно, эта троица была бы неплохим решением столь трудноразрешимой задачи. Писал же Томас Манн: «Если бы меня спросили о гениях поэзии, которых я люблю и считаю моими избранниками, если бы даже надо было назвать только шесть имен, даже всего лишь четыре имени, я никогда не забыл бы Пушкина».

Так Томас Манн писал через 100 лет после смерти Пушкина. А ведь через год после гибели поэта и не где-то в Германии, а у себя в России Виссарион Белинский был более сдержан: «Как поэт, Пушкин принадлежит, без всякого сомнения, к мировым, хотя и не первостепенным гениям». Правда, уже через год «неистовый Виссарион» как бы поправился: «Как народ России не ниже ни одного народа в мире, так и Пушкин не ниже ни одного поэта в мире». Но еще через три года снова засомневался. Воистину, чтобы понять и принять гения, нужно время. Ведь и Данте ждал несколько веков подлинной мировой славы. Впрочем, и в жизненном пути двух гонимых гениев было много общего.

26 мая (6 июня) 1799 г. Москва встретила рождение русского гения праздничным звоном всех своих «сорока сороков». Звонили, правда, не в честь новорожденного Александра, сына небогатого московского дворянина Сергея Пушкина, а в честь новорожденной Марии, внучки российского императора Павла. Но история

обладает особенностью повторяться, и не только как фарс. Через 200 лет, 6 июня 1999 г., Москва действительно звонила в честь поэта. День рождения Пушкина был объявлен национальным праздником. Такого не знали даже советские «монархи», называвшие своими именами города и веси.

Если о Гомере нам ничего не известно, если мы не знаем точной даты рождения Данте, то о Пушкине мы знаем буквально все. Каждое событие в жизни поэта рассмотрено вдоль и поперек, каждый день и даже час его последних лет и тем более месяцев досконально изучены пушкинистами. Но чем больше мы знаем, тем больше хотим узнать, а чем больше узнаем, тем больше загадок задает нам внутренний мир гения, ибо мир гения, как и его произведения, — это неисчерпаемый фрактал.

В книге на русском языке нет нужды пересказывать биографию Пушкина. Тем не менее мы отметим важнейшие вехи из жизни поэта, поскольку это будет иметь непосредственное отношение к математике пушкинской поэзии.

1811—1817 — *лицейские годы*, шесть незабываемых лет, время патриотического подъема Отечественной войны 1812 г., пора верной дружбы, светлых раздумий и радужных надежд. То был период интенсивного творческого развития юного поэта. Здесь были созданы первые маленькие шедевры: «Воспоминания о Царском Селе», «Лицинию», «Роза». Здесь расцвел его талант, здесь он впервые почувствовал себя поэтом.

1817—1820 — *первый петербургский период*. Закончив Лицей, Пушкин получил чин коллежского секретаря и назначен в Коллегию иностранных дел. Бесшабашно-праздничный Петербург послевоенных лет закружил Пушкина. Необузданное вольнолюбие и вакхическое упоение жизнью сплелись в стихах Пушкина этого периода. По всему Петербургу в списках ходят его «Деревня», «Ода на свободу», «Чаадаеву». Слава приходит к поэту, но вслед за славой всегда идут зависть, подлость, клевета. На Пушкина донесли, и в мае 1820 г. под видом служебного перемещения он был сослан на юг России.

1820—1824 — *годы неофициальной южной ссылки*. Начало ссылки, которую и сам Пушкин воспринимал как добровольное бегство из неволи на волю, было удачным: новые места — Украина, Кавказ, Крым, Молдавия; новые впечатления — степь, полуденный зной, сторожевые станицы, снежные вершины, горные потоки, море, дворцы Бахчисарая, бездыханные южные ночи; новые друзья и увлечения, встреченные поэтом в доме героя войны 1812 г. генерала Николая Раевского; тайные встречи с будущими декабристами В. Ф. Раевским, П. И. Пестелем, М. Ф. Орловым. То был период расцвета пушкинского романтизма. С 1820 по 1823 г. Пушкин живет в Кишиневе, пишет «Черную шаль», «Кинжал», «Песнь о вещем Олеге», «Кавказский пленник» и многое другое.

Однако даже неофициальная ссылка есть ссылка. Ощущение «узничества», разгром кишиневской ячейки Союза благоденствия, арест В. Ф. Раевского глубоко ранили душу Пушкина. Летом 1823 г. назревший духовный кризис поэта усугубил перевод в Одессу в канцелярию «придворного хама» графа М. С. Воронцова. Воронцов окружил поэта шпионской сетью, переписка Пушкина перлюстрировалась и поэтому в июле 1824 г. по приказу императора Пушкин был исключен со службы и выслан «на постоянное жительство в имение его отца сельцо Михайловское».

1824—1826 — *официальная северная ссылка в Михайловское*. Начало ссылки было тяжелым: униженное положение узника, да еще и надзираемого собственным отцом, острые стычки с ним, одиночество, бедность, тоска. Единственной отдушиной была поэзия, и Пушкин с головой уходит в творчество. Михайловская ссылка оказалась не только необычайно плодотворной для Пушкина-поэта, но и спасительной для Пушкина-человека. Здесь он создает такие великие произведения, как «Подражания Корану», «Буря», послание А. П. Керн («Я помню чудное мгновенье...»), пролог к «Руслану и Людмиле» («У Лукоморья дуб зеленый...»), центральные главы «Евгения Онегина» и многое другое. Здесь он готовит к изданию свой первый

О.А. КИПРЕНСКИЙ. Портрет поэта А.С. Пушкина. *1827 г.*
Этот один из немногих прижизненных портретов Пушкина был приобретен Третьяковской галереей в 1916 г. у Г.А. Пушкина, внука поэта.

сборник «Стихотворения Александра Пушкина», имевший неслыханный успех и принесший ему общероссийскую славу. Здесь же написан «Борис Годунов».

Но все имеет свой конец. В ночь с 3 на 4 сентября 1826 г. в Михайловское прискакал фельдъегерь с приказом немедленно ехать в Москву к новому императору Николаю I. По дороге в Москву Пушкин пишет величайший из своих шедевров — «Пророк».

1826—1830 — *между Москвой, Петербургом и Михайловским.* 8 сентября 1826 г. Пушкин был принят только что коронованным царем Николаем I, который объявил поэту «прощение» и свободу от обычной цензуры. Отныне сам государь император становился единоличным цензором первого поэта России. Подлинная цена царских «милостей» открылась позже, а пока поэт полон оптимистических планов. В Москве он создает журнал «Московский вестник», в Петербурге активно сотрудничает в «Литературной газете». Однако за каждой надеждой стояло скорое разочарование.

От разочарований поэта спасает дорога: Москва — Михайловское — Москва — Петербург — Михайловское — Петербург — Москва — Петербург — Москва. Пушкин рвется еще дальше — в Европу, на Турецкий фронт, в Индию, Китай, но не получает высочайшего разрешения. Наконец, он самовольно отправляется на Кавказ: Кубань —Тифлис — Арзрум. А в промежутках — отчаянные карточные «запои». Все это — свидетельства глубочайшего внутреннего беспокойства поэта, его двусмысленного положения царского избранника и царского пленника. В конце концов Пушкин осознает, что надо остановиться, нужно найти пристанище. 6 мая 1830 г. состоялась его помолвка с красавицей Натальей Гончаровой.

3 сентября — 30 ноября 1830 — *болдинская осень.* В предсвадебных хлопотах, состоявших в основном в поисках денег, Пушкин приезжает в нижегородское имение Болдино. Разразившаяся в Москве холера задерживает жениха в имении до наступления холодов. Настала самая плодотворная пора в жизни поэта. Ходящая рядом смерть будоражит и веселит Пушкина, как возбуждала война во время недавней поездки в Арзрум. Полтора столетия ранее та же холера, заточившая на два года в родной деревне Вулсторп 22-летнего Ньютона, внесла неоценимый вклад в развитие мировой культуры.

За три месяца болдинской осени Пушкин написал около 30 стихотворений, среди которых такие величайшие создания, как «Элегия» («Безумных лет угасшее веселье...»), «Для берегов отчизны дальной...», «Бесы», «Герой». Здесь в основном был завершен «Евгений Онегин», «маленькие трагедии» и первый прозаический опыт Пушкина «Повести Белкина», по существу, первое произведение классической русской прозы. С этого момента Пушкин пишет преимущественно прозу.

1831—1837 — *второй и последний петербургский период.* 18 февраля 1831 г. в Москве в церкви Большого Вознесения на Малой Никитской Пушкин обвенчался с Натальей Гончаровой. Невесте шел девятнадцатый год, жениху — тридцать второй. «Я женат — и счастлив; одно желание мое, чтоб ничего в жизни моей не изменилось — лучшего не дождусь». Во время венчания упали с аналоя Евангелие и крест. Пушкин побледнел. До гибели поэта оставалось ровно шесть лет.

Через три месяца молодые перебрались в Петербург. Пушкин принимает должность придворного историографа, работает над «Историей Петра I». Жена рожает ему детей — Машу, Сашу, Гришу, Наташу. Долгожданное семейное счастье достигнуто. Но как оно зыбко!

В 1833 г. Пушкин посещает пугачевские места, а осенью в Болдино заканчивает «Историю Пугачева». Здесь же во время второй болдинской осени он пишет такие вершинные произведения, как «Медный всадник», «Пиковая дама», «Песни западных славян». В конце года Пушкин «пожалован в камер-юнкеры» — должность, привлекательная для красавицы-жены и ее ухажеров и оскорбительная для немолодого мужа и славы России. Тихой семейной жизни пришел конец.

Пошли балы, сплетни, придворные интриги, мелкие и крупные стычки с царскими клевретами и самим государем. Открылась бездна светской пустоты. Стихи Пушкина последних лет проникнуты мотивами глубокой грусти и одиночества непонятого человека, жаждой «покоя и воли», мыслями о смерти. Таковы «Пора, мой друг, пора! покоя сердце просит...» (1834), «Странник» (1835), «Из Пиндемонти» (1836) и, наконец, завершающий, пророческий стих «Я памятник себе воздвиг...» (1836). 27 января (8 февраля) 1837 г. в результате злодейской светской интриги между Пушкиным и поклонником Натали Дантесом происходит дуэль. Пушкин смертельно ранен и через два дня умирает.

Погиб поэт! — невольник чести —
Пал, оклеветанный молвой...

«Пушкин есть явление чрезвычайное и, может быть, единственное явление русского духа», — сказал еще при жизни поэта Гоголь. «И пророческое», — добавил через полвека в речи на открытии памятника Пушкину в Москве Достоевский. И объяснил: «Ибо что такое сила духа русской народности, как не стремление ее в конечных целях своих ко всемирности и ко всечеловечности? Став вполне народным поэтом, Пушкин тотчас же, как только прикоснулся к силе народной, так уже и предчувствует великое грядущее назначение этой силы. Тут он угадчик, тут он пророк».

Однако обсуждение пророческой миссии Пушкина в русской и мировой культуре выходит далеко за рамки нашей книги, да мы и не считаем возможным о ней судить. Мы только позволим себе заметить, что истинная роль Пушкина в мировой культуре будет по-настоящему оценена скорее тогда, когда сам Пушкин достигнет возраста Данте.

Нас же будет интересовать вопрос значительно более узкий и конкретный: *определяют ли и если определяют, то в какой степени законы симметрии гармонию пушкинского стиха?* Ибо с кого же начинать анализ симметрийных законов в поэзии, как не с русского гения Пушкина?!

Мы остановимся только на малых поэтических формах в творческом наследии Пушкина — *стихотворениях Александра Пушкина*. Если такие грандиозные памятники, как «Илиада», «Божественная комедия» или «Евгений Онегин», создаются годами, то стихотворение, как правило, пишется под влиянием минуты. Стихотворение отражает состояние души поэта «hic et nunc» — «здесь и сейчас», стихотворение «приходит» к поэту, и он едва успевает записать его на бумаге. Поэтому если диадные зеркально-симметричные композиции «Илиады» и «Одиссеи» Гомера или триадная симметрия «Божественной комедии» Данте есть результат сознательного продумывания автором законов формы своего произведения, то симметрийные законы формы в стихотворении возникают скорее на подсознательном уровне. Тем более интересно знать, насколько сильно или слабо эти законы вторгаются в творчество автора.

В главе 26 мы выделили несколько уровней проявления законов симметрии в поэзии: уровень метрики, уровень рифмы, уровень строфики и уровень композиции. Если переносная симметрия метра является абсолютно необходимым законом поэзии, который и отличает поэзию от прозы, то по мере восхождения от низших уровней формообразования к высшим действие законов симметрии ослабевает. Так, симметрийные законы рифмы отсутствуют в белых стихах, хотя это скорее исключение из правил и рифму также можно назвать обязательным законом симметрии в поэзии.

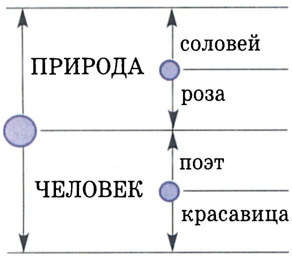
На высшем уровне композиции законы симметрии могут иметь место, но могут и не иметь. В первом случае заглавную роль играют статическая зеркальная симметрия (антисимметрия) и динамическая симметрия золотого сечения. Оба типа симметрии композиции проявляются как на морфологическом, так и на семантическом уровне — в главах 26, 27 мы рассмотрели некоторые примеры. Именно эти два закона симметрии в композиции пушкинского стиха — наименее изученном симметрийном уровне в поэзии — и будут нас интересовать. Симметрия метра у Пушкина была изучена еще к 100-летию со дня гибели поэта, а симметрия композиции исследована автором и М. Абрамовым к 200-летию со дня рождения поэта. *Зеркальная симметрия в композиции стихотворения* проявляется либо как разделение стиха на две (иногда четыре и более) равные по числу строк части, объединенные одинаковым или противоположным смыслом, либо как выделение равных по объему частей стихотворения, зеркально симметричных относительно середины стиха и также связанных семантически. В случае, когда равные по смыслу зеркально-симметричные строки совпадают дословно, зеркальная симметрия превращается в эпанастрофу или эпаналепсис. Стихотворение «Не пой, красавица, при мне...» есть прекрасный пример симметрии такого типа (см. гл. 26).

В случае, когда морфологически равные части противоположны по смыслу, имеет место *зеркальная антисимметрия.* Пример зеркальной антисимметрии, которая морфологически проявляется в виде деления стихотворения на две равные части по 16 строк, а семантически — в бинарной оппозиции *«я — ты»* (Пушкин — Батюшков), дает стихотворение «Батюшкову» («В пещерах Геликона...»).

1		2	
В пещерах Геликона	а	А ты, певец забавы	а
Я некогда рождён;	б	И друг пермесских дев,	б
Во имя Аполлона	а	Ты хочешь, чтобы, славы	а
Тибуллом окрещён,	б	Стезею полетев,	б
И, светлой Иппокреной	а	Простясь с Анакреоном,	а
Сыиздетства напоённый,	а	Спешил я за Мароном	а
Под кровом вешних роз,	б	И пел при звуках лир	б
Поэтом я возрос.	б	Войны кровавый пир.	б
Весёлый сын Эрмия	а	Дано мне мало Фебом:	а
Ребёнка полюбил,	б	Охота, скудный дар.	б
В дни резвости златые	а	Пою под чуждым небом,	а
Мне дудку подарил.	б	Вдали домашних лар,	б
Знакомясь с нею рано,	а	И, с дерзостным Икаром	а
Дудил я непрестанно;	а	Страшась летать недаром,	а
Нескладно хоть играл,	б	Бреду своим путём:	б
Но музам не скучал.	б	*Будь всякий при своём.*	б

Это стихотворение написано в 1815 г., на заре пушкинского творчества. Мы не знаем, осознанно ли поэт применил в нем зеркальную антисимметрию, но так или иначе следует отметить высокую структурно-симметрическую упорядоченность не только логики, но и рифм этого произведения, которые в первых четверостишиях строф перекрестные, а во вторых — парные.

Нередко зеркальная симметрия в поэзии имеет не один, а несколько уровней (несколько осей) симметрии, образуя *самоподобную* зеркально симметричную структуру. Пример такой фрактальной структуры дает стихотворение «Соловей и роза». Во-первых, здесь имеем уже встречавшуюся нам поэтическую антисимметрию: два морфологически симметричных четверостишия семантически являют собой типичную басенную антитезу *сюжет — иносказание* (в данном случае *природа — человек*). Во-вторых, каждое из четверостиший, в свою очередь, зеркально-симметрично делится входящей в него парой двустиший, парой бинарных оппозиций: «*роза — соловей*» и «*поэт — красавица*». Каждое двустишие объединено к тому же и парной рифмой. Таким образом, это незатейливое с виду восьмистишие содержит три зеркальные симметрии.



В безмолвии садов, весной, во мгле ночей, а
Поёт над розою восточный соловей. а
Но роза милая не чувствует, не внемлет, б
И под влюблённый гимн колеблется и дремлет. б
Не так ли ты поёшь для хладной красоты? а
Опомнись, о поэт, к чему стремишься ты? а
Она не слушает, не чувствует поэта; б
Глядишь – она цветёт; взываешь – нет ответа. б

В стихотворениях «Воспоминание» и «Слеза» (соответственно 32 и 20 строк) ось зеркальной симметрии приходится на момент смыслового перелома. В стихотворении «Измены» (84 строки) зеркально-симметрично (по 42 строки) разделены прошлые и нынешние переживания поэта. Все эти стихотворения, написанные в пору бесшабашной юности поэта, отличает железная дисциплина в их структурной организации. Как и подавляющее большинство других стихотворений с зеркальной симметрией, эти стихотворения объединяет: в структурном плане — симметрия равных частей, в семантическом — наличие бинарной оппозиции или перелома действия, в эмоциональном — как правило, строгая или грустная тональность.

Эти эстетические свойства зеркальной симметрии прошли через все творчество Пушкина и присутствуют в его поздних произведениях («Бесы», «На Испанию родную...» и др.). Все подобные стихотворения либо прямо повествуют о переживаниях поэта («Бесы», «Пора, мой друг, пора! покоя сердце просит...», «Напрасно я бегу к сионским высотам...» и др.), либо косвенно отражают его личные настроения (как стихотворения позднего, «мистического» периода творчества Пушкина: «Когда за городом, задумчив, я брожу...», «На Испанию родную...» и др.).

Золотое сечение в композиции стихотворения проявляется как наличие главного момента стихотворения (кульминации, смыслового перелома, главной мысли или их сочетаний) в строке, приходящейся на точку деления общего числа строк стихотворения в золотой пропорции. Часто эмоциональная кульминация стихотворения является и его главной мыслью, а главная мысль совпадает со смысловым переломом в стихотворении, т. е. часто различные функции золотого сечения в стихотворении слиты воедино.

В главе 27 мы уже встретили три пушкинских стихотворения с золотым сечением. Стихотворение «Сапожник», содержащее 13 строк и разделенное самим Пушкиным на 2 строфы по числам Фибоначчи 8 и 5, — яркий пример золотого сечения в структурной организации стихотворения. Одновременно его восьмая строка «*Суди, дружок, не свыше сапога*» является и его главной мыслью. В «Вакхической песне» строка «*Да здравствуют музы, да здравствует разум!*», стоящая на линии золотого сечения стихотворения, является кульминацией и главной мыслью одновременно. Наконец, стихотворение «Из Пиндемонти», в структурной организации которого участвуют шесть членов ряда золотого сечения

$$1,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3,\ \varphi^4,\ \varphi^5,\ \varphi^6,$$

является превосходным примером поэтического фрактала, построенного на самоподобии пропорций золотого сечения.

Но перейдем от отдельных примеров ко всему творчеству Пушкина. При выяснении роли структур зеркальной симметрии и золотого сечения в поэзии Пушкина автором совместно с аспирантом М. Абрамовым были изучены *все 792 стихотворения русского гения* за период его творческой биографии с 1813 по 1837 г. включительно (увы, в год смерти Пушкин не успел написать ни одного стихотворения). Почти все они созданы одномоментно, под влиянием какого-либо яркого впечатления, и потому являются хорошим материалом для обнаружения корреляции гармонических структур с состоянием души поэта.

Результаты анализа таковы: в каждом втором стихотворении Пушкина было обнаружено золотое сечение (385 стихотворений или 49%), а в каждом третьем — зеркальная симметрия (289 стихотворений или 36%). В двух из трех стихотворений (524 стихотворения или 66%) присутствует одно из двух рассматриваемых гармонических отношений, а в каждом пятом (150 стихотворений или 19%) — оба. Как видно, хотя каждый из рассмотренных законов симметрии не является строго обязательным для всего стихотворного наследия Пушкина, тем не менее их доля в творчестве поэта слишком велика, чтобы не видеть в них важнейшие структурообразующие законы композиции.

Стихотворное наследие Пушкина (792 стихотворения) насчитывает 20 322 строки. Из них 11 503 строки или 57% приходятся на стихотворения с золотым сечением и 3396 строк или 17% — на стихотворения с зеркальной симметрией.

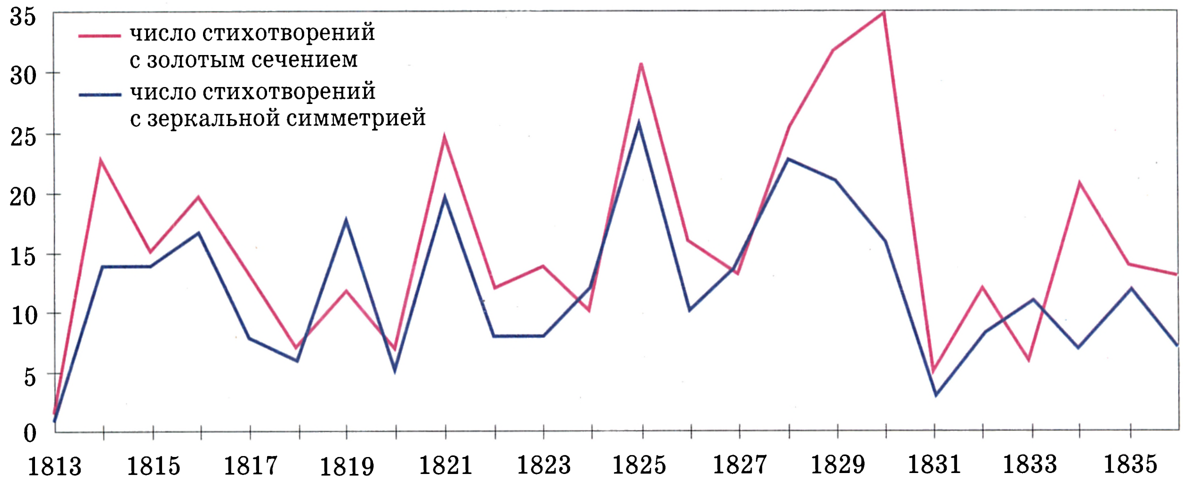
В целом же статистические данные по соотношению стихотворений с золотым сечением и без него в творчестве Пушкина с удивительной точностью находятся на уровне «fifty — fifty»: отношение общего числа стихотворений с золотым сечением и без него равно 49 : 51, отношение абсолютного числа строк в стихотворениях с золотым сечением и без него есть 57 : 43 и т. д.

Все эти данные свидетельствуют о равновесии гармонических и дисгармонических начал в поэзии Пушкина. Порядок и беспорядок, Космос и Хаос, аполлоническое и дионисическое начала в творчестве Пушкина строго уравновешены. Не потому ли Пушкин так легок и любим, что он не застегнут на все пуговицы математической гармонии, но и не расхлябан? В законах формы он в меру строг и в меру свободен. Данные по золотому сечению в творчестве Пушкина, на наш взгляд, являются лучшим доказательством того, что подлинное искусство живет на границе Космоса и Хаоса, яркой иллюстрацией к словам М. Бахтина о том, что «каждый культурный акт существенно живет на границах: в этом его серьезность и значительность; отвлеченный от границ, он теряет почву, становится пустым, заносчивым, вырождается и умирает».

Динамика распределения структур золотого сечения и зеркальной симметрии

Н. РУШЕВА. Пушкин и Анна Керн. *1968 г.*

V. МАТЕМАТИКА И ЛИТЕРАТУРА



Динамика абсолютного числа стихотворений с золотым сечением и зеркальной симметрией в творчестве Пушкина.

(всплески и спады амплитуды количества стихотворений с данными структурами) по годам творчества поэта полностью совпадает. Это хорошо видно на приводимом графике, свидетельствует об онтологическом родстве двух рассматриваемых гармонических отношений и о наличии в биографии Пушкина общих причин, обусловливающих динамику их поведения. Не случайно на знаменитую болдинскую осень 1830 г. приходится наибольший по амплитуде всплеск абсолютного числа стихотворений с золотым сечением, который дублируется также всплеском числа стихотворений с зеркальной симметрией. Заметим, что в основе связи структур зеркальной симметрии и золотого сечения лежит простое математическое соотношение

$$\varphi + \varphi^{4} = 2\varphi^{2}.$$

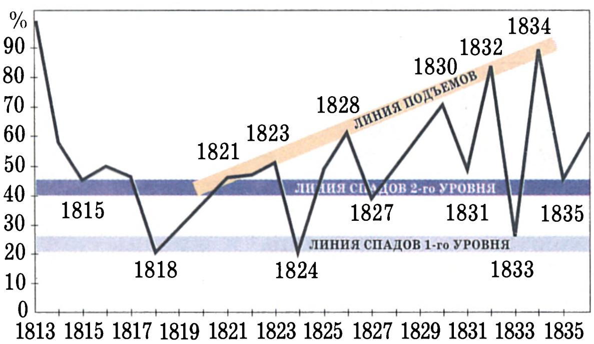
Однако гораздо важнее связующая обе структуры их эстетическая значимость. Важность структур золотого сечения и зеркальной симметрии в формировании композиции стихотворения доказывается тем, что в большинстве шедевров Пушкина присутствует по крайней мере одна из этих структур. Все прославленные стихотворения поэта, в которых нет преобладания ноток злобы и мрачного скептицизма, отличает присутствие хотя бы одной гармонической закономерности. Квинтэссенцию шедевров Пушкина составляют те стихотворения, в которых есть оба закона симметрии, слитые воедино. Достаточно привести названия: «Брожу ли я вдоль улиц шумных...», «Зимний вечер», «Пора, мой друг, пора! покоя сердце просит...», «Феодор и Елена».

И еще раз о фрактальных свойствах ряда золотого сечения. В 90% стихотворений Пушкина с золотым сечением оно проявляется не в виде одной пропорции, а в виде ряда, содержащего иногда до 10—12 членов, которые часто выделяют логическую структуру и являются кратким изложением смысла текста, оставляя «за бортом» его эмоциональную сторону. Более того, часто стихотворение содержит не один, а два ряда золотого сечения — *восходящий,* построенный от начала стихотворения, и *нисходящий,* построенный от его конца. Оба ряда создают фрактальные структуры взаимопроникающих самоподобий, а их строки являются логическим остовом для подбора к стихотворению различных гамм эмоциональных вариаций. Особенно четко эта функция двух рядов золотого сечения видна в крупных произведениях («К императору Александру», «Марко Якубович», «19 октября 1825 года», «Влах в Венеции» и др.).

Как уже отмечалось, золотое сечение является не только морфологическим, но и семантическим фракталом. В самом деле, смены смыслов художественного текста часто оказываются определены рядами золотого сечения, что и позволяет говорить о золотом сечении как семантическом фрактале. Эти свойства золотого сечения отчетливо видны в стихотворениях «Из Пиндемонти», «Сапожник», «Шишкову», «Воевода Милош» и др., где тональная структура построена в соответствии с числами Фибоначчи.

Однако симметрийные структуры, построенные на числах Фибоначчи, — наиболее точных целочисленных приближениях закона золотого сечения — являются в творчестве Пушкина скорее исключением, чем закономерностью. В законах формы Пушкин в меру точен и в меру нестрог. Если вспомнить, что за каждой сменой смыслов стоит также и фрактально-бесконечная смена толкований этих смыслов при каждом новом прочтении, в каждом новом контексте старого текста, то важность золотого сечения как семантического фрактала станет еще более очевидной. *По существу, семантическая фрактальность и обеспечивает вечную жизнь каждого истинного произведения искусства.*

Особый интерес представляет рассмотрение корреляции феномена золотого сечения в поэзии Пушкина с жизненными и творческими обстоятельствами поэта. С этой целью была рассмотрена динамика процентного содержания стихотворений с золотым сечением в творчестве Пушкина с 1813 по 1836 г. Сопоставляя динамику этого параметра с



Динамика процентного содержания стихотворений с золотым сечением в творчестве Пушкина.

биографией поэта, можно не просто сделать вывод о том, что поэт продуктивнее работал в условиях покоя, не отвлекаясь на далекие от поэзии дела (светская суета послелицейских лет, женитьба в 1831 г., написание «Истории Пугачевского бунта» в 1833 г.), но и обнаружить характер и глубину кризисов в творческой биографии поэта, а также специфику творческих подъемов.

На приводимом графике очевиден последовательный рост локальных максимумов доли стихотворений с золотым сечением в творчестве Пушкина — *линия подъемов*: 1821 — 47%, 1823 — 52%, 1826 — 62%, 1830 — 72%, 1834 — 91%. Если исключить из рассмотрения 1813 г. (как известно, Пушкин уничтожил многие ранние стихотворения), от которого сохранились только 3 стихотворения и все 3 с золотым сечением, т.е. 100%, то этот последовательный рост доли золотого сечения в творчестве Пушкина можно трактовать как рост поэтического мастерства Пушкина, как неуклонное овладение поэтом законами гармонии.

Если максимумы доли стихотворений с золотым сечением значительно разнятся между собой, то минимумы этого показателя распределены между двумя уровнями. *Первый, 20%-ный уровень спадов:* 1818 — 21%, 1824 — 20%, 1833 — 27% и *второй, 40%-ный уровень спадов:* 1815 — 44%, 1827 — 40%, 1831 — 50%, 1835 — 45%. Второй (менее глубокий) уровень спадов, по-видимому, связан преимущественно с внешними обстоятельствами жизни поэта (противоречия с лицейским начальством в 1815 г., суета московской жизни, особенно после михайловского уединения, неудачи с «Московским вестником» в 1827 г., бытовые заботы и финансовые затруднения, связанные с женитьбой в 1831 г., новые финансовые проблемы в 1835 г.). Относительно малая глубина второго уровня говорит о вторичности внешних факторов в жизни Пушкина.

Первый (более глубокий) уровень спадов соотносится скорее с внутренними кризисами в мироощущении поэта. В 1818 г., по воспоминаниям И.И. Пущина, Пушкин «...во время его болезни и продолжительного выздоровления ... затруднял...

вопросами и расспросами (насчет тайного общества), от которых я, как умел, отделывался, успокаивая его тем, что он лично, без всякого воображаемого общества, действует как нельзя лучше для благой цели: тогда везде ходили по рукам, переписывались и читались наизусть его «Деревня», «Ода на свободу», «Ура! в Россию скачет...». Ясно, что в этот период Пушкин терзался тем, что оставался в стороне от деятельности своих товарищей по духу, будущих декабристов, и его болезненное состояние отягощалось глубокими внутренними переживаниями.

Тот же внутренний дискомфорт поэт испытывал и в 1824 г.: первая половина этого года была заполнена конфликтом поэта с генерал-губернатором Воронцовым, вторая — очередным унижением властей, повторной ссылкой в село Михайловское под надзор отца и настоятеля Святогорского монастыря. Известно, что «между Сергеем Львовичем, испуганным новой ссылкой сына, и поэтом происходили тяжелые сцены. Вскоре отец и все родные уехали и началась уединенная жизнь Пушкина в изгнании. Первое время Пушкин сильно тосковал в деревне. «Бешенство скуки пожирает мое глупое существование»,—писал он жене Вяземского. Друзья волновались за поэта». Его лирика первой половины 1824 г. («Свободы сеятель пустынный...», «Демон» и др.) полна сомнений, разочарований и мотивов грусти».

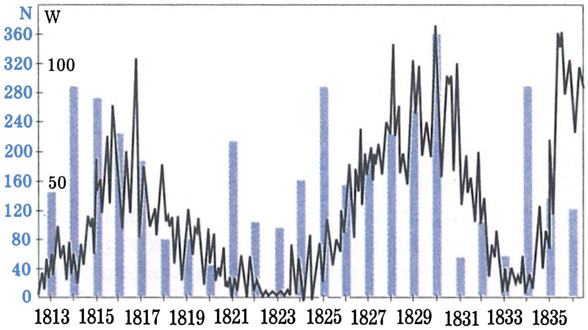
Очевидно, те же внутренние потрясения поэт испытывал и в 1833 г., когда он проезжал по следам восстания, собирая материал для «Истории Пугачевского бунта». Поездка не прошла бесследно, и впечатлительная душа поэта рвалась к стихии народного бунта (это хорошо видно в «Капитанской дочке»). В том же году Пушкин пишет поэму «Медный всадник», где отождествляет со стихией наводнения народное восстание, а государство изображает в лице сурового «Медного всадника».

Итак, все три года (1818, 1824, 1833), приходящиеся на первый уровень спадов золотого сечения, отмечены глубокими внутренними потрясениями поэта. Не соответствует ли это заметной дисгармонии в творчестве Пушкина, приходящейся на эти годы?

Золотое сечение и зеркальная симметрия приоткрывают нам сложную зависимость между гармонией души и гармонией стиха в творчестве поэта. Ибо стихи не растут без разбора на любой почве, а требуют особого состояния души, когда волны жизненной смуты или вынужденной скуки перестают захлестывать поэта. Вероятно, что пушкинское творчество было немыслимо без светлых тональностей, спутниками которых были симметрийные структуры в его произведениях. Полнота проявления золотого сечения и зеркальной симметрии, по-видимому, отражает и глубину творческого потока, влекущего поэта.

И последнее. Осреднение зависимости процентного содержания стихотворений с золотым сечением от времени их создания полиномами шестой степени дает синусообразную кривую с максимумом в окрестности 1831 г. и минимумом в окрестности 1821 г. Это поразительным образом коррелирует с характером динамики солнечной активности за этот период. Не менее убедительно эти данные выглядят и в абсолютных величинах.

На рисунке приведено сопоставление динамики солнечной активности, измеряемой так называемыми числами Вольфа W, в период с 1813 по 1836 гг. с нашими данными по абсолютному числу точек золотого сечения N в стихотворениях Пушкина. Результаты сопоставления явились для нас полной неожиданностью и, разумеется, носят только предварительный характер. Однако, как нам кажется, график достаточно красноречиво говорит сам за себя.



Сравнение динамики абсолютного числа точек золотого сечения в стихотворениях Пушкина с динамикой солнечной активности.

На сегодня ясно одно: результаты по сопоставлению динамики золотого сечения с динамикой солнечной активности нуждаются в более детальном изучении и не только в творчестве Пушкина. Возможно, они представят феномен золотого сечения в совершенно новом свете и дадут новое толкование известной метафоре русского религиозного философа Ивана Ильина (1882—1954), называющей Пушкина «солнечным гением»: «Он дан был нам для того, чтобы создать *солнечный центр* нашей истории».

Ибо в каждой метафоре, как известно, скрыта доля рационального смысла. Замечательный русский ученый Александр Чижевский (1897—1964), основоположник *гелиобиологии,* установил зависимость между циклами активности Солнца, равными в среднем 11 годам, и многими явлениями в биосфере. Циклические колебания солнечного излучения, как оказалось, влияют на рост годичных слоев дерева и урожайность зерновых, размножение и миграцию насекомых, рыб и млекопитающих, возникновение и обострение ряда заболеваний у человека и животных и т. д. Солнце не только источник жизни, но и причина многих процессов в эволюции «первой природы». Но почему то же Солнце через частицу «первой природы», художника, не может влиять на поведение «второй природы» — искусства? Кому же, как не Солнцу, быть источником гармонии мироздания и гармонии искусства? Возможно, в будущем будет создана некая *гелиоискусствометрия,* которая откроет нам новые тайны законов творчества.

Без малого полвека назад, отбывая 25-летний приговор во Владимирской тюрьме, Даниил Андреев (1906—1959) писал: «Многими исследователями отмечалось уже и раньше, что гармоничность Пушкина — явление иллюзорное, что в действительности он представлял собою личность, исполненную противоречий и совершавшую сложный и излучистый путь развития, хотя направление этого пути лежало, несомненно, ко все большей гармонизации. Это, конечно, так». Нам представляется, что динамика золотого сечения в творчестве Пушкина, точнее «линия подъемов» в этой динамике, является лучшим доказательством справедливости этих слов русского провидца и мученика.

Итак, Гомер — Данте — Пушкин. Сознательно ли, как у Гомера и Данте, или подсознательно, как у Пушкина, но мы видим, что поэзия Великих немыслима без своего структурного остова. Строение этого формообразующего скелета поэзии (а как мы видели в предыдущих частях книги и любого искусства) может быть самым разнообразным: диадная симметрия Гомера или триадная симметрия Данте, статическая зеркальная симметрия или динамическая симметрия золотого сечения Гомера — Данте — Пушкина — в любом случае законы симметрии выступают «скрепами», по-гречески «гармониями», удерживающими целое, сообщающими целому единство в многообразии его частей, обеспечивающими глобальный Порядок в локальном Хаосе искусства.

Дуальная природа красоты, соединяющая в себе Космос и Хаос, аполлоническое и дионисическое начала, возможно, является главным ее свойством и главной ее загадкой. Именно в этой двуликости красоты сокрыт источник многих диаметрально противоположных суждений о красоте и искусстве, подчас принадлежащих даже одному автору.

Вспомним хотя бы Платона, его знаменитую фразу из диалога «Ион»: «Поэт — существо легкое, крылатое и священное; и он может творить лишь тогда, когда сделается вдохновенным и исступленным и не будет в нем более рассудка: а пока у человека есть этот дар, он неспособен творить и пророчествовать». Это ли не гимн «правополушарной» концепции искусства! Но тот же Платон известен как автор многих «левополушарных» высказываний о красоте и искусстве. Достаточно вспомнить не менее знаменитые слова Платона из диалога «Филеб»: «Умеренность и соразмерность всюду становятся красотой и добродетелью».

И как Космос и Хаос в равной мере составляют сущность красоты, также и Математика и Искусство в равной мере являются неотъемлемыми элементами культуры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

То, что я понял — превосходно. Думаю, таково же и то, чего я не понял.

СОКРАТ

Только кончая задуманное сочинение, мы уясняем себе, с чего нам следовало его начать.

Б. ПАСКАЛЬ

Книга закончена. Но именно поэтому хочется вернуться к ее началу, ибо, как сказал один мудрец задолго до Паскаля, «идет ветер к югу и переходит к северу, кружится, кружится на ходу своем, и возвращается ветер на круги свои». Поэтому, подойдя к заключению, хочется вернуться к началу книги, к мудрому древнему знаку Инь — Янъ.

Возможно, кому-то могло показаться, что автор предпринял попытку навести «математический» порядок в искусстве, а то и вовсе «математизировать» искусство, как это происходит сегодня со многими науками. Нет и еще раз нет! Автор полностью солидарен с замечательным русским поэтом Аполлоном Майковым, который писал:

Гармонии стиха божественные тайны
Не думай разгадать по книгам мудрецов:
У брега сонных вод, один бродя, случайно,
Прислушайся душой к шептанью тростников...

Искусство — самостоятельная область культуры, оно живет своей жизнью, оно соткано из хитросплетения диалектически противоположных начал — материального и духовного, рационального и иррационального, объективного и субъективного, логичного и алогичного, сконструированного и сотворенного, рассчитанного и угаданного... Ни в науке, ни в технике, ни в религии нет подобного переплетения противоположностей. Поэтому в той своей части, которая описывается первыми прилагательными, искусство доступно точному и прежде всего математическому анализу. А в части, описываемой вторыми прилагательными, искусство неподвластно математике, да и не нужно разрушать эту волшебную часть искусства логикой. В самом деле, какой математикой можно описать вечное благородство царицы Нефертити, тревожное умиление Владимирской Богоматери, сдержанно-ироничную улыбку Моны Лизы, смиренную любовь ангелов рублевской «Троицы». К этой части искусства необходимо *прислушаться душой*.

Вот почему для нас математика и искусство дополнительны, и нам импонируют слова М. Кагана: «...невозможно проверить алгеброй гармонию и невозможно проверить — т. е. познать — гармонию без алгебры». Именно такой взгляд на математику и искусство символизирует древнекитайский символ гармонии Инь — Янъ.

Искусство — это не только «содержание», но и «форма». Последняя, по всей видимости, имеет сходные законы построения (формообразования) как в природе, так и в искусстве. И как все закономерное форма должна подчиняться прежде всего математическим законам. Возможно, новый XXI в. станет веком открытия новой *единой морфологии природы и искусства,* веком познания универсальных законов формообразования, объясняющих в равной мере строение как живого мира природы, так и живого организма искусства.

Но не убьет ли знание законов формообразования искусство, не превратит ли искусство в технологический процесс изготовления штампов? Истинному искусству это не грозит. Имхотеп и Хесира, Поликлет и Пракситель, Дюрер и Леонардо да Винчи, Моцарт и Бах, Палладио и Ле Корбюзье — все они на каких-то этапах отдавали поискам законов формообразования (в том числе и математических) больше усилий, чем «беспорядочному» и «безрассудному» искусству. Однако эти поиски, эта «математика искусства» не убили в них художников, а, скорее, наоборот, помогли стать великими. Более того, знание законов формообразования часто было для художника тем «магическим кристаллом», который помогал найти живое русло истины в мучительно тревожных сумерках, сопровождающих начало любого пути. Вспомним Пушкина:

> И даль свободного романа
> Я сквозь магический кристалл
> Еще не ясно различал.

В главе 5 мы познакомились с одним из грандиозных открытий уходящего XX в. — фрактальной геометрией. Но фракталам суждено стать в наступающем XXI в. не только новой геометрией природы, не только новым компьютерным искусством, но и новой алгеброй гармонии. В самом деле, рассмотренные нами самоподобные ряды золотого сечения в архитектонике Хроматической фантазии и фуги ре минор И. С. Баха, в пропорциях храма Василия Блаженного, в вертикальном строе канона Поликлета и «Троицы» Андрея Рублева, в стихах Пушкина — все эти тождественные структуры, связующие различные искусства, есть не что иное, как фракталы искусства. Но это только первый робкий шаг к постижению фрактальной природы искусства. И потому грядущий XXI в. видится автору не только веком математического искусства фракталов, но и веком фрактальной математики искусства, веком теснейшей интеграции математики и искусства, веком союза точного и гуманитарного знания.

В главе 6 мы видели, что симметрия форм живой природы обязана своим происхождением прежде всего закону тяготения. Но тяготение — вечный закон природы; значит, вечна и симметрия, и, значит, вечно симметрия будет ассоциироваться с красотой. С доисторических времен симметрия играла огромную роль в искусстве. Та же заглавная роль симметрии в природе в полной мере осознана наукой нашего времени. Таким образом, математические законы симметрии становятся крепким связующим звеном между наукой и искусством.

Но не только законы симметрии являются «математикой искусства». В главе 20 мы обнаружили, что гамма в музыке и шкала пропорциональности в архитектуре (в частности, знаменитые ряд золотого сечения и модулор Ле Корбюзье) имеют одинаковое математическое строение. Таким образом, в основе основ музыки и архитектуры — гамме и пропорции — лежит математика.

В качестве заключительной вариации на тему «Архитектура — математика — музыка» заметим, что архитектоника этой книги очень музыкальна. В самом деле, в пяти частях книги соответственно 6, 8, 6, 5 и 4 главы. Следовательно, в главах этой книги «звучат» все существующие консонансы: как совершенные — октава (8 : 4=2 : 1), квинта (6 : 4=3 : 2), кварта (8 : 6=4 : 3), так и несовершенные — большая терция (5 : 4), малая терция (6 : 5), малая секста (8 : 5). По мере сил автор старался, чтобы столь же музыкальной была не только форма, но и содержание книги.

И последнее. Автору хотелось обратить внимание читателя на то, что красота не является избранницей только искусства. Красота есть всюду. Есть она и в науке, и в особенности в ее жемчужине — математике. К сожалению, эстетика науки до сих пор живет на положении Золушки и о красоте науки сказано обидно мало. Но те, кто собирается посвятить свою жизнь науке, должны ясно представлять, что наука во главе с «царицей всех наук» — математикой — откроет перед ними сказочные сокровища красоты.

И самое последнее. Широта миропонимания и традиции всеохватности всегда были неотъемлемой частью широкой русской души и синтетической русской культуры. Не случайно конец XIX — начало XX в. — *Серебряный век* русской культуры — отмечен появлением *философии всеединства* Владимира Соловьева, братьев Сергея и Евгения Трубецких, священников Сергия Булгакова и Павла Флоренского, а также *философии космизма* Николая Федорова, Константина Циолковского, Владимира Вернадского, Александра Чижевского. На протяжении века математик Андрей Марков и поэт Андрей Белый, космический конструктор Борис Раушенбах и живописец Николай Рерих, математик Андрей Колмогоров и филолог Михаил Гаспаров строили и продолжают строить с разных сторон мост между математикой и искусством. Хочется верить, что в новом XXI в. Россия выйдет из затянувшейся паузы безвременья и русская идея всеединства приведет к новому союзу математики и искусства.

Впрочем, вряд ли стоит в коротком заключении пытаться сказать то, чего ты не смог сказать во всей книге. А если смог, то и не надо повторяться. Тогда остается только вернуться на «круги свои», к тому, с чего мы начали заключение.

Книга закончена.

ЛИТЕРАТУРА

К части I

Архитектура математики. — *М.: Знание, 1972.*

ВЕЙЛЬ Г. Симметрия. — *М.: Наука, 1968.*

ВЕРНАДСКИЙ В. И. Философские мысли натуралиста. — *М.: Наука, 1988.*

ВИГНЕР Е. Этюды о симметрии. — *М.: Мир, 1971.*

ГАРДНЕР М. Этот правый, левый мир. — *М.: Мир, 1971.*

ГЛАЗЫЧЕВ В. Л. Гемма Коперника. Мир науки в изобразительном искусстве. — *М.: Сов. художник, 1989.*

ГУЛЫГА А. В. Принципы эстетики. — *М.: Политиздат, 1987.*

ДАНИН Д. С. Перекресток. — *М.: Сов. писатель, 1974.*

КАГАН М. С. Эстетика как философская наука. — *СПб.: Петрополис, 1997.*

КАЛЬОТИ ДЖ. От восприятия к мысли. О динамике неоднозначного и нарушениях симметрии в науке и искусстве. — *М.: Мир, 1998.*

КЛАЙН М. Математика: утрата определенности. — *М.: Мир, 1984.*

КНЯЗЕВА Е. Н., КУРДЮМОВ С. П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. — *М.: Наука, 1994.*

Красота и мозг. Биологические аспекты эстетики. — *М.: Мир, 1995.*

КУРАНТ Р., РОБИНС Г. Что такое математика?: Элементарный очерк идей и методов.— *Л.: Наука, 1971.*

МЕЙЛАХ Б. С. На рубеже науки и искусства: Спор о двух сферах познания и творчества. — *Л.: Наука, 1971.*

МИГДАЛ А. Б. Поиски истины. — *М.: Мол. гвардия, 1983.*

МОРОЗ О. П. Прекрасна ли истина? — *М.: Знание, 1989.*

Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. — *М.: Наука, 1996.*

ОВСЯННИКОВ М. Ф. История эстетической мысли. — *М.: Высшая школа, 1984.*

ПАЙТГЕН Х.-О., РИХТЕР П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. — *М.: Мир, 1993.*

ПЛАТОН. Пир//Соч.: В 4 т. — *М.: Мысль, 1993.*

ПРИГОЖИН И., СТЕНГЕРС И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. — *М.: Наука, 1986.*

СНОУ Ч. П. Две культуры. — *М.: Прогресс, 1973.*

СОНИН А. С. Постижение совершенства. — *М.: Знание, 1987.*

СТОЛОВИЧ Л. Н. Красота. Добро. Истина: Очерк истории эстетической аксиологии. — *М.: Республика, 1994.*

ТОЛСТОЙ Л. Н. Что такое искусство? — *М.: Худож. лит., 1964.*

УРМАНЦЕВ Ю. А. Симметрия природы и природа симметрии. — *М.: Мысль, 1974.*

ФЕДЕР Е. Фракталы. — *М.: Мир, 1991.*

ФЕЙНБЕРГ Е. Л. Две культуры. Интуиция и логика в искусстве и науке. — *М.: Наука, 1992.*

ФЕЙНМАН Р. Характер физических законов. — *М.: Наука, 1987.*

ХАКЕН Г. Синергетика. — *М.: Мир, 1980.*

ХАРГИТТАИ И., ХАРГИТТАИ М. Симметрия глазами химика. — *М.: Мир, 1989.*

ШЕСТАКОВ В. П. Гармония как эстетическая категория. — *М.: Наука, 1973.*

ШПЕНГЛЕР О. Закат Европы: Очерки морфологии мировой истории: В 2 т. — *М.: Мысль, 1993—1998.*

ШУБНИКОВ А. В., КОПЦИК В. А. Симметрия в науке и искусстве. — *М.: Наука, 1972.*

ЯКОВЛЕВ Е. Г. Эстетическое как совершенное: Избранные работы. — *М.: Брандес, 1995.*

К части II

АНСЕРМЕ Э. Беседы о музыке. — *Л.: Музыка, 1985.*

Античная музыкальная эстетика. — *М.: Музгиз, 1960.*

АНФИЛОВ Г. Б. Физика и музыка. — *М.: Дет. лит., 1964.*

ВИНОГРАДОВ Г. В., КРАСОВСКАЯ Е. М. Занимательная теория музыки. — *М.: Сов. композитор, 1991.*

ВОЛОШИНОВ А. В. Пифагор: союз истины, добра и красоты. — *М.: Просвещение, 1993.*

ГЕРЦМАН Е. В. Музыкальная Боэциана. — *СПб.: Глагол, 1995.*

ДИОГЕН ЛАЭРТСКИЙ. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. — *М.: Мысль, 1979.*

ЖМУДЬ Л. Я. Наука, философия и религия в раннем пифагореизме. — *СПб.: Алетейя, 1994.*

ЗАРИПОВ Р. Х. Кибернетика и музыка. — *М.: Наука, 1971.*

ЛОСЕВ А. Ф. История античной эстетики: В 8 т. — *М.: Искусство, 1969—1990.*

ЛОСЕВ А. Ф. Музыка как предмет логики//Из ранних произведений. — *М.: Правда, 1990.*

МАЗЕЛЬ Л. А. О природе и средствах музыки: теоретический очерк. — 2-е изд. — *М.: Музыка, 1991.*

МАРУТАЕВ В. М. Приблизительная симметрия в музыке//Проблемы музыкальной науки. —*М.: Сов. композитор, 1979.*— Вып. 4.

МОЛЬ А., ФУКС В., КАССЛЕР М. Искусство и ЭВМ. — *М.: Мир, 1975.*

НАЗАЙКИНСКИЙ Е. В. Звуковой мир музыки. — *М.: Музыка, 1988.*

ПЛАТОН. Тимей//Соч.: В 4 т. — *М.: Мысль, 1994. — Т. 3.*

РОЗЕНОВ Э. К. Статьи о музыке: Избранное. — *М.: Музыка, 1982.*

ТЕЙЛОР Ч. Физика музыкальных звуков. — *М.: Легкая индустрия, 1976.*

ШИЛОВ Г. Е. Простая гамма. — *М.: Наука, 1980.*

К части III

АЛЬБЕРТИ Л.-Б. Десять книг о зодчестве. — *М.: ИАА, 1935.*

БАРТЕНЕВ И. А. Формула и конструкция в архитектуре. — *Л.: Стройиздат, 1968.*

БОРИСОВСКИЙ Г. Б. Наука, техника, искусство. — *М.: Наука, 1969.*

ВАСЮТИНСКИЙ Н. А. Золотая пропорция. — *М.: Мол. гвардия, 1990.*

ВИТРУВИЙ М. П. Десять книг об архитектуре. — *М.: ИАА, 1936.*

ВОРОБЬЕВ Н. Н. Числа Фибоначчи. — *М.: Наука, 1984.*

ГИКА М. Эстетика пропорций в природе и искусстве. — *М.: ИАА, 1936.*

ГЛИКИН Я. Д. Методы архитектурной гармонии. — *Л.: Стройиздат, 1976.*

ГРИММ Г. Д. Пропорциональность в архитектуре. — *Л.; М.: ОНТИ, 1935.*

ИКОННИКОВ А. В. Художественный язык архитектуры. — *М.: Искусство, 1985.*

КОУЭН Г. ДЖ. Мастера строительного искусства. — *М.: Стройиздат, 1982.*

ЛЕ КОРБЮЗЬЕ. Архитектура XX века. — *М.: Прогресс, 1970.*

СМОЛИНА Н. И. Традиции симметрии в архитектуре. — *М.: Стройиздат, 1990.*

ТИММЕРДИНГ Г. Е. Золотое сечение. — *Петроград, 1924.*

ХЭМБИДЖ Д. Динамическая симметрия в архитектуре. — *М.: ИАА, 1936.*

ШЕВЕЛЕВ И. Ш. Принцип пропорции. — *М.: Стройиздат, 1986.*

ШЕВЕЛЕВ И. Ш., МАРУТАЕВ М. А., ШМЕЛЕВ И. П. Золотое сечение. — *М.: Стройиздат, 1990.*

К части IV

ВАВИЛОВ С. И. Глаз и солнце: О свете, солнце и зрении. — *М.: Наука, 1981.*

ВОЛКОВ Н. Н. Композиция в живописи. — *М.: Искусство, 1977.*

ВОЛОШИНОВ А. В. Троица Андрея Рублева: геометрия и философия//Человек. — *1977. — № 6.*

ДЮРЕР А. Дневники. Письма. Трактаты.— *М.; Л.: Искусство, 1957. — Т. 2.*

ЖЕГИН Л. Ф. Язык живописного произведения.— *М.: Искусство, 1970.*

Искусство и точные науки. — *М.: Наука, 1979.*

КОВАЛЕВ Ф. В. Золотое сечение в живописи. — *Киев: Выща школа, 1989.*

ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ. Книга о живописи. — *М.: Изогиз, 1934.*

МОЧАЛОВ Л. В. Пространство мира и пространство картины. — *М.: Сов. художник, 1983.*

ПЕТРОВИЧ Д. Теоретики пропорций. — *М.: Стройиздат, 1979.*

ПИДОУ Д. Геометрия и искусство. — *М.: Мир, 1979.*

РАУШЕНБАХ Б. В. Геометрия картины и зрительное восприятие. — *М.: Интерпракс, 1994.*

РАУШЕНБАХ Б. В. Пространственные построения в древнерусской живописи. — *М.: Наука, 1975.*

РАУШЕНБАХ Б. В. Системы перспективы в изобразительном искусстве: Общая теория перспективы. — *М.: Наука, 1986.*

РЫНИН Н. А. Начертательная геометрия. Перспектива. — *Петроград, 1918.*

ТАДЕЕВ В. А. От живописи к проективной геометрии. — *Киев: Выща школа, 1988.*

ФЕДОРОВ М. В. Рисунок и перспектива. — *М.: Искусство, 1960.*

ФЛОРЕНСКИЙ П. А. Обратная перспектива// Философия русского религиозного искусства XVI—XX вв.: Антология. — *М.: Прогресс-Культура, 1993.*

ФРОЛОВ С. А., ПОКРОВСКАЯ М. В. Начертательная геометрия: что это такое? — *Минск: Вышэйшая школа, 1986.*

К части V

АВЕРИНЦЕВ С. С. Поэтика ранневизантийской литературы. — *М.: Coda, 1997.*

БАРАБАШ Ю. Г. Алгебра и гармония // Контекст-1972. — *М.: Наука, 1973.*

БЕЛЫЙ А. Символизмъ: Книга статей. — *М.: Мусагетъ, 1910.*

ДОБРОХОТОВ А. Л. Данте Алигьери. — *М.: Мысль, 1990.*

ГАСПАРОВ Б. М. Структура текста и культурный контекст//Гаспаров Б. М. Литературные мотивы. — *М.: Наука, 1994.*

ГАСПАРОВ М. Л. Очерк истории русского стиха: Метрика. Ритмика. Рифма. Строфика. — *М.: Наука, 1984.*

ГАСПАРОВ М. Л. Статистическое обследование русского трехударного дольника//Теория вероятностей и ее применения. — *1963. — Т. 8. — № 1.*

ГОРДЕЗИАНИ Р. В. «Илиада» и «Одиссея» — памятники письменности // Античность как тип культуры. — *М.: Наука, 1988.*

ЖИРМУНСКИЙ В. М. Теория стиха. — *Л.: Сов. писатель, 1975.*

КОЛМОГОРОВ А. Н. Пример изучения метра и его ритмических вариантов//Теория стиха. — *Л.: Наука, 1968.*

КОЛМОГОРОВ А. Н., ПРОХОРОВ А. В. К основам русской классической метрики // Содружество наук и тайны творчества. — *М.: Искусство, 1968.*

КОНДРАТОВ А. М. Математика и поэзия. — *М.: Знание, 1962.*

КРАСНОПЕРОВА М. А. Структурное, математическое и прикладное стиховедение. Метрика и ритмика//Прикладное языкознание. — *СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996.*

ЛИХАЧЕВ Д. С. Поэтика древнерусской литературы. — *Л.: Наука, 1967.*

ЛОТМАН Ю. М. Внутри мыслящих миров. Человек — текст — семиосфера — история. — *М.: Языки русской культуры, 1996.*

ЛОТМАН Ю. М. О поэтах и поэзии. — *СПб.: Искусство-СПб., 1996.*

НАЛИМОВ В. В., ДРОГАЛИНА Ж. А. Реальность нереального. Вероятностная модель бессознательного.— *М.: Мир идей, 1995.*

ПРОПП В. Я. Морфология сказки. — 2-е изд. — *М.: Наука, 1969.*

СТЕПАНОВ Ю. С. Семиотика. — *М.: Наука, 1971.*

ТОМАШЕВСКИЙ Б. В. Поэтика (Краткий курс).— *М.: СС, 1996.*

УСПЕНСКИЙ Б. А. Семиотика искусства. — *М.: Языки русской культуры, 1995.*

ХЬЕТСО Г., ГУСТАВССОН С., БЕКМАН Б., ГИЛ С. Кто написал «Тихий Дон»? — *М.: Книга, 1989.*

ЦЕРЕТЕЛИ Г. В. Метр и ритмика в поэме Руставели и вопросы сравнительной версификации // Контекст-1973. — *М.: Наука, 1974.*

СОДЕРЖАНИЕ

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

ВОЛОШИНОВ АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ

Математика и искусство

Зав. редакцией Т. А. БУРМИСТРОВА
Редактор Т. А. БУРМИСТРОВА
Младший редактор Н. В. СИДЕЛЬКОВСКАЯ
Художники Е. А. АДАМОВ, С. И. КРАВЦОВА, Д. А. ВОЛОШИНОВ
Художественный редактор Е. А. МИХАЙЛОВА
Технические редакторы Н. А. КИСЕЛЕВА, Н. В. СЕМЁНОВА
Корректоры И. А. ГРИГАЛАШВИЛИ, О. В. ИВАШКИНА

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. № 010001 от 10.10.96. Сдано в набор 07.07.99. Подписано к печати 15.05.2000. Формат 84×108$^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 42,0+0,42 форз. Усл. кр.-отт. 170,52. Уч.-изд. л. 37,42+0,67 форз. Тираж 15 000 экз. Заказ № 9135 (Кр+Л).

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Издательство «Просвещение» Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

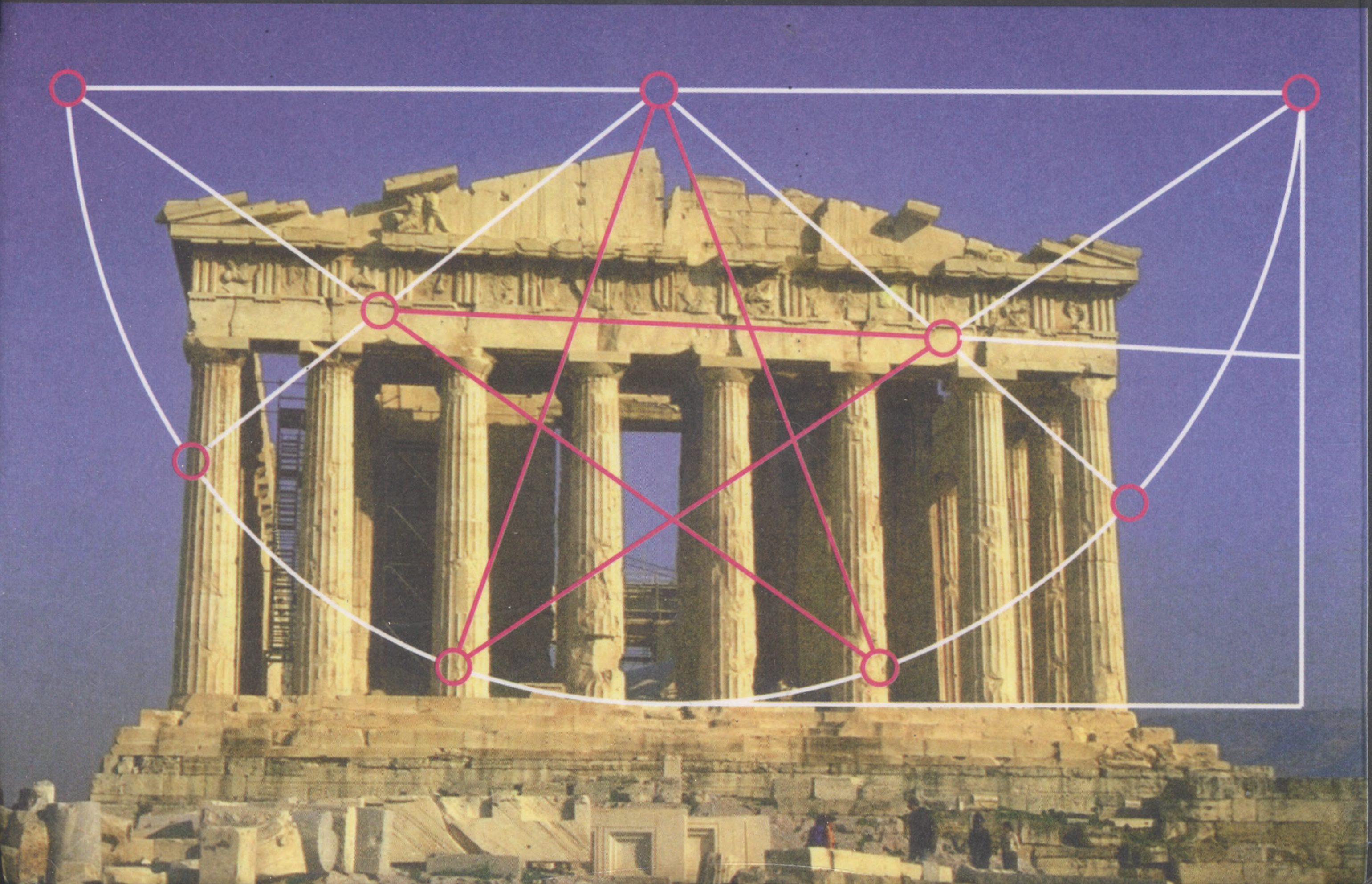
Государственное унитарное предприятие Смоленский полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

ISBN 5-09-008033-X

Математика и искусство: сегодня эти две великие сферы культуры многими воспринимаются как два полюса или даже как две противоборствующие духовные силы, тогда как на самом деле они тесно переплетены крепкими незримыми узами.

В книге на обширном материале от античности до наших дней прослеживаются пути взаимодействия и взаимообогащения математики и искусства, доказывается, что формулы математики и образы искусства необходимы друг другу и неотделимы друг от друга.

И если 2000 год, последний год уходящего тысячелетия, объявлен ЮНЕСКО годом математики, то грядущий XXI век видится автору веком интеграции математики и искусства.



А. В. Волошинов

МАТЕМАТИКА И ИСКУССТВО

·Просвещение·

А. В. Волошинов МАТЕМАТИКА И ИСКУССТВО